



## Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)

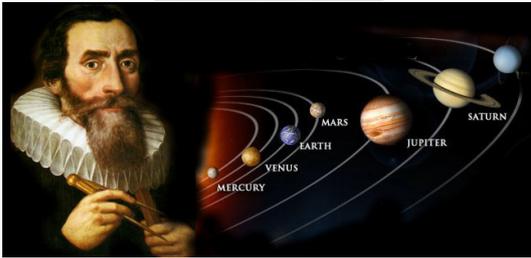
# Chapitre n°15 Mouvements dans un champ de force centrale conservatif



Tycho BRAHÉ (1546-1601) a réalisé un grand nombre d'observations astronomiques d'une précision bien supérieure à celle de l'époque (avant l'invention de la lunette astronomique par GALILÉE), et récolte notamment les positions des planètes.

Il confie à Johannes KEPLER (1571-1630) le soin d'étudier Mars, qui est la planète, connue à cette époque, dont la trajectoire a la plus grande excentricité, et il en déduit les deux premières lois qui portent maintenant son nom. La troisième loi sera découverte plus tard, car pas du tout évidente à découvrir à partir d'une série de données.

Ces trois lois de Kepler seront fondamentales dans l'établissement de la loi de la gravitation universelle par Isaac NEWTON (1642-1727), il démontrera notamment que les trajectoires planétaires elliptiques impliquent une loi d'attraction en  $1/r^2$ .



## Pré-requis

- Terminale : Thème Mouvement et interactions
  - Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien
  - Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire.
- PCSI : Thème Mouvement et interactions
  - Chapitre n°10. Description et paramétrage du mouvement d'un point : mouvements circulaires.
  - Chapitre n°11. Lois de Newton : PFD, force gravitationnelle.
  - Chapitre n°12. Approche énergétique du mouvement du point matériel : énergies potentielles, énergie mécanique.
  - Chapitre n°14. Théorème du moment cinétique pour le point matériel.

## Objectifs du chapitre

La description du mouvement des astres qui composent le Système solaire est un succès majeur de la mécanique newtonienne. En première approche, l'étude est réalisée sur un système de deux corps (l'astre, et son satellite), en négligeant les interactions avec les autres corps célestes. Si l'astre est beaucoup plus massif que son satellite, on pourra raisonnablement considérer que le premier demeurera fixe dans le référentiel galiléen d'étude, pendant que le second se déplacera autour de lui. L'étude du mouvement d'un point matériel soumis à une force constamment dirigée vers un point fixe constitue un problème à force centrale. Nous verrons également que la portée de ce chapitre sera bien plus large, et pourra également s'appliquer au mouvement d'une particule chargée autour d'une autre plus massive. Nous parlerons de l'expérience historique de Rutherford, qui a permis de prouver que les atomes sont constitués d'un noyau, lourd, chargé positivement, entouré d'un nuage électronique.

### Objectifs du chapitre :

- Définir « force centrale » et « champ newtonien ».
- Appliquer les lois de la dynamique pour déterminer les caractéristiques du mouvement d'un point soumis à une force centrale conservative.
- Par une approche énergétique, déterminer la nature du mouvement.
- Énoncer les trois lois de Kepler.
- Étudier les mouvements circulaires plus particulièrement.

## Plan du cours

<b>I Lois de conservation</b>	<b>3</b>
I.1 Forces centrales . . . . .	3
I.2 Conservation du moment cinétique . . . . .	4
I.2.a) Conservation . . . . .	4
I.2.b) 1 <sup>re</sup> conséquence : Mouvement plan	4
I.2.c) 2 <sup>e</sup> conséquence : la loi des aires . . . . .	5
I.3 Conservation de l'énergie mécanique . . . . .	7
I.3.a) Forces centrales conservatives . . . . .	7
I.3.b) Énergie potentielle effective . . . . .	8
I.3.c) Description du mouvement radial	8
I.4 Mouvements dans un champ de force Newtonien . . . . .	9
I.4.a) Interaction newtonienne attractive	9
I.4.b) Interaction newtonienne répulsive	11
<b>II Lois de Kepler</b>	<b>12</b>

<b>III Application à l'étude des mouvements des planètes ou des satellites</b>	<b>13</b>
III.1 Mouvements circulaires . . . . .	13
III.1.a) Mouvements uniformes . . . . .	13
III.1.b) Période . . . . .	13
III.1.c) Énergie mécanique . . . . .	14
III.1.d) Première vitesse cosmique . . . . .	14
III.1.e) Satellites géostationnaires . . . . .	15
III.1.f) Quelles orbites ? . . . . .	16
III.2 Mouvements elliptiques . . . . .	17
III.2.a) Description . . . . .	17
III.2.b) Période . . . . .	17
III.2.c) Énergie mécanique . . . . .	18
III.3 Vitesse de libération . . . . .	19
<b>IV Résolution numérique</b>	<b>20</b>
<b>V Annexe : Données numériques</b>	<b>23</b>

## Ai-je bien appris mon cours ?

- 1 – 😊 – 😞 – Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique d'un point matériel soumis à un champ de force centrale.
- 2 – 😊 – 😞 – Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
- 3 – 😊 – 😞 – Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservative.
- 4 – 😊 – 😞 – Représenter l'allure de l'énergie potentielle effective dans le cas étudié, et décrire le mouvement radial. Préciser sa nature bornée / non bornée selon la valeur de l'énergie mécanique.
- 5 – 😊 – 😞 – Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.
- 6 – 😊 – 😞 – Établir que le mouvement circulaire d'un point matériel soumis à un champ de force centrale est nécessairement uniforme.
- 7 – 😊 – 😞 – Établir la période du mouvement circulaire d'un satellite ou d'une planète.
- 8 – 😊 – 😞 – Établir la 3<sup>e</sup> loi de Kepler pour un mouvement circulaire.
- 9 – 😊 – 😞 – Établir l'énergie mécanique sur un mouvement circulaire d'un satellite ou d'une planète.
- 10 – 😊 – 😞 – Établir l'énergie mécanique sur un mouvement elliptique d'un satellite ou d'une planète, en utilisant les conservations de l'énergie mécanique et du moment cinétique.
- 11 – 😊 – 😞 – Donner les différentes orbites des satellites terrestres selon leurs missions.
- 12 – 😊 – 😞 – Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.
- 13 – 😊 – 😞 – Établir les expressions des deux vitesses cosmiques (vitesse en orbite basse et vitesse de libération).
- 14 – 😊 – 😞 – Donner les ordres de grandeur des deux vitesses cosmiques en dynamique terrestre.

## 0 Cadre de l'étude

Nous allons nous intéresser à l'interaction entre deux corps  $O$  et  $M$ , de masses respectives  $m_O$  et  $m$ .

Nous allons faire **deux hypothèses** :

1. L'ensemble de ces deux corps  $\{(O, m_O); (M, m)\}$  constitue un système isolé. C'est-à-dire que l'on négligera l'influence des autres corps.
2. Nous nous placerons dans le cas où  $m_O$  est beaucoup plus massif que  $m$ .

Dans ce cas, il sera possible de considérer que  $O$  est fixe dans un référentiel galiléen :

- Si on étudie le **mouvement des planètes autour du Soleil**, la masse du Soleil est très supérieure à la masse des planètes.  
On pourra se placer dans le **référentiel héliocentrique** dont l'origine est le centre de masse du Soleil et les 3 axes pointent vers trois étoiles fixes (suffisamment lointaines pour être supposées fixes).  
Ce référentiel peut être considéré galiléen à l'échelle du mouvement des planètes sur des échelles de temps allant jusqu'à plusieurs millions d'années.
- Si on étudie le **mouvement des satellites de la Terre**, la masse de la Terre est très supérieure à la masse des satellites (Lune, ou satellites artificiels).  
On pourra se placer dans le **référentiel géocentrique** dont l'origine le centre de masse de la Terre et les 3 axes pointent vers les trois mêmes étoiles fixes que celles du référentiel héliocentrique.  
Ce référentiel peut être considéré galiléen à l'échelle du mouvement des satellites sur des échelles de temps allant jusqu'à plusieurs jours.
- Si on étudie le **mouvement d'une particule chargée** (électron, proton) déviée par une autre particule chargée nettement plus massive (noyau lourd par ex.), on pourra se placer dans le **référentiel du laboratoire** dans lequel le noyau lourd pourra être supposé immobile.  
Ce référentiel peut être considéré galiléen à l'échelle d'une expérience de quelques mètres (km) et de quelques minutes.

## I Lois de conservation

### I.1 Forces centrales



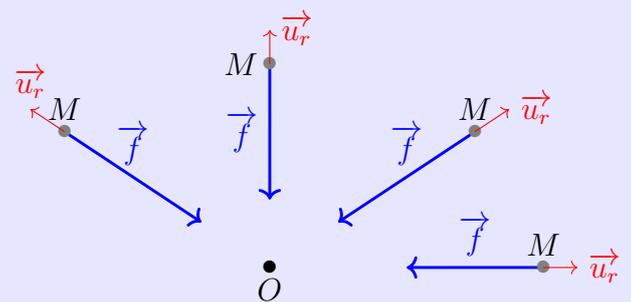
#### Définition : Force centrale

Une **force** s'appliquant au point matériel  $M$  est dite **centrale**, lorsque sa droite d'action passe constamment par un point fixe  $O$  du référentiel  $\mathcal{R}$ . Le point fixe  $O$  est appelé **centre de force**.

Une force centrale peut alors s'écrire

$$\vec{f} = f_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

avec  $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$  (c'est le 1<sup>er</sup> vecteur de la base sphérique).



#### Exemple 1. Forces centrales :

- Force de rappel élastique exercée par un ressort fixé en un point fixe du référentiel d'étude ;
- Forces gravitationnelle et électrostatique (de Coulomb).

♥ **À retenir : Forces Newtoniennes**

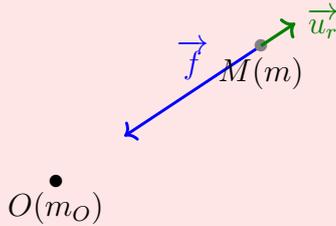
**Force de gravitation entre deux masses ponctuelles**  $\{(O, m_O); (M, m)\}$

Force exercée par  $O(m_O)$  sur  $M(m)$  :

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = -G \frac{m_O m}{OM^2} \vec{OM}$$

avec  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  la constante universelle de gravitation

La force de gravitation est **toujours attractive**.



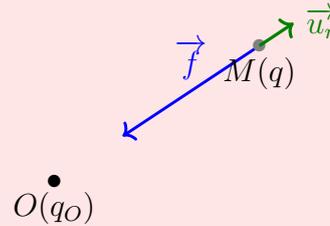
**Force électrostatique entre deux charges ponctuelles**  $\{(O, q_O); (M, q)\}$

Force exercée par  $O(q_O)$  sur  $M(q)$  :

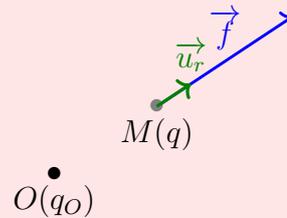
$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_O q}{OM^2} \vec{OM}$$

avec  $\epsilon_0 = 8,89 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  la permittivité absolue du vide

Si les **deux charges sont de signes opposés**,  $q \times q_O < 0$ , la force électrostatique est **attractive**.



Si les **deux charges sont de même signe**,  $q \times q_O > 0$ , la force électrostatique est **répulsive**.



Les forces Newtoniennes s'exerçant sur  $M$  sont des **forces centrales** dans le référentiel lié à  $O$  (c'est-à-dire dans lequel  $O$  est fixe).

Dans toute la suite, on étudie le mouvement d'un point  $M(m)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié au point  $O$  et considéré galiléen à l'échelle de l'expérience. Ce point  $M$  est soumis à une unique force centrale de centre de force  $O$ . On notera  $r$  la distance  $OM$ .

## 1.2 Conservation du moment cinétique

### 1.2.a) Conservation

**Capacité exigible** : Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique.

### 🔧 À maîtriser : Conservation du moment cinétique

En utilisant le théorème du moment cinétique par rapport au centre de force  $O$ , montrer que le moment cinétique du point matériel  $M$  par rapport au centre de force  $O$  se conserve.

**Capacité exigible** : Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.

### 1.2.b) 1<sup>re</sup> conséquence : Mouvement plan

### 🔧 À maîtriser : Planéité du mouvement

Q1. En utilisant la conservation du moment cinétique et la propriété du produit vectoriel, justifier que les vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{v}(M/\mathcal{R})$  sont toujours contenus dans le même plan que l'on précisera.

Q2. En déduire que le mouvement est plan.

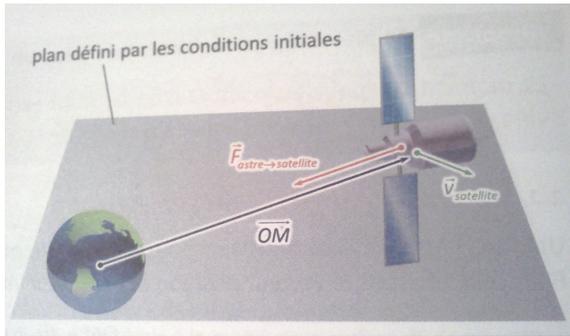


FIGURE 1 – La position et la vitesse initiales du système définissent un plan. La seule force à s'exercer étant dans ce plan, le satellite n'en sort pas.

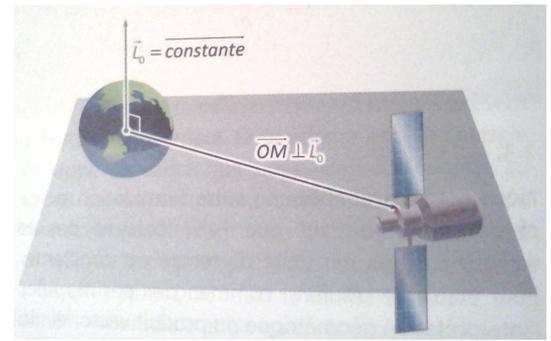


FIGURE 2 – Le vecteur position et le vecteur vitesse sont par définition du produit vectoriel perpendiculaires au moment cinétique, qui est constant pour un système à force centrale. Le mouvement est donc limité au plan perpendiculaire à  $\vec{L}_O$  contenant  $O$ .

### 1.2.c) 2<sup>e</sup> conséquence : la loi des aires

#### À maîtriser : Loi des aires

- Q1. En utilisant la nature plane du mouvement (justifiée précédemment) et le fait que le centre de force  $O$  joue un rôle particulier, choisir le système de coordonnées adapté à l'étude du problème ici. Le représenter sur un schéma. On prendra l'axe  $(Oz)$  dans la direction du vecteur moment cinétique.
- Q2. Exprimer le vecteur moment cinétique par rapport à  $O$  dans la base choisie précédemment.
- Q3. En déduire que la quantité  $r^2\dot{\theta}$  est une constante. En donner son unité.

#### Attention

Le produit  $r^2 \times \dot{\theta}$  est constant, MAIS ce n'est pas le cas de  $r^2$  et  $\dot{\theta}$ .  $r^2$  et  $\dot{\theta}$  varient au cours du temps (a priori).

#### Interprétation géométrique de la constante des aires.

Au premier ordre, on peut assimiler l'aire balayée entre deux instants infiniment proches  $t$  et  $t + dt$  à l'aire du triangle de surface :

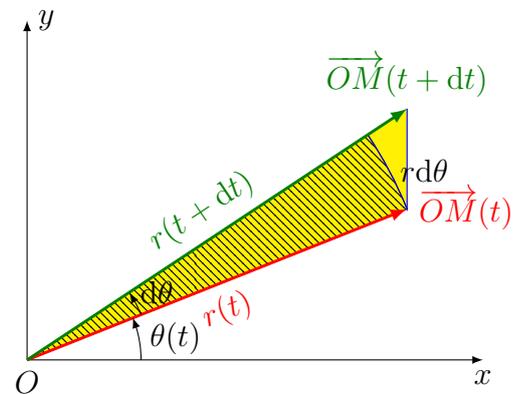
$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times r \times rd\theta$$

L'aire balayée par unité de temps s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mathcal{C}}{2}$$

$\mathcal{C}$  étant constante, on peut en déduire que l'aire balayée en une durée  $\Delta t$  donnée s'écrit  $\Delta\mathcal{A} = \frac{\mathcal{C}}{2} \Delta t$  :

« Le rayon vecteur balaye des aires égales en des temps égaux. » (2<sup>e</sup> loi de Kepler)



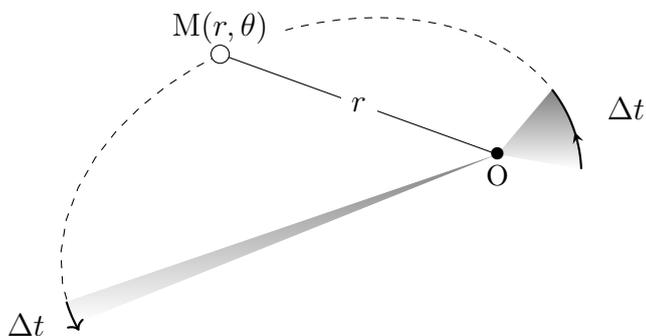


FIGURE 3 – La surface balayée par le rayon vecteur pendant une durée  $\Delta t$  a toujours la même valeur  $\Delta \mathcal{A}$ .

### ♥ À retenir : Caractéristiques du mouvement à force centrale

Soit un point matériel  $M$  de masse  $m$  soumis à une unique force centrale de centre  $O$ , point fixe du référentiel galiléen d'étude.

- Le moment cinétique du point  $M$  par rapport au centre de force  $O$  se conserve au cours du mouvement.
- La conservation du moment cinétique a deux conséquences :
  - Le **mouvement du point  $M$  est plan** : il a lieu dans le plan contenant le centre de force  $O$  et perpendiculaire au moment cinétique par rapport à  $O$ . Le plan du mouvement est imposé par les conditions initiales  $\overrightarrow{OM}(t=0)$  et  $\vec{v}(t=0)$ .
  - Le mouvement se fait selon la **loi des aires** : le rayon vecteur  $\overrightarrow{OM}$  balaye des aires égales en des temps égaux.

### 💡 Méthodes : Étude d'un mouvement à force centrale

- Comment justifier que le moment cinétique se conserve ?
  - Appliquer le TMC au système par rapport à  $O$ , le centre de force.
  - Calculer le moment de la force centrale :  $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$  et justifier qu'il est nul en utilisant la nature centrale de la force.
  - En déduire que  $\overrightarrow{L}_O(M/\mathcal{R})$  se conserve.
- Comment justifier que le mouvement est plan ?
  - Écrire la définition du moment cinétique d'un point matériel :  $\overrightarrow{L}_O(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R})$ .
  - Utiliser la propriété du produit vectoriel :  $\overrightarrow{L}_O(M/\mathcal{R}) \perp \overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{L}_O(M/\mathcal{R}) \perp \vec{v}(M/\mathcal{R})$ .
  - Conclure que  $\overrightarrow{OM}$  et  $\vec{v}(M/\mathcal{R})$  sont contenus, à tout instant, dans le plan perpendiculaire à  $\overrightarrow{L}_O(M/\mathcal{R})$ , et donc que le mouvement est plan.
- Comment justifier la loi des aires ?
  - Exprimer  $\overrightarrow{OM}$  et  $\vec{v}(M/\mathcal{R})$  en utilisant les coordonnées polaires dans le plan du mouvement.
  - En déduire l'expression de  $\overrightarrow{L}_O(M/\mathcal{R})$ .
  - Conclure que la conservation de  $\overrightarrow{L}_O(M/\mathcal{R})$  impose à  $r^2\dot{\theta}$  d'être constant.

### I.3 Conservation de l'énergie mécanique

#### I.3.a) Forces centrales conservatives

On étudie plus spécifiquement les forces centrales qui sont en plus conservatives.  
Pour ces forces, on peut identifier une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$  telle que :

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_p)$$

La force étant centrale,  $\vec{f} = f_r(r, \theta, z)\vec{u}_r$

La démarche ci-dessous, réalisée en coordonnées cylindriques (mieux adaptée à notre étude), peut l'être en coordonnées sphériques.

Ainsi :

$$f_r(r, \theta, z)\vec{u}_r = -\left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial r}\right)_{\theta, z} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial \theta}\right)_{r, z} \vec{u}_\theta - \left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z}\right)_{r, \theta} \vec{u}_z$$

$$\text{soit, en projection : } f_r(r, \theta, z) = -\left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial r}\right)_{\theta, z}$$

$$0 = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial \theta}\right)_{r, z}$$

$$0 = -\left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z}\right)_{r, \theta}$$

On en déduit que l'énergie potentielle associée à une force centrale conservative ne dépend pas de  $\theta$  ni de  $z$ , mais uniquement de la distance  $r$  entre le centre de force  $O$  et le point matériel  $M(m)$ . Compte tenu du fait que  $\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_p)$ , on en déduit que la force elle-même ne dépend pas de  $\theta$  ni de  $z$ , mais uniquement de la distance  $r$ .

#### Définition : Force centrale conservative

Les forces centrales conservatives sont telles que :

$$\vec{f} = f_r(r)\vec{u}_r$$

et dérivent d'une énergie potentielle

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(r)$$

#### À retenir : Énergies potentielles Newtoniennes

Les forces Newtoniennes (en  $1/r^2$ ) sont des forces centrales et conservatives.

**Force de gravitation entre deux masses ponctuelles**  $\{(O, m_O); (M, m)\}$

Force exercée par  $O(m_O)$  sur  $M(m)$  :

$$\overrightarrow{F_{O \rightarrow M}} = -G \frac{m_O m}{r^2} \vec{u}_r$$

**Force électrostatique entre deux charges ponctuelles**  $\{(O, q_O); (M, q)\}$

Force exercée par  $O(q_O)$  sur  $M(q)$  :

$$\overrightarrow{F_{O \rightarrow M}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_O q}{r^2} \vec{u}_r$$

**Énergie potentielle gravitationnelle**

$$\mathcal{E}_{p, \text{grav}}(r) = -\frac{G m_O m}{r}$$

**Énergie potentielle électrostatique**

$$\mathcal{E}_{p, \text{elec}}(r) = \frac{q_O q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

### I.3.b) Énergie potentielle effective

**Capacité exigible :** Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.

#### 💡 Méthode : Comment exprimer l'énergie potentielle effective ?

- Exprimer le vecteur vitesse en polaire, calculer sa norme, et en déduire l'énergie cinétique.
- Exprimer  $\dot{\theta}$  en fonction de la constante des aires  $\mathcal{C}$  et le remplacer dans l'expression de  $\mathcal{E}_c$ .
- Exprimer l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$  en utilisant l'expression précédente de  $\mathcal{E}_c$ .
- Identifier  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$  comme étant la partie de  $\mathcal{E}_m$  dépendant de  $r$ .

#### 🔧 À maîtriser : Exprimer l'énergie potentielle effective

- Q1. Que peut-on dire de l'énergie mécanique ?
- Q2. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique dans le système de coordonnées adapté à l'étude.  
En utilisant la constante des aires, éliminer  $\dot{\theta}$ .
- Q3. Exprimer l'énergie mécanique et l'écrire sous la forme  $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ , avec  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$  l'**énergie potentielle effective** à exprimer en fonction de  $\mathcal{E}_p(r)$ ,  $m$ ,  $r$  et  $\mathcal{C}$  et qui ne dépend que de  $r$  (notamment pas de  $\theta$ , ni de  $\dot{\theta}$ ).

#### ♥ À retenir

L'énergie mécanique d'un système soumis à une force centrale conservative peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$$

avec  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$  l'**énergie potentielle effective** qui ne dépend que de la distance  $r$  entre le centre de force et  $M$ , et des constantes du problème ( $m$ ,  $\mathcal{C}$ , ...).

### I.3.c) Description du mouvement radial

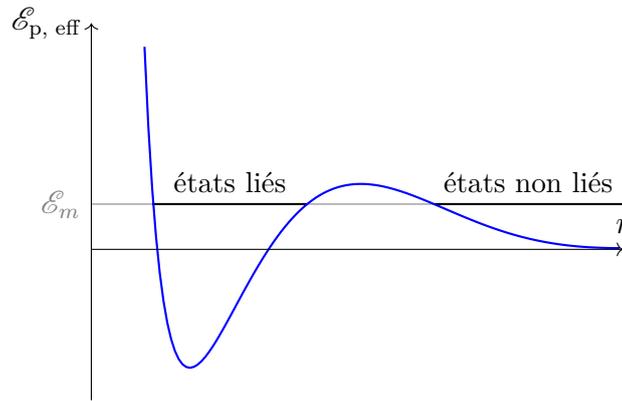
**Capacité exigible :** Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique.

#### 💡 Méthode : Comment décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective ?

- Étudier l'énergie potentielle effective en fonction de  $r$  et tracer son graphe.
- Représenter sur le même graphe la droite horizontale représentant l'énergie mécanique (selon sa valeur, et notamment son signe).
- Les valeurs permises de  $r$  sont telles que  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \leq \mathcal{E}_m$ .
- Conclure sur la nature du mouvement.

#### 📖 Définitions : trajectoire bornée ou non ; état lié/état de diffusion

- Lorsque  $r$  est encadré entre deux valeurs extrêmes, la trajectoire est bornée. Le système se trouve dans un **état lié**.
- Lorsque  $r$  n'a pas de borne maximale, la trajectoire n'est pas bornée. Le système se trouve dans un **état de diffusion**.



### ⚠ Attention

L'étude de  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$  ne permet d'étudier que le mouvement radial, c'est-à-dire d'étudier les positions radiales accessibles au système étudié. Cette étude ne permet pas d'étudier l'évolution de  $\theta$  au cours du temps, ni de connaître l'évolution de  $r$  en fonction de  $\theta$ . Ces études nécessitent la résolution de l'équation différentielle du mouvement hors programme.

## I.4 Mouvements dans un champ de force Newtonien

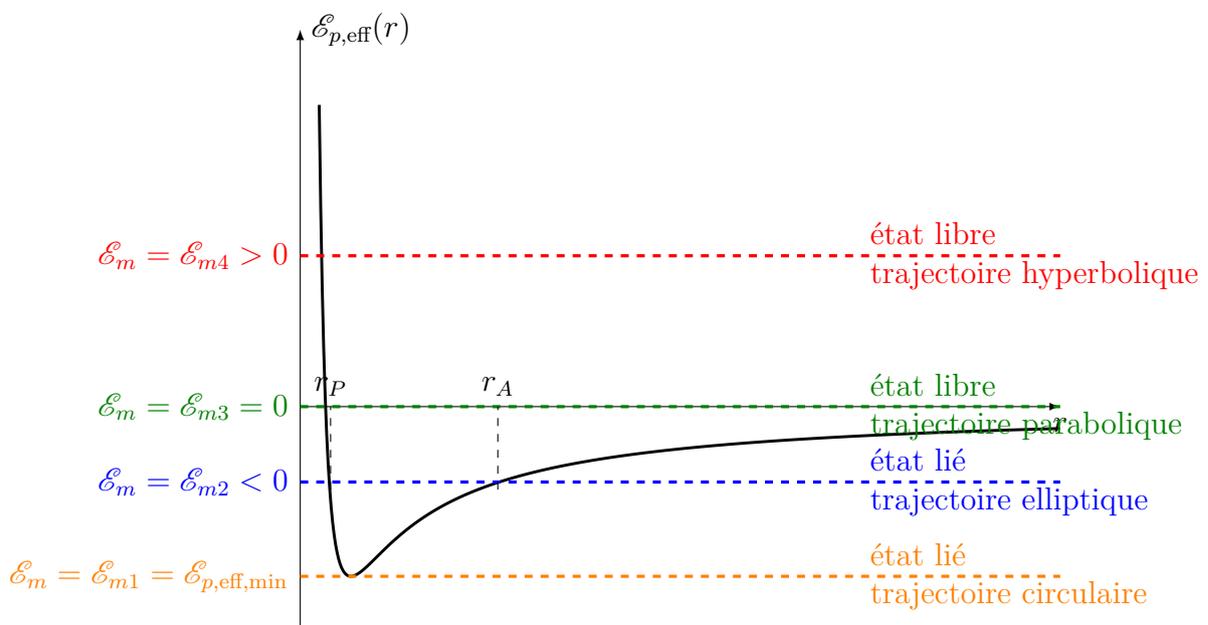
**Capacité exigible :** Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné du mouvement à la valeur de l'énergie mécanique.

### I.4.a) Interaction newtonienne attractive

#### 🔪 À maîtriser : Trajectoires dans le cas d'une interaction newtonienne attractive

On s'intéresse à l'étude du mouvement d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  (ou du centre d'une planète/d'un satellite) en interaction gravitationnelle avec un astre de centre  $O$  et de masse  $m_O$ . On se place dans le référentiel galiléen dans lequel  $O$  est fixe.

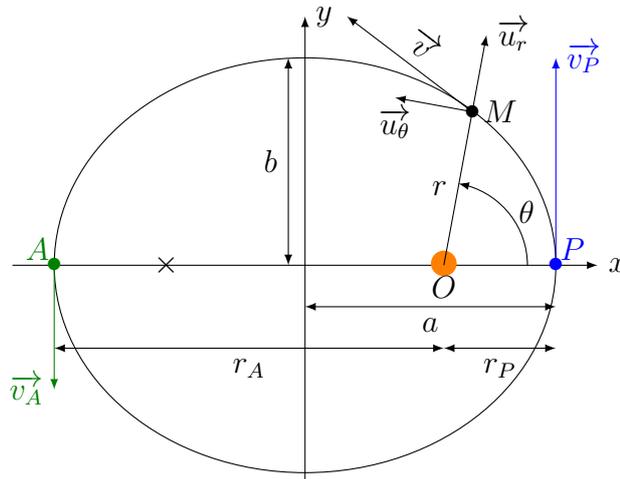
- Q1. Établir l'expression de l'énergie potentielle effective.
- Q2. Mener l'étude de la fonction  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}} : r \mapsto \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$  (limites, variations, extremum).
- Q3. Tracer l'allure de  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ .
- Q4. Compte tenu de l'expression de  $\mathcal{E}_m$  trouvée précédemment, quelle inégalité existe-t-il entre  $\mathcal{E}_m$  et  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ ? Comment peut-on déterminer les distances  $r$  pouvant séparer  $M$  du centre de force  $O$ ?
- Q5. Décrire les mouvements possibles selon la valeur de l'énergie mécanique et préciser s'il s'agit d'« état lié » ou d'« état de diffusion », dans les différents cas :  $\mathcal{E}_m > 0$ ;  $\mathcal{E}_m = 0$ ;  $\mathcal{E}_m < 0$  et  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,\text{eff},\text{min}}$ .



- Si  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m1} = \mathcal{E}_{p,eff,min}$ , la seule distance radiale qui vérifie  $\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{p,eff}$  est  $r_0$ .  
Le système doit donc se trouver à chaque instant à la distance  $r_0$  du centre de force. Par conséquent le mouvement est circulaire de rayon  $r_0$ .
- Si  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m2} < 0$  : la distance entre le système et le centre de force doit être comprise entre  $r_P$  et  $r_A$ .

Le point  $M$  peut s'approcher à une distance minimale de  $r_P$  et peut s'éloigner au plus loin à la distance  $r_A$  du centre de force : c'est un **état lié**.

$M$  décrit une trajectoire elliptique dont le centre de force est un des foyers de l'ellipse : c'est la 1<sup>re</sup> loi de Kepler !



Aux points  $P$  (périhélie pour les planètes autour du soleil, périégée pour les satellites de la terre) et  $A$  (aphélie pour les planètes autour du soleil, apogée pour les satellites de la terre),  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,eff}(r)$ , donc  $\dot{r} = 0$ . En ces points, le vecteur vitesse est orthoradial, porté uniquement par  $\vec{u}_\theta$ .

- Si  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m3} = 0$  :  $r \in [r_3, +\infty[$ .  
Le point  $M$  peut s'approcher jusqu'à la distance  $r_3$  du centre de force et peut se retrouver à une distance très grande du centre de force.  $M$  peut donc s'échapper de l'attraction exercée par la Terre : c'est un **état de diffusion**.

$M$  décrit une trajectoire parabolique.

- Si  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m4} > 0$  :  $r \in [r_4, +\infty[$ , le point  $M$  peut se retrouver à une distance très grande du centre de force.  $M$  peut donc s'échapper de l'attraction exercée par la Terre : c'est un **état de diffusion**.

$M$  décrit une trajectoire hyperbolique : la branche attractive de l'hyperbole (celle qui tourne autour du centre de force).

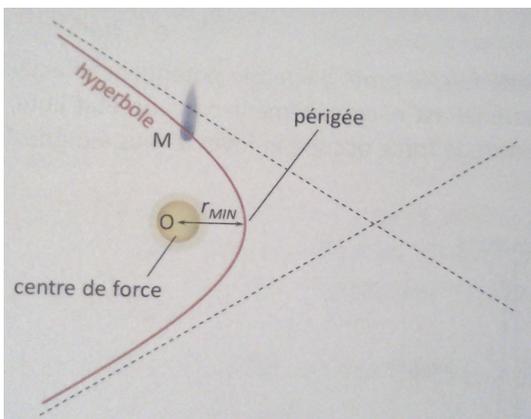


FIGURE 4 – Si son énergie mécanique est positive, le système soumis à une force newtonienne attractive décrit une branche d'hyperbole dont le centre de force occupe le foyer le plus proche.

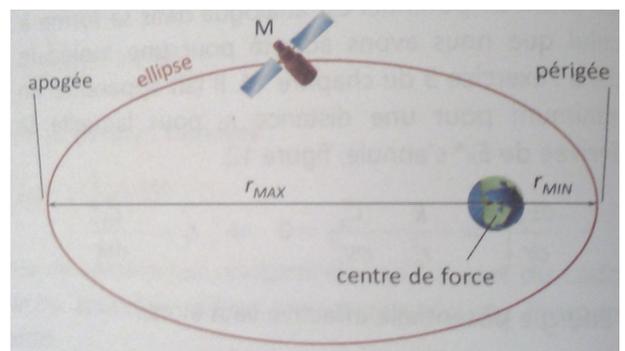


FIGURE 5 – Si son énergie mécanique est négative, le système soumis à une force newtonienne attractive décrit une ellipse dont le centre de force occupe l'un des foyers.

Des conclusions similaires peuvent être établies si on étudie le mouvement d'une particule chargée soumise à une interaction électrostatique attractive ( $q_0q < 0$ ).

#### 1.4.b) Interaction newtonienne répulsive

### À maîtriser : Trajectoires dans le cas d'une interaction newtonienne répulsive

On s'intéresse à l'étude du mouvement d'une particule chargée  $M$  de masse  $m$  et de charge  $q$  en interaction coulombienne avec une particule chargée placée en  $O$ , de masse  $m_O \gg m$  et de charge  $q_0$ . On se place dans le référentiel dans lequel  $O$  est fixe. On étudie le cas de l'interaction répulsive ( $qq_0 > 0$ ).

- Q1. Établir l'expression de l'énergie potentielle effective.
- Q2. Mener l'étude de la fonction  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}} : r \mapsto \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$  (limites, variations, extremum) lorsque  $qq_0 > 0$ .
- Q3. Tracer l'allure de  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ .
- Q4. Quelle est la nature de la trajectoire possible pour la particule chargée  $M$  ? Peut-elle avoir une trajectoire bornée ?

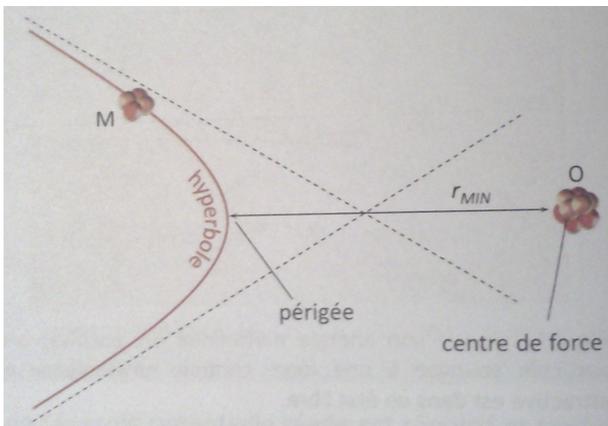


FIGURE 6 – Une particule chargée en interaction coulombienne répulsive décrit la branche répulsive de l'hyperbole, celle qui n'entoure pas le centre de force.

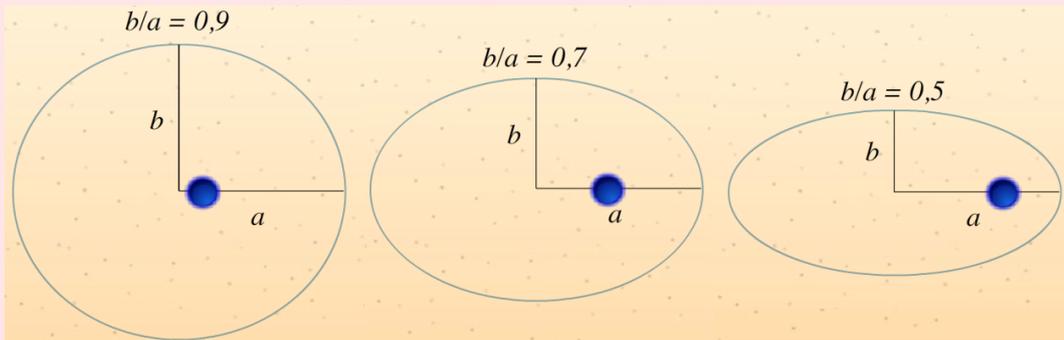
## II Lois de Kepler

Dans les années 1610-1620, donc bien avant les Principia de Newton (1687), Kepler énonce ses célèbres lois, qui portent maintenant son nom, à partir des observations et mesures de la position des planètes faites par Tycho Brahé, dont il était l'assistant.

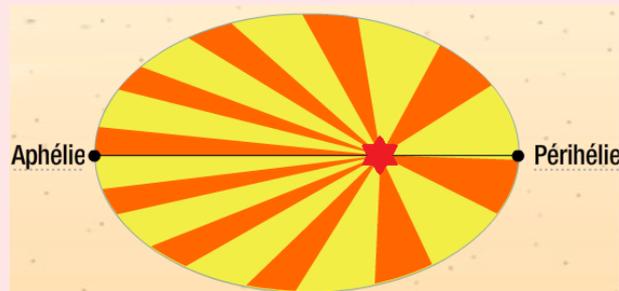
**Capacité exigible : Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.**

### ♥ À retenir : Lois de Kepler

**1<sup>ère</sup> loi de Kepler (1609)** Les planètes du système solaire décrivent une orbite elliptique dont le soleil est l'un des foyers.



**2<sup>ème</sup> loi de Kepler (1609)** Les aires balayées par la ligne Soleil-planète pendant des intervalles de temps égaux sont égales.



Ainsi, les planètes vont plus vite au niveau du périhélie (point de la trajectoire le plus proche du Soleil) qu'au niveau de l'aphélie (point de la trajectoire le plus éloigné du Soleil).

**3<sup>ème</sup> loi de Kepler (1619)** Le carré de la période de révolution d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse qu'elle décrit :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

Ce sont des **lois basées uniquement sur l'observation** : Kepler n'a pas établi de théorie à partir de ces observations. Il écrivit : « C'est comme si une force émane du Soleil ». Il étudia alors la piste d'une force magnétique, sans succès... Sur ces bases, à partir de la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler, Newton développa sa théorie sur la gravitation. Ce n'est que bien plus tard, en 1687, que Newton formule la loi de la gravitation ainsi que les trois principes célèbres que nous avons vues dans le chapitre 13.

Ces lois se transposent sans difficultés au cas des satellites terrestres :

1. Les satellites de la Terre décrivent une orbite elliptique dont la Terre est l'un des foyers.
2. Les aires balayées par la ligne Terre-satellite pendant des intervalles de temps égaux sont égales.
3. Le carré de la période de révolution d'un satellite autour de la Terre est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse qu'elle décrit, soit :  $\frac{T^2}{a^3} = \text{constante} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

## III Application à l'étude des mouvements des planètes ou des satellites

### III.1 Mouvements circulaires

#### Méthode : Étude d'un mouvement circulaire

##### ■ Comment justifier que le mouvement circulaire est nécessairement uniforme ?

- Exprimer le vecteur vitesse sur un mouvement circulaire en utilisant les coordonnées polaires.
- Éliminer  $\dot{\theta}$  dans l'expression de  $\vec{v}$  en introduisant la constante des aires  $\mathcal{C}$ .
- Conclure sur l'évolution de  $\|\vec{v}\|$ .

##### ■ Comment déterminer l'expression de la vitesse du système ?

- Écrire le vecteur accélération sur un mouvement circulaire uniforme en utilisant les coordonnées polaires.
- Appliquer le PFD en utilisant les coordonnées polaires et projeter l'équation du mouvement sur le vecteur unitaire  $\vec{u}_r$ .
- Conclure sur l'expression de  $v$ .

##### ■ Comment déterminer l'expression de la période de révolution du système ?

- La période de révolution du système s'écrit  $T = \frac{2\pi r}{v}$  puisque le mouvement est uniforme.
- Réutiliser l'expression précédente de la vitesse  $v$  et conclure sur l'expression de  $T$ .

##### ■ Comment déterminer l'expression de l'énergie mécanique du système ?

- Exprimer  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p(r)$  et remplacer  $v$  par l'expression obtenue précédemment.
- Conclure sur l'expression de  $\mathcal{E}_m$  en fonction de  $r$ .

#### III.1.a) Mouvements uniformes

**Capacités exigibles** : Montrer que le mouvement circulaire d'un point soumis à une force centrale est uniforme.

#### À maîtriser : Mouvement circulaire uniforme

En partant de la loi des aires, justifier qu'un mouvement circulaire dans un champ de force centrale est nécessairement uniforme.

#### III.1.b) Période

**Capacités exigibles** : Savoir calculer sa période. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire.

#### À maîtriser : Période et 3<sup>e</sup> loi de Kepler

On étudie le cas d'un satellite autour d'une planète, ou d'une planète autour d'une étoile. On se place dans le référentiel lié au centre de force, supposé galiléen à l'échelle du mouvement.

- Q1. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, établir l'expression de la norme du vecteur vitesse sur le mouvement circulaire.
- Q2. Sachant que le mouvement est uniforme, établir l'expression de la période du mouvement (durée mise par  $M$  pour faire un tour autour du centre de force). Retrouver la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler.

### III.1.c) Énergie mécanique

**Capacités exigibles** : Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire.

#### À maîtriser : Énergie mécanique sur un mouvement circulaire

Établir l'expression de l'énergie mécanique de  $M$  en mouvement circulaire autour du centre de force  $O$ .

#### À retenir : Énergie mécanique sur une trajectoire circulaire

L'énergie mécanique d'un corps de masse  $m$  en interaction gravitationnelle avec un corps de masse  $m_O$  et en mouvement circulaire de rayon  $R$  s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{Gmm_O}{2R}$$

### Exercice de cours A ISS

On peut lire dans la presse que l'ISS décrit 15,5 orbites par jour.

- Q1. Déterminer la période du mouvement de l'ISS.
- Q2. Déterminer l'altitude de l'ISS.
- Q3. Déterminer la vitesse de l'ISS.
- Q4. Déterminer l'énergie mécanique de l'ISS de masse  $m = 490$  t.



### III.1.d) Première vitesse cosmique

**Capacité exigible** : Exprimer les vitesses cosmiques (vitesse en orbite basse et vitesse de libération) et connaître leur ordre de grandeur en dynamique terrestre.

#### Définition : Vitesse en orbite basse

La **première vitesse cosmique** notée  $v_{c1}$ , est la **vitesse en orbite basse**, c'est-à-dire la vitesse d'un objet satellisé en mouvement circulaire autour d'un astre à une altitude très petite devant le rayon de l'astre.

#### À maîtriser : Établir la vitesse sur l'orbite basse

- Q1. Établir l'expression de la première vitesse cosmique.
- Q2. Faire l'application numérique pour la Terre.

### III.1.e) Satellites géostationnaires

**Capacité exigible :** Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.

#### Définition : Satellite géostationnaire

Un **satellite géostationnaire** est un satellite qui reste constamment au-dessus d'un même point de la surface terrestre. Un satellite géostationnaire est donc immobile par rapport à un observateur immobile de la Terre.

#### À maîtriser : Caractéristiques du mouvement des satellites géostationnaires

##### Plan du mouvement.

- Q1. Justifier que le plan du mouvement d'un satellite géostationnaire est nécessairement celui du plan équatorial.
- Q2. Quelle est la période d'un satellite géostationnaire ?

##### Altitude du satellite

- Q3. En utilisant la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler, déterminer l'altitude à laquelle doit nécessairement se trouver le satellite géostationnaire.

#### REMARQUES

Nous avons dit que la Terre faisait un tour sur elle-même en 24 h, ce n'est pas exact.

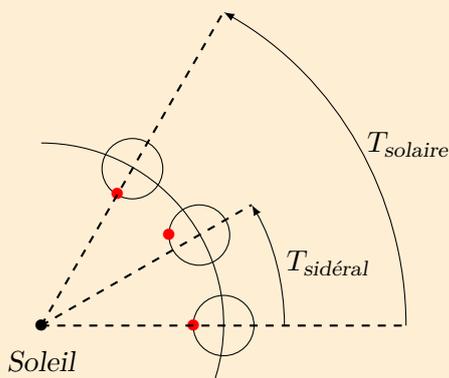
La durée de 24 h correspond en fait à un **jour solaire**, qui est la **durée entre deux passages du soleil au zénith**.

La période des satellites géostationnaires doit être égale à la durée que met la Terre à **faire un tour sur elle-même**, c'est ce qu'on appelle le **jour sidéral**, qui est plus petit qu'un jour solaire :

$$T_{\text{sidéral}} = 23\text{h}56\text{min}4\text{s}.$$

En effet, du fait que la Terre effectue une révolution complète autour du soleil en 365,25 jours, en un jour solaire, la Terre fait un peu plus d'un tour complet sur elle-même : elle effectue un tour complet

$$T_{\text{solaire}} = T_{\text{sidéral}} + \frac{1}{365,25} \text{ ième de tour.}$$



Plus de 300 satellites sont sur l'orbite géostationnaire. Ces satellites relèvent de différents types, on peut citer par exemple : les satellites de télécommunications de type diffusion (télévision, radio) ou de diffusion militaire, les satellites météorologiques, les satellites servant de relais pour les activités spatiales ...

L'orbite géostationnaire est relativement encombrée et la position des satellites géostationnaires est gérée par l'Union internationale des télécommunications. Lorsqu'un satellite géostationnaire n'est plus actif il doit être placé sur une orbite de rebut, ou « orbite poubelle », située à une altitude au minimum supérieure de 230 km, pour qu'un autre satellite puisse éventuellement occuper sa place.

### III.1.f) Quelles orbites ?

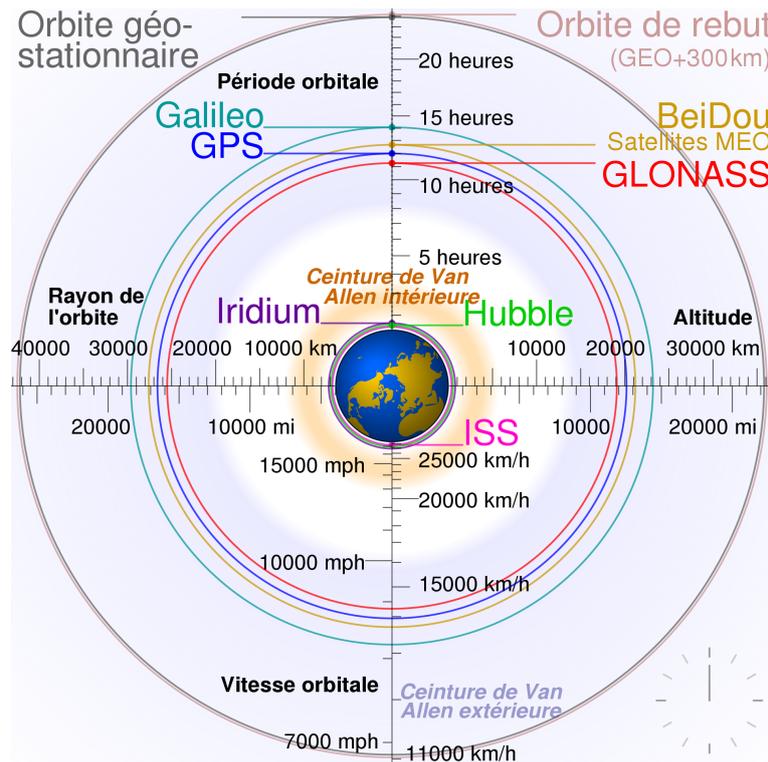


FIGURE 7 – Schéma à l'échelle montrant la Terre, les principales orbites (orbites basse, moyenne et géostationnaire) utilisées par les satellites, les vitesses et les périodes orbitales à différentes altitudes ainsi que la position de quelques satellites ou constellations de satellites remarquables : GPS, GLONASS, Galileo and Compass, Station spatiale internationale, télescope Hubble et la constellation Iridium (Par cmglee - Travail personnel, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=16891766>)

#### **Capacité exigible : Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions.**

Les orbites des satellites terrestres peuvent avoir de nombreuses formes et orientations : certaines sont circulaires ou au contraire en forme d'ellipse très allongée. Elles peuvent se situer à basse altitude juste au-dessus de l'atmosphère terrestre (250 km) ou dépasser 30 000 km. L'orbite d'un satellite artificiel est choisie pour répondre au mieux aux besoins de la mission. La plupart des satellites utilisent un des quatre types d'orbite suivants :

- **l'orbite géostationnaire** est une orbite circulaire située dans le plan de l'équateur à une altitude de 35 786 km du sol.  
 À cette altitude la période de révolution du satellite correspond exactement à la période de rotation de la Terre, soit 23 heures, 56 minutes et 4 secondes.  
 Vu de la Terre, un satellite géostationnaire semble immobile dans le ciel : c'est l'orbite parfaite pour les **satellites de télécommunications** et pour certains **satellites d'observation (météo)** qui doivent couvrir une zone fixe.
- **l'orbite polaire** est une **orbite circulaire basse** (par convention entre 300 et 1 000 km d'altitude) dont l'inclinaison, proche de 90° par rapport au plan de l'équateur, la fait passer au-dessus ou près des pôles.  
 Un satellite situé sur une orbite polaire passe régulièrement au-dessus de tous les points de la surface grâce à la rotation de la Terre.  
 Les orbites polaires sont généralement des orbites héliosynchrones : ce type d'orbite conserve un angle constant avec la direction Terre-Soleil c'est-à-dire que le plan d'orbite tourne de 360° par an.  
 Les orbites héliosynchrones permettent de passer toujours à la même heure solaire locale au-dessus d'un lieu donné : l'éclairage identique des prises de photo du lieu permet de faire ressortir les changements. Cette caractéristique en fait une orbite idéale pour des **satellites d'observation de la Terre**.
- **l'orbite basse** se situe juste au-dessus de l'atmosphère terrestre à une altitude où la traînée ne freine pas trop la vitesse du satellite (par convention l'orbite basse se situe à une altitude inférieure à 2 000 km).

Elle est utilisée par les **satellites scientifiques** qui explorent l'espace lointain. Le **télescope Hubble**, par exemple se situe sur une orbite de 610 km. On trouve également sur ce type d'orbite les **satellites de radioamateur** et les constellations de **téléphonie mobile** ou de télédétection terrestre.

- l'**orbite moyenne** culmine généralement à une altitude de 20 000 km avec une période de 12 heures. L'orbite située en dehors de l'atmosphère terrestre est très stable. Les signaux envoyés par le satellite peuvent être reçus sur une grande partie de la surface du globe terrestre. C'est l'altitude retenue pour les **satellites de navigation comme le système GPS**.

Un peu plus bas, à 8 063 km, est prévue la constellation de satellites O3b pour la distribution d'Internet ;

- l'**orbite haute** a un apogée qui se situe à une altitude supérieure à l'orbite géostationnaire. La **Russie** utilise ce type d'orbite pour certains de ses **satellites de télécommunications**. L'orbite de Molnia permet une couverture 24 h sur 24 du territoire de la Russie avec une constellation de trois satellites. Cette orbite est utilisée car la Russie ne peut lancer de satellites géostationnaires depuis ses bases spatiales toutes situées à des latitudes trop élevées et les satellites géostationnaires ne peuvent pas couvrir la fraction du territoire russe située à une latitude supérieure à 81° ;

### III.2 Mouvements elliptiques

#### III.2.a) Description

Une **ellipse** est une courbe plane qui peut être décrite par plusieurs équations (équivalentes) :

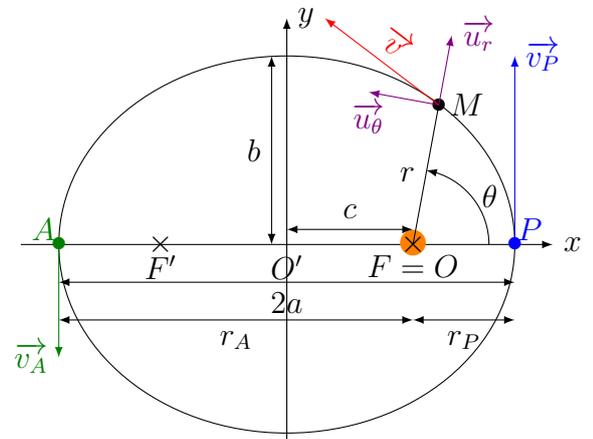
Équation cartésienne dans le plan  $(O'xy)$  :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , avec  $a$  le demi-grand axe et  $b$  le demi petit axe.

Équation paramétrique dans le plan  $(O'xy)$  :  $\begin{cases} x(t) = a \cos(\omega t) \\ y(t) = b \sin(\omega t) \end{cases}$

Équation polaire  $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$  avec  $p$  le paramètre de l'ellipse

et  $e = \frac{c}{a}$  l'excentricité.

Une ellipse possède deux foyers  $F$  et  $F'$ , tels que  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ .



#### 📖 Définitions

Le point de la trajectoire le plus éloigné du centre de force  $O$  est appelé l'**aphélie** si  $O$  est le soleil, l'**apogée** si  $O$  est la Terre, ...

Le point de la trajectoire le plus proche du centre de force  $O$  est appelé le **périhélie** si  $O$  est le soleil, le **périgée** si  $O$  est la Terre, ...

Rq : pour les autres planètes ou astres, d'autres noms ont été donnés :

#### III.2.b) Période du mouvement elliptique

**Capacité exigible :** Exploiter sans démonstration la généralisation de la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler au cas d'une trajectoire elliptique.

#### ♥️ À retenir : 3<sup>e</sup> loi de Kepler pour le mouvement elliptique

Pour tout corps en mouvement elliptique autour du centre de force  $O$  de masse  $m_O$ , le rapport de la période  $T$  sur le demi-grand axe  $a$  du mouvement elliptique de  $M$ ,  $\frac{T^2}{a^3}$ , est une constante qui ne dépend que de la masse du centre de force :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_O}$$

La démonstration de la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler dans le cas d'un mouvement elliptique est hors programme, et nous admettons donc la généralisation de ce qui a été montré pour un mouvement circulaire, en remplaçant le rayon du cercle par le demi-grand axe de l'ellipse.

### III.2.c) Énergie mécanique sur le mouvement elliptique

**Capacités exigibles** : Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.

#### ✂ À maîtriser : Exprimer l'énergie mécanique sur un mouvement elliptique

**Objectif** : établir l'expression de l'énergie mécanique dans le cas d'un mouvement elliptique en fonction, notamment, du demi-grand axe  $a$ .

Le demi-grand axe est relié au rayon au périhélie  $r_P$  et au rayon à l'aphélie  $r_A$  par :  $r_A + r_P = 2a$ .

Nous allons exprimer  $r_A$  et  $r_P$  en fonction de  $\mathcal{E}_m$ , en utilisant les deux lois de conservation dans un mouvement à force centrale : conservation de l'énergie mécanique et du moment cinétique.

#### Q1. Conservation du moment cinétique.

Quelle est la particularité du vecteur vitesse à l'apogée et au périhélie ?

En déduire la norme du vecteur vitesse en fonction de la constante des aires  $\mathcal{C}$  et du rayon  $r$ , au périhélie et à l'apogée.

#### Q2. Conservation de l'énergie mécanique

Exprimer l'énergie mécanique à l'apogée et au périhélie.

**Résolution** : détermination de  $r_A$  et  $r_P$  en fonction de  $\mathcal{E}_m$ .

Q3. En déduire que  $r_A$  et  $r_P$  sont les deux racines d'une équation du deuxième degré, que l'on déterminera.

Q4. En déduire les expressions de  $r_A$  et  $r_P$  en fonction de  $\mathcal{E}_m$ , des masses et de  $\mathcal{C}$ .

#### Conclusion

Q5. En déduire l'expression du demi-grand axe  $a$  en fonction de  $G$ ,  $m_O$ ,  $m$  et  $\mathcal{E}_m$ .

En déduire l'expression de l'énergie mécanique.

#### ♥ À retenir : Énergie mécanique sur la trajectoire elliptique

L'énergie mécanique d'un corps de masse  $m$  en interaction gravitationnelle avec un corps de masse  $m_O$  et en mouvement elliptique de demi-grand axe  $a$  s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{Gmm_O}{2a}$$

#### Exercice de cours B ISS

La trajectoire de l'ISS est en réalité elliptique, son altitude variant entre 330 km et 420 km.

Q1. Déterminer le demi-grand axe de la trajectoire de l'ISS.

Q2. Déterminer la période de l'ISS.

Q3. Déterminer l'énergie mécanique de l'ISS.

Q4. Exprimer la norme  $v$  de la vitesse de l'ISS en un point quelconque de la trajectoire elliptique en fonction de  $m$ ,  $M_T$ ,  $G$ ,  $r$  et  $a$ . Comment évolue-t-elle avec le rayon  $r$  ?

Q5. Déterminer les vitesses minimale et maximale de l'ISS.

### III.3 Vitesse de libération

#### Définition : Vitesse de libération

La **deuxième vitesse cosmique** ou **vitesse de libération** est la vitesse minimale à communiquer à un objet situé initialement à la surface de la planète pour qu'il puisse échapper à l'attraction de la planète, autrement dit pour qu'il puisse partir de la planète et s'en éloigner à l'infini.

#### À maîtriser : Établir la vitesse de libération

- Q1. Quelle est la valeur minimale de l'énergie mécanique pour que le système quitte l'attraction de l'astre ?  
Quelle est alors la trajectoire de l'objet ?
- Q2. En déduire l'expression de la vitesse de libération.
- Q3. Faire l'application numérique pour la Terre.

#### À retenir : OdG des vitesses cosmiques pour la Terre

- 1<sup>ère</sup> vitesse cosmique (**vitesse en orbite basse**) :  $v_{c1} = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
- 2<sup>ème</sup> vitesse cosmique (**vitesse de libération**) :  $v_{c2} = 11 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

#### REMARQUES

Pour qu'un véhicule spatial se place sur une orbite terrestre, il est nécessaire de lui communiquer une vitesse minimale. Cette vitesse de satellisation minimale est d'environ 7,9 km/s pour un satellite sur une orbite circulaire à 200 kilomètres d'altitude (il s'agit d'une vitesse horizontale, un objet lancé verticalement à cette vitesse ou à une vitesse supérieure retomberait sur Terre).

 Si la vitesse horizontale est inférieure à 7,9 km/s l'engin décrit une parabole plus ou moins longue selon la vitesse avant de revenir sur Terre. Si la vitesse est supérieure à la vitesse de libération (11,2 km/s soit 40 320 km/h) sa trajectoire décrit une hyperbole et il quitte l'orbite terrestre pour se placer une orbite héliocentrique (autour du Soleil).

## IV Résolution numérique

**Capacité exigible :** À l'aide d'un langage de programmation, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.

On étudie le mouvement d'un objet de masse  $m$ , initialement situé à une altitude  $h$  au-dessus du sol terrestre, en mouvement circulaire.

L'objectif est de déterminer la trajectoire ultérieure selon la vitesse qu'on lui impose.

Q1. On commence par importer les modules nécessaires, et par définir les constantes du programme.

Compléter les expressions des grandeurs utiles.

```

1 ## Modules nécessaires
2 from math import *
3 import scipy.integrate as sci # résolution numérique
4 import numpy as np # manipulations des tableaux
5 import matplotlib.pyplot as plt # tracé des graphiques
6 ## Constantes du problème
7 G=6.67429e-11 # usi , constante universelle de la gravitation
8 MT=5.97e24 # masse de la Terre en kg
9 RT=6370e3 # rayon de la Terre en m
10 m=1000 # masse du satellite en kg
11 # orbite initiale du satellite
12 h=400e3 # altitude en m
13 r0=          # (à compléter) rayon de la
    trajectoire en m
14 vcirc=       # (à compléter) vitesse sur la
    trajectoire circulaire à l'altitude h (cf §III.2)
15 T=          # (à compléter) période sur la
    trajectoire circulaire initiale

```

Q2. On souhaite déterminer le mouvement ultérieur pour différentes valeurs de la vitesse modifiée  $v_0 : v_0 = kv_{\text{circ}}$ , avec  $k \in \{0.25, 0.4, 0.8, \sqrt{2}, 2, 3\}$

```

1 # liste des valeurs de vitesse initiale pour lesquelles on va résoudre l'
    équation différentielle
2 L_v0=          # (à compléter)

```

Q3. Définir les fonctions  $E_m(r, r_0, v_0)$  et  $E_{\text{eff}}(r, r_0, v_0)$  qui renvoient les valeurs de l'énergie mécanique et de l'énergie potentielle effective en  $r$ , pour les conditions initiales  $r_0$  et  $v_0$ .

```

1 def Em(r, r0, v0):
2     return
3
4 def Eeff(r, r0, v0):
5     Lo=
6     return

```

Q4. Compléter les lignes ci-dessous pour réaliser le tracé des énergies mécanique et potentielle effective.

```

1 r=          # (à compléter) : tableau des valeurs
    de r pour le tracé entre 0.001RT et 4r0, pour 1000 points
2 for v0 in L_v0:
3     plt.plot(r, Eeff(r, r0, v0)) # Tracé de Eeff
4     plt.plot([0, 4*r0], [Em(r0, v0), Em(r0, v0)]) # Tracé de Em, constante
    égale à Em(r0, v0)
5 plt.ylabel('Energies (J)')
6 plt.xlabel('r (m)')
7 plt.show()

```

On cherche à représenter la trajectoire  $r(\theta)$  selon les valeurs de  $v_0$ . Pour cela, on utilise les deux lois de conservation :

- conservation du moment cinétique qui donne :  $\dot{\theta}(t) = \frac{L_0}{mr^2(t)}$
- conservation de l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \right) &= 0 \\ m\ddot{r}\dot{r} + \frac{d\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)}{dt} &= 0 \\ m\ddot{r}\dot{r} + \frac{d\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)}{dr} \times \frac{dr}{dt} &= 0 \\ m\ddot{r} + \frac{d\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)}{dr} &= 0 \\ \frac{d^2r}{dr^2}(t) &= -\frac{1}{m} \frac{d\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)}{dr}(r(t)) \end{aligned}$$

On obtient le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \frac{L_0}{mr^2(t)} \\ \frac{d^2r}{dr^2}(t) = -\frac{1}{m} \frac{d\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)}{dr}(r(t)) \end{cases}$$

Q5. Exprimer la dérivée de l'énergie potentielle effective par rapport à  $r$ , et écrire la fonction en python.

```
1 ## Résolution
2 def dEpeff(r, r0, v0):
3     Lo=
4     return
```

L'équation différentielle sera résolue numériquement en utilisant la fonction `solve_ivp` qui permet de résoudre des équations différentielles de la forme  $\frac{dX}{dt} = f(t, X)$ .

Il faut commencer par mettre le système précédent sous la forme d'un système d'équations du premier ordre en posant  $X = \begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$

Q6. Exprimer  $\frac{dX}{dt}$ . Puis écrire la fonction `f_equa(t,X)` qui définit l'équation différentielle :  $\frac{dX}{dt} = f(t, X)$ , c'est-à-dire qui renvoie la liste  $\frac{dX}{dt}$ .

```
1 def f_equa(t, X):
2     """
3     définition du système d'équations différentielles du 1er ordre
4     pouvant être résolue par solve_ivp
5     dX/dt=f_equa(t,X)
6     avec X=(r,dr/dt,theta)
7     f_equa(t,X)=(dr/dt,d^2r/dt^2,dtheta/dt)
8     """
9     fX0=
10    fX1=
11    fX2=
12    return [fX0, fX1, fX2]
```

Q7. La résolution numérique se fait en utilisant la fonction `solve_ivp` du module `scipy.integrate` qui attend les arguments suivants :

- la fonction  $f$  définissant l'équation différentielle :  $\frac{dX}{dt} = f(t, X)$  ;
- un 2-uplet de l'intervalle de résolution ;
- la liste des conditions initiales (liste d'autant d'éléments qu'en a  $X$ ) ;
- la liste des instants de résolution  $t\_eval=$ .

```

1 # instants de résolution
2 t0=0 # instant initial auquel on modifie la vitesse
3 tf=3*T # on s'intéresse à la trajectoire jusqu'à 3 fois la période sur le
   mouvement circulaire
4 liste_t=np.linspace(      ,      ,      ) #(à compléter) : 100000 instants
   entre t0 et tf
5 for v0 in L_v0:
6     # résolution
7     resol=solve_ivp(      , (      ,      ) , [      ,      ,      ],
8                       ) #(à compléter)
9     # rayon : ligne de rang 0 de resol.y (r=X[0])
10    r=      #(à compléter)
11    # theta : ligne de rang 2 de resol.y (theta=X[2])
12    theta=      #(à compléter)
13    # polaire => cartésien
14    x = r * np.cos(theta) #(à compléter)
15    y = r * np.sin(theta) #(à compléter)
16    # tracé de la trajectoire
17    plt.plot(x,y)
18    plt.xlabel('x (m)')
19    plt.ylabel('y (m)')
20    plt.title('      ') #(à compléter)
21    plt.show()

```

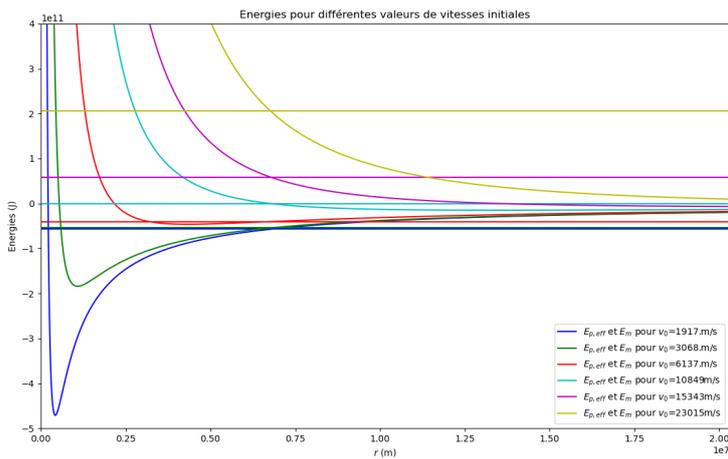


FIGURE 8

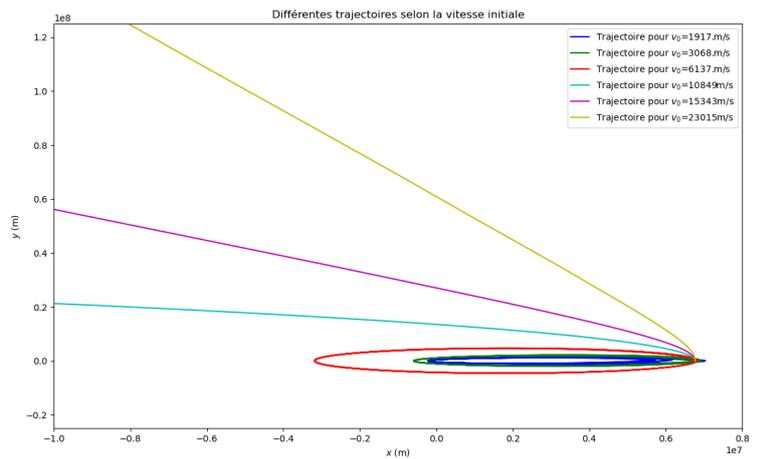


FIGURE 9

## V Annexe : Données numériques

### Unités de longueurs astronomiques

Une <b>Unité Astronomique (U.A.)</b> correspond au demi grand-axe de l'ellipse décrite par la Terre autour du Soleil	1 ua = 149597871 km 1 ua $\approx 1,5 \cdot 10^8$ km
Une <b>Année lumière (a.l.)</b> est la distance parcourue par la lumière dans le vide en une année	1 al = 9,4607.10 <sup>15</sup> m

### Terre

Rayon	$R_T = 6\,370$ km
Masse	$M_T \approx 6,0 \cdot 10^{24}$ kg
Période de révolution autour du Soleil	1 année
Champ de gravitation à la surface	$g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} \approx 9,81$ m · s <sup>-2</sup>
Âge de la Terre	$\approx 4,5$ milliards d'années
Jour solaire moyen = intervalle de temps entre deux passages du Soleil en un méridien terrestre	$T_m = 1$ jour = 24 h = 86 400 s
Jour sidéral = temps que met la Terre pour faire un tour sur elle-même	$T_s = 23$ h 56 min 04 s = 86 164 s

### Lune

Lunaison (période entre deux pleines lunes)	$L = 29,5$ jours
Période orbitale = période de rotation propre	$T_L = 27,3$ jours
Distance moyenne Terre-Lune	$d_{TL} = 380\,000$ km
Masse	$M_L \approx \frac{M_T}{81} \approx 7,4 \cdot 10^{22}$ kg

### Soleil

masse	$M_S \approx 2,0 \cdot 10^{30}$ kg
rayon	$R_S \approx 700\,000$ km
température au centre	$T_c \approx 15$ millions de Kelvin
température de surface	$T_s \approx 5\,700$ K

### Planètes du système solaire

Moyen mnémotechnique : « **Me Voilà Tout Mouillé, J'étais Sous Un Nuage** »

	Masse (kg)	$\frac{M_{\text{Planète}}}{M_T}$	Rayon (km)	Demi-grand axe (10 <sup>6</sup> km)	Excentricité de la trajectoire	Période (années)	$\frac{T^2}{a^3}$ (s <sup>2</sup> · m <sup>-3</sup> )	Découverte
Mercure	$3,3 \cdot 10^{23}$	0,053	2439	57,95	0,205 6	0,241	$2,90 \cdot 10^{-19}$	Avant 17 <sup>ème</sup>
Venus	$4,9 \cdot 10^{24}$	0,816	6052	108,11	0,006 9	0,615	$3,00 \cdot 10^{-19}$	Avant 17 <sup>ème</sup>
Terre	$6 \cdot 10^{24}$	1	6370	149,57	0,016 7	1,000	$2,97 \cdot 10^{-19}$	
Mars	$6,4 \cdot 10^{23}$	0,107	3398	227,84	0,093 4	1,881	$2,97 \cdot 10^{-19}$	Avant 17 <sup>ème</sup>
Jupiter	$1,9 \cdot 10^{27}$	318	71492	778,1	0,048 4	11,861	$2,98 \cdot 10^{-19}$	Avant 17 <sup>ème</sup>
Saturne	$5,7 \cdot 10^{26}$	95,07	60 268	1 427,0	0,054 3	29,457	$3,00 \cdot 10^{-19}$	Avant 17 <sup>ème</sup>
Uranus	$8,7 \cdot 10^{25}$	14,52	25 559	2 870,3	0,046 0	84,008	$2,97 \cdot 10^{-19}$	1781 HERSCHEL
Neptune	$1,0 \cdot 10^{26}$	17,17	24764	4 499,9	0,008 2	164,784	$2,98 \cdot 10^{-19}$	1846 LE VERRIER
Pluton	$1,3 \cdot 10^{22}$	0,002	1160	5 909	0,248 1	248,35	$2,97 \cdot 10^{-19}$	1930 TOMBAUGH

Remarque : Pluton n'est plus considéré comme la 9<sup>e</sup> planète du système solaire depuis 2006, elle rentre dans la catégorie des planètes naines.