À rendre jeudi 30 janvier 2025

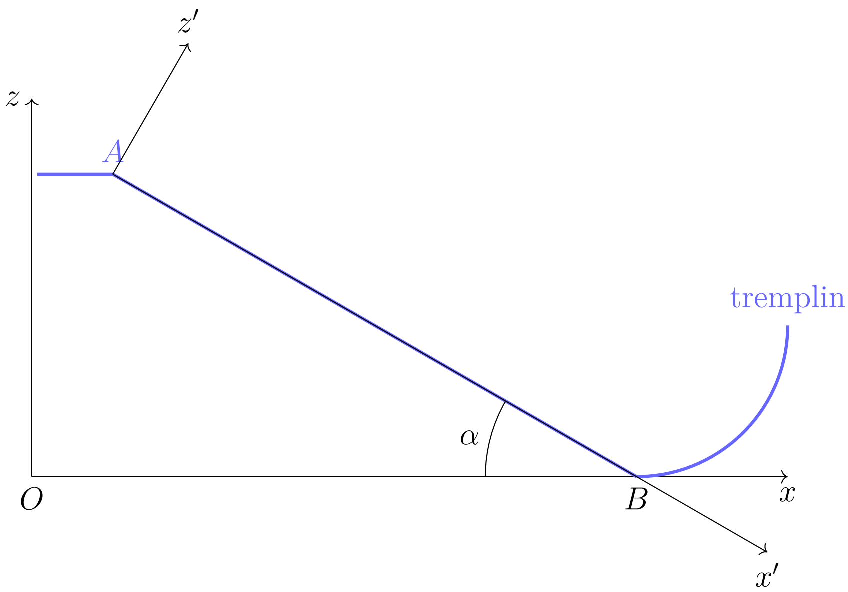
Devoir Maison n°13 – Approche énergétique

Travail à faire :

- Si vous n'êtes pas très à l'aise / en difficulté :
  - Exercice n°1 en entier,
  - Exercice n°2 : questions Q1, Q2, Q3, Q4 au minimum.
- Si vous êtes plutôt à l'aise :
  - Exercice n°2 en entier,
  - Exercice n°3 en entier.

Exercice n°1 Skieuse

On considère une skieuse qui se lance, sans vitesse initiale au point A, dans une piste d'inclinaison moyenne $\alpha = 30°$ pour un dénivelé total de $H = 10$ m. La masse de la skieuse et de ses équipements est de 60 kg. On modélise les frottements entre la neige et les skis par la loi de Coulomb pour les frottements : la résultante des actions de la neige sur la skieuse s'écrit $\overrightarrow{N} + \overrightarrow{T}$, avec $\overrightarrow{N}$ la composante normale à la piste et $\overrightarrow{T}$ la composante tangentielle (correspondant à des frottements), avec $\|\overrightarrow{T}\| = f\|\overrightarrow{N}\|$ et $f = 0,15$ le coefficient de frottement ski-neige.



Q1. Le mouvement est-il conservatif ?

Q2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique pour obtenir $\|\overrightarrow{N}\|$.

Q3. En déduire $\|\overrightarrow{T}\|$.

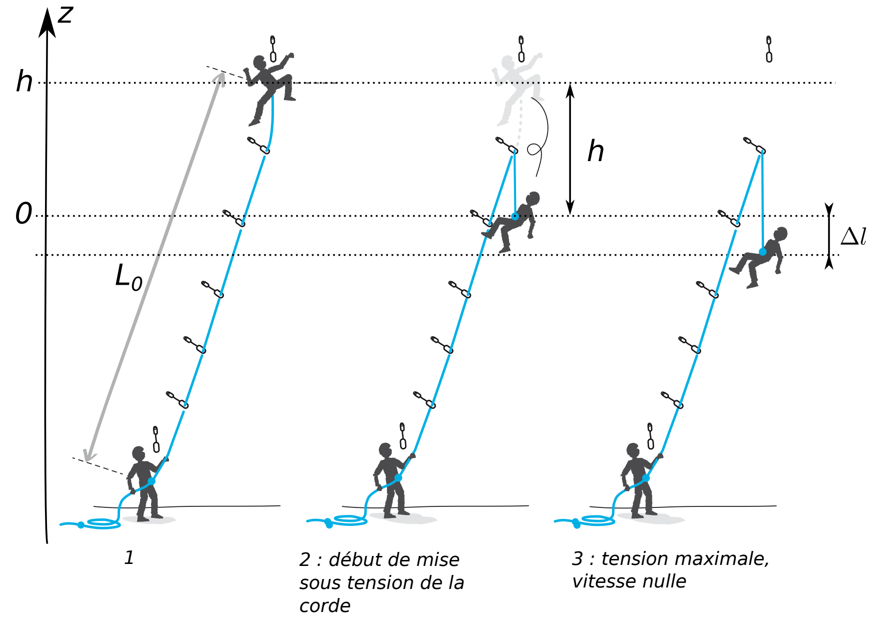
Q4. Montrer que $\overrightarrow{T} = -fmg\cos(\alpha)\overrightarrow{u_{x'}}$.

Q5. En appliquant un théorème énergétique, établir l'expression de la vitesse v_B de la skieuse lorsqu'elle arrive au bas de la pente (point B) en fonction de m, g, H et $\tan(\alpha)$.
Faire l'application numérique.

Q6. La skieuse arrive ensuite sur un tremplin où on néglige tous frottements et décolle. On néglige les frottements de l'air.
Quelle est l'altitude maximale qu'elle va pouvoir atteindre ?

Exercice n°2 Escalade

On étudie un grimpeur qui effectue une chute.
Une corde d'escalade de longueur ℓ_0 peut en première approximation être modélisée par un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur $k = \dfrac{\alpha}{\ell_0}$, avec α une caractéristique de la corde.
Le grimpeur est en chute libre sur une hauteur h pendant laquelle la corde n'est pas sous tension.
Puis la corde passe sous tension, et la chute se poursuit sur une hauteur $\Delta\ell$.
La vitesse du grimpeur devient ainsi nulle au bout d'une hauteur totale de chute $h + \Delta\ell$.
Les frottements seront négligés.



Source : Site Petzl

On prendra $g = 10$ m · s^{-2}, une corde avec $\alpha = 5.0 \times 10^4$ N et un grimpeur de masse 100 kg.
Les applications numériques devront être effectuées sans calculatrice.

Q1. Effectuer le bilan des forces qui s'exercent sur le grimpeur. **On distinguera les deux phases** *.
Pour chaque force on précisera si c'est une force conservative ou non. Si oui, on en donnera l'énergie potentielle.
Que peut-on dire de l'énergie mécanique au cours de la chute du grimpeur ? *La réponse devra être justifiée.*

Q2. En exploitant Q1 entre les états 1 et 2, déterminer l'expression de la vitesse atteinte par le grimpeur à la fin de la chute libre.
Faire l'application numérique pour une hauteur de chute $h = 5$ m.

Q3. En exploitant Q1, établir l'équation suivante vérifiée par l'allongement maximal $\Delta\ell$ de la corde :

$$(\Delta\ell)^2 - \frac{2mg}{k}\Delta\ell - \frac{2mgh}{k} = 0$$

Q4. On suppose que $\Delta\ell \ll h$, quel terme de l'équation précédente est négligeable devant le terme constant ?
Simplifier l'équation précédente, et en déduire l'expression de $\Delta\ell$ †.

Q5. Quand la force de rappel élastique est-elle maximale ?
Déterminer l'expression de la force maximale $F_{\max}$ qui s'exerce sur le grimpeur.
On l'exprimera en fonction de m, g, α et le facteur de chute définie par $f = h/\ell_0$.

Au delà d'une force de 12 kN, les dommages sur le corps humain deviennent importants.

Q6. Que vaut $F_{\max}$ pour une chute de $h = 4$ m sur une corde de longueur $\ell_0 = 4$ m ? Conclusion ?

Q7. Une chute d'un mètre arrêtée par une corde de 50 cm est-elle plus ou moins dangereuse qu'une chute de 4 m arrêtée par une corde de 8 m ?

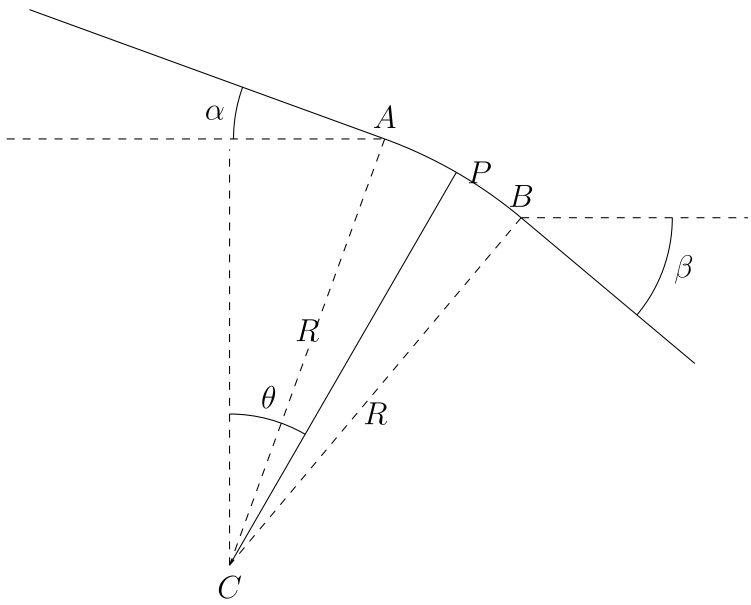
*. 1$^{\text{re}}$ phase : de 1 à 2 ; 3$^{\text{e}}$ phase : de 2 à 3.

†. $\Delta\ell = \sqrt{\dfrac{2mgh}{k}}$

Exercice n°3 À ski

Lois de Coulomb :
- En présence de glissement : $\|\overrightarrow{R_T}\| = f_d\|\overrightarrow{R_N}\|$ et $\overrightarrow{R_T} \cdot \overrightarrow{v_g} < 0$
- En l'absence de glissement : $\|\overrightarrow{R_T}\| < f_s\|\overrightarrow{R_N}\|$

Un skieur (assimilé à un point matériel M) descend une piste, de longueur $L = 100$ m selon la plus grande pente faisant un angle $\alpha = 20°$ avec l'horizontale. Il s'élance du haut de cette piste avec une vitesse $v_0 = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Il arrive avec une vitesse v_A au point A où la piste est circulaire de rayon $R = 10$ m jusqu'à redevenir plane en B avec une déclivité $\beta = 40°$.
Sur les portions rectilignes, la neige est plutôt collante, et on prend en compte les frottements solides de coefficient f, qui vérifient la loi de Coulomb sur le frottement solide. Sur la portion circulaire, les frottements solides sont négligés.
La piste rectiligne est tangente à la piste circulaire en A. Il en est de même en B.
On négligera les frottements fluides.



Données :
- $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$;
- $\cos(20) \approx 0,9$; $\cos(40) \approx 0,8$; $\sin(20) \approx 0,3$; $\sin(40) \approx 0,6$; $21^2 = 441$; $7,7^2 \approx 60$
- Des approximations raisonnables pourront être effectuées.

Q1. Par application d'un théorème énergétique, déterminer l'expression de la vitesse v_A en A, en fonction de v_0, f, L, α et g [‡].

Sur la portion circulaire, dont on note C le centre, on repère le skieur par ses coordonnées polaires.

Q2. Exprimer les angles θ_A et θ_B en A et B en fonction de α et β [§].

Q3. Représenter en P, point quelconque de la portion circulaire, la base polaire et les forces s'exerçant sur le skieur.

Q4. Établir l'expression de la norme R_N de la réaction normale de la piste circulaire en fonction de θ, $\dot{\theta}$ et des constantes du problème [¶].

Q5. Par application d'un théorème énergétique entre A et un point P quelconque de la piste circulaire, établir une équation reliant $\dot{\theta}$, θ et des constantes du problème [‖].

Q6. En déduire que R_N s'exprime selon :

$$R_N = mg(3\cos(\theta) - 2\cos(\alpha)) - m\frac{v_A^2}{R}$$

Q7. À quelle condition sur v_A, le contact avec la piste ne cesse-t-il pas ?

Q8. Faire l'application numérique de v_A. Commenter.

‡. On pensera à l'exemple du cours de Louise sur sa luge.
On pourra introduire un axe $(O'Z)$ vertical ascendant et choisir l'origine des énergies potentielles de pesanteur au niveau de A.

§. On utilisera avantageusement que les rayons des cercles sont orthogonaux aux tangentes au cercle, c'est-à-dire à la piste rectiligne en A et en B.

¶. Seul votre PFD adoré vous permet de le faire.

‖. On pourra introduire un nouvel axe (CZ) vertical ascendant et choisir l'origine des énergies potentielles en C pour exprimer « facilement » Z_P et Z_A en fonction de R et de θ ou α.