Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)
TD n°14 Théorème du moment cinétique pour le point matériel — *Corrigé*

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5
Maîtriser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.		✎	✎	✎	
Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.	✎	✎		✎	
Utiliser le théorème scalaire ou le théorème en un point fixe du moment cinétique en référentiel galiléen.		✎	✎	✎	✎
Reconnaître les cas de conservation du moment cinétique.			✎		

Parcours possibles

— Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, n°2, n°3 (Q1 à Q4 uniquement).

— Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°1, n°3.

— Si vous êtes à l'aise : exercices n°3, 4, 5 et 6.

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 QCM

R1. Les moments par rapport à un point sont des vecteurs. √ **Vrai** ◯ Faux

R2. Les moments par rapport à un axe sont des vecteurs. ◯ Vrai √ **Faux**

R3. Le moment d'une force a les mêmes dimensions qu'une énergie. √ **Vrai** ◯ Faux

R4. Le bras de levier est la distance entre le point d'application d'une force et l'axe considéré.
√ **Vrai** ◯ Faux

R5. À quelle autre(s) grandeur(s) physique(s) rencontrée(s) dans le cours de mécanique est homogène le moment d'une force ? ◯ vitesse √ **énergie** ◯ puissance √ **travail**

R6. Le moment cinétique par rapport à O d'un point matériel M, de masse m, de vitesse $\overrightarrow{v}$ et subissant une force $\overrightarrow{F}$:

◯ s'écrit $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}$;

◯ s'écrit $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$;

√ **est nul si sa trajectoire est une droite passant par le point O.**

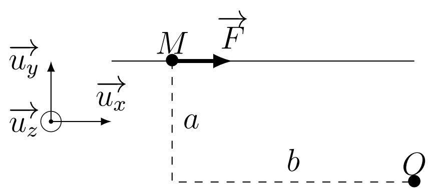
R7. Une force dont la droite d'action est normale à un axe (Δ) est appliquée à un point matériel. Son moment par rapport à (Δ) :

√ **a la même dimension que le travail d'une force ;**

√ **permet de savoir si la force modifie la vitesse du point matériel ;**

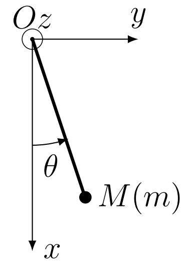
◯ a un module inversement proportionnel à son bras de levier par rapport à (Δ).

R8. Le moment $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F})$ de la force $\overrightarrow{F}$ d'intensité F par rapport au point O est :
◯ $Fa\overrightarrow{u_z}$ ◯ $-Fb\overrightarrow{u_y}$ ◯ $-Fb\overrightarrow{u_z}$ √ $-Fa\overrightarrow{u_z}$



Exercice n°2 Pendule simple

On étudie le pendule simple : un point matériel M est accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ. On note O le point d'attache du fil.



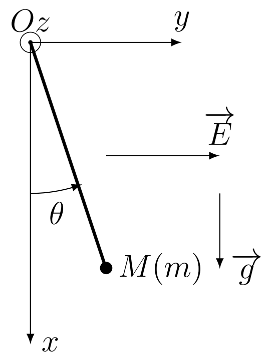
R1. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ en utilisant le théorème du moment cinétique par rapport à O.

R2. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ en utilisant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Oz.

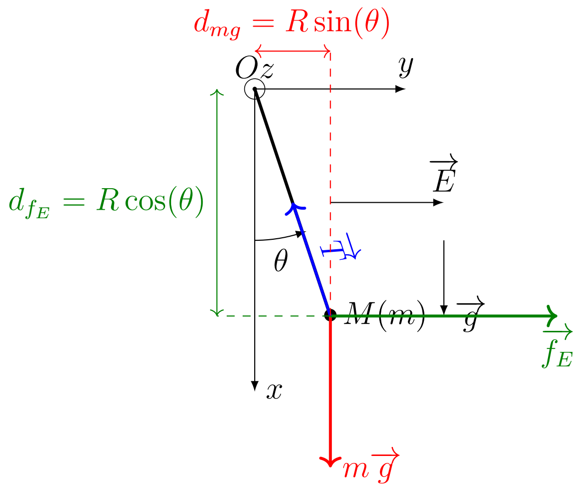
R3. La résoudre complètement, après linéarisation justifiée, si à $t = 0$, $\theta(0) = \theta_0 \ll 1$ rad et $\dot{\theta}(0) = 0$.

Exercice n°3 Pendule électrostatique

Un pendule électrostatique est constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium et suspendue à une potence par un fil de masse négligeable. La boule est préalablement chargée avec une charge électrique $Q = 2,3.10^{-4}$ C. L'ensemble est placé entre deux plaques de cuivre planes et parallèles soumises à une différence de potentiel telle qu'elles génèrent un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u_y}$ avec $E = 500$ V $\cdot$ m^{-1}.
La longueur du pendule est $OM = R = 10$ cm et la masse de la boule assimilée à un point M est $m = 20$ g.
L'accélération de la pesanteur est $g = 9,8$ m $\cdot$ s^{-2}.



R1. Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur le pendule et les représenter sur le schéma.
Exprimer le moment de ces forces par rapport à l'axe (Oz) en utilisant le bras de levier.

> **Solution:**
>
> Système : boule de polystyrène M de masse m et de charge Q.
> Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
> Bilan des actions mécaniques :
>
> — poids $m\overrightarrow{g}$;
>
> — tension du fil $\overrightarrow{T}$;
>
> — force électrique $\overrightarrow{f_E} = Q\overrightarrow{E}$.
>
> 
>
>
> Le moment de la tension du fil par rapport à (Oz) est nul car la droite d'action coupe l'axe (Oz).
> En utilisant le bras de levier : $\mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) = -mgR\sin(\theta)$ et $\mathscr{M}_{Oz}(\overrightarrow{f_E}) = +qER\cos(\theta)$

R2. Que peut-on dire de la somme des moments à l'équilibre ?

R3. Déterminer la position d'équilibre θ_e du pendule.

> **Solution:**
> À l'équilibre, en θ_e, la somme des moments des forces est nulle, alors $-mg\sin(\theta_e) + QE\cos(\theta_e) = 0$, soit
> $$\boxed{\tan(\theta_e) = \frac{QE}{mg}}$$

On vérifie que si m augmente, θ_e diminue, et si E ou Q augmente, θ_e augmente.

R4. Appliquer le théorème du moment cinétique à M par rapport à l'axe (Oz).

Solution: On applique le TMC par rapport à l'axe (Oz) dans le référentiel terrestre galiléen :
$\dfrac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_{Oz}(m\vec{g}) + \mathscr{M}_{Oz}(\vec{T}) + \mathscr{M}_{Oz}(\vec{f_E})$
M a un mouvement circulaire : $L_{Oz}(M) = \left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)\right) \cdot \vec{u_z} = \left(R\vec{u_r} \wedge mR\dot{\theta}\vec{u_\theta}\right) \cdot \vec{u_z}$,
soit $L_{Oz}(M) = mR^2\dot{\theta}$
le TMC donne : $mR^2\ddot{\theta} = -mgR\sin(\theta) + qER\cos(\theta)$
On obtient : $\boxed{mR\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) + QE\cos(\theta)}$

(Questions plus difficiles)
On écarte le pendule légèrement de sa position d'équilibre. On pose $\varepsilon = \theta - \theta_e$.
On rappelle que pour $|\varepsilon| \ll \theta_e$, on a $\cos(\theta_e + \varepsilon) \approx \cos(\theta_e) - \varepsilon\sin(\theta_e)$ et $\sin(\theta_e + \varepsilon) \approx \sin(\theta_e) + \varepsilon\cos(\theta_e)$.

R5. Établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des petites oscillations, vérifiée par ε.

R6. En déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 des oscillations puis calculer sa période propre T_0.

Solution:
On pose $\theta = \theta_e + \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll 1$ rad (oscillations de faible amplitude au voisinage de la position d'équilibre) et on procède au DL au premier ordre au voisinage de θ_e de l'équation du mouvement, en utilisant les DL fournis.
$\theta = \theta_e + \varepsilon$, on en déduit que $\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}$ et $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$
On obtient : $mR\ddot{\varepsilon} = -mg\Big(\sin(\theta_e) + \varepsilon\cos(\theta_e)\Big) + QE\Big(\cos(\theta_e) - \varepsilon\sin(\theta_e)\Big)$
Soit $mR\ddot{\varepsilon} + \varepsilon\Big(mg\cos(\theta_e) + QE\sin(\theta_e)\Big) = \underbrace{-mg\sin(\theta_e) + QE\cos(\theta_e)}_{=0}$
Soit $\ddot{\varepsilon} + \dfrac{mg\cos(\theta_e) + QE\sin(\theta_e)}{mR}\varepsilon = 0$, avec $\dfrac{mg\cos(\theta_e) + QE\sin(\theta_e)}{mR} > 0$
On trouve bien l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre
$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mg\cos(\theta_e) + QE\sin(\theta_e)}{mR}}}$ au voisinage de θ_e.
On peut d'ailleurs en déduire que la position d'équilibre déterminée est une position d'équilibre stable.
Rq : on peut un peu simplifier cette expression avec un peu de trigo : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mg\cos(\theta_e)}{mR}\underbrace{\left(1 + \dfrac{QE\sin(\theta_e)}{mg\cos(\theta_e)}\right)}_{1+\tan^2(\theta_e)=\frac{1}{\cos^2(\theta_e)}}}$

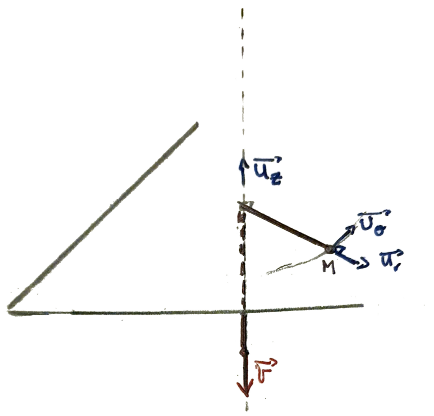
Ainsi $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{R\cos(\theta_e)}}$

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°4 Masse accrochée à une ficelle

Le point M de masse m se déplace sans frottement sur un plan horizontal. Il est attaché à un fil inextensible, sans masse et de longueur ℓ. Le fil passe par un trou pratiqué dans le plan horizontal en O. L'autre extrémité du fil est déplacée à la vitesse $\vec{v} = -v_0\vec{u_z}$, l'axe Oz étant l'axe vertical ascendant.

R1. Faire un schéma du dispositif.



Solution:

R2. Donner une relation entre la côte z de l'extrémité du fil et la distance $\rho = OM$. En déduire une relation entre les dérivées premières de z et de ρ.

Solution: $\ell = |z(t)| + \rho(t)$

ATTENTION : $z < 0$, donc $\boxed{\ell = \rho(t) - z(t)}$.

En dérivant : $\boxed{\dot{\rho} = \dot{z} = -v_0}$

R3. Montrer que le moment cinétique de M est constant.

Solution:

Système : point matériel $M(m)$

Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\vec{g}$
- réaction normale du support $\vec{R_N}$
- tension du fil $\vec{T}$

LMC par rapport à O au point M dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L_O}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}_O}(m\vec{g}) + \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{R_N}) + \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{T})$$

Or $m\vec{g} + \vec{R_N} = \vec{0}$ (PFD selon la verticale), donc $\vec{\mathcal{M}_O}(m\vec{g}) + \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{R_N}) = \vec{0}$

et O appartient à la droite d'action de la tension du fil, donc $\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{T}) = \vec{0}$

Ainsi $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L_O}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$, donc le moment cinétique de M se conserve.

R4. Sachant que la masse est lancée avec une vitesse angulaire ω_0 à partir de la distance d du point O, déterminer $\rho(t)$ et $\omega(t)$.

Solution: On peut déterminer $\rho(t)$ facilement, en effet $\rho(0) = d$ et on tire à vitesse constante l'autre extrémité, donc ρ diminue de $v_0 t$, ainsi $\boxed{\rho(t) = d - v_0 t}$

Pour $\omega(t)$, on utilise la conservation du moment cinétique.

Exprimons le moment cinétique à $t = 0$: $\vec{L_O}(t=0) = \vec{OM_0} \wedge m\vec{v_0} = d\vec{u_r} \wedge md\omega_0\vec{u_\theta} = md^2\omega_0\vec{u_z}$

Exprimons le moment cinétique à t : $\vec{L_O}(t) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \rho\vec{u_r} \wedge m\left(\dot{\rho}\vec{u_r} + \rho\omega\vec{u_\theta}\right) = m\rho^2\omega\vec{u_z}$

Par égalisation : $\boxed{d^2\omega_0 = \rho^2\omega}$

Ainsi $\boxed{\omega(t) = \dfrac{d^2\omega_0}{(d-v_0t)^2}}$

R5. En déduire $\theta(t)$ si $\theta(0)=0$, puis $\rho(\theta)$. Tracer l'allure de la trajectoire de M.

Solution:
$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{d^2\omega_0}{(d-v_0t)^2}$

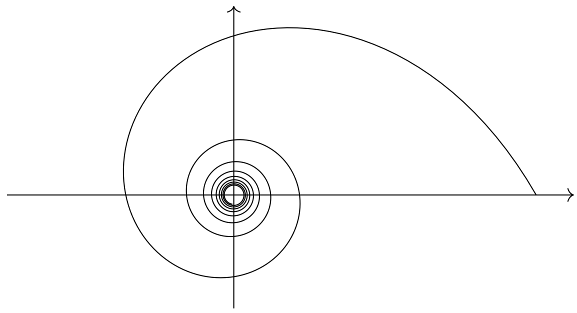
On intègre par rapport au temps : $\theta(t) = \dfrac{1}{v_0}\dfrac{d^2\omega_0}{d-v_0t} + C_2$

Or $\theta(0) = 0 = \dfrac{d^2\omega_0}{v_0 d} + C_2$, donc $C_2 = -\dfrac{d\omega_0}{v_0}$

Soit $\theta(t) = \dfrac{1}{v_0}\dfrac{d^2\omega_0}{d-v_0t} - \dfrac{d\omega_0}{v_0}$, soit $\boxed{\theta(t) = \dfrac{d\omega_0 t}{d-v_0t}}$

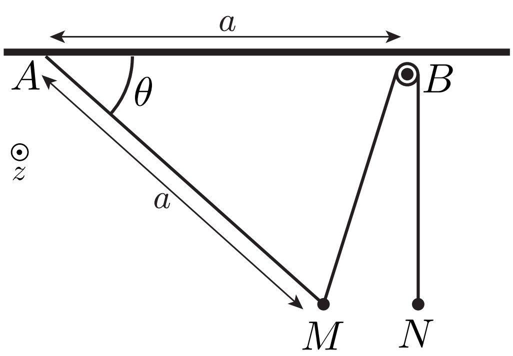
Pour l'équation de la trajectoire en polaire, on extrait t de $\rho(t)$: $t = \dfrac{d-\rho}{v_0}$

Ainsi $\theta = \dfrac{d\omega_0(d-\rho)}{v_0} \times \dfrac{1}{\rho}$, soit $\boxed{\rho(\theta) = \dfrac{d}{1+\dfrac{v_0}{\omega_0 d}\theta}}$



Exercice n°5 Équilibre

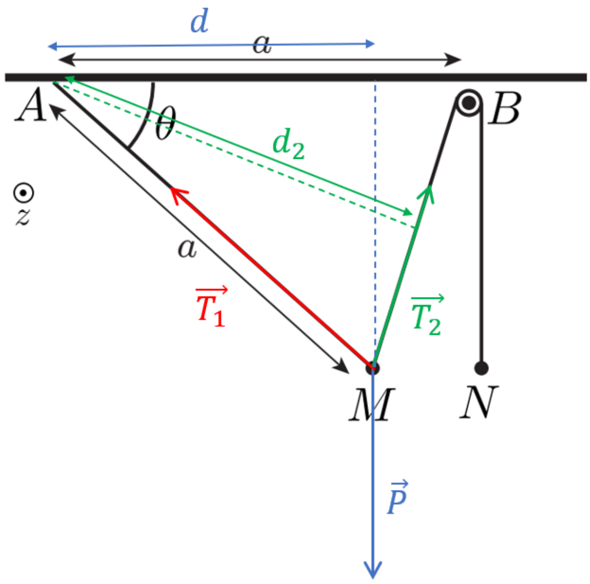
Soit un fil inextensible et sans masse, fixé en A à un socle horizontal et passant en B sur une poulie parfaite, de très petites dimensions, avec $AB = a$. Sur le fil, en un point M tel que $AM = a$, est attachée une masse ponctuelle m et, au bout du fil, est aussi accrochée une masse m' en N. Le dispositif est placé verticalement dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$.



R1. Établir le bilan des forces qui s'exercent sur le point M et exprimer leurs moments en A.

Il y a trois forces, et le seul angle devant intervenir dans ces expressions sera l'angle $\theta = \widehat{AB, AM}$. On admettra que la norme de la force exercée par N sur M via le fil vaut $m'g$.

Solution: Trois forces agissent sur l'objet :
Le poids $\overrightarrow{P}$
La tension due au fil de gauche $\overrightarrow{T_1}$
La tension due au fil de droite $\overrightarrow{T_2}$



Intéressons nous aux moments des forces par rapport à l'axe orienté qui passe par A et est perpendiculaire au plan (selon $\overrightarrow{u_z}$) :
Pour le poids, le bras de levier est égal à $d = a\cos(\theta)$ et cette force tend à faire tourner le point M dans le sens opposé au sens conventionnel (pouce et doigts de la main droite) :
$\mathscr{M}_{Az}(\overrightarrow{P}) = -mga\cos(\theta)$
Pour la tension due au fil de gauche $\overrightarrow{T_1}$, le bras de levier est nul :
$\mathscr{M}_{Az}(\overrightarrow{T_1}) = 0$
Pour la tension due au fil de droite $\overrightarrow{T_2}$, le bras de levier est d_2. Le tringle étant isocèle, sa hauteur coupe le côté opposé selon un angle $\dfrac{\theta}{2}$, ainsi son bras de levier est égal à $d_2 = acos(\dfrac{\theta}{2})$. Cette force tend à faire tourner le point M dans le sens conventionnel (pouce et doigts de la main droite) :
$\mathscr{M}_{Az}(\overrightarrow{T_2}) = T_2 a\cos(\dfrac{\theta}{2}) = m'ga\cos(\dfrac{\theta}{2})$

R2. Trouver une relation vérifiée par l'angle θ lorsque le système est à l'équilibre.

Solution:
Système : point matériel $M(m)$
Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques :

— Le poids $\overrightarrow{P}$
— La tension due au fil de gauche $\overrightarrow{T_1}$
— La tension due au fil de droite $\overrightarrow{T_2}$

LMC par rapport à l'axe orienté Az fixe dans le référentiel terrestre galiléen :
$\dfrac{\mathrm{d}L_{Az}}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_{Az}(\overrightarrow{P}) + \mathscr{M}_{Az}(\overrightarrow{T_1}) + \mathscr{M}_{Az}(\overrightarrow{T_2})$
Soit : $\dfrac{\mathrm{d}L_{Az}}{\mathrm{d}t} = -mgacos(\theta) + 0 + m'gacos(\dfrac{\theta}{2})$
Le système étant à l'équilibre $\dfrac{\mathrm{d}L_{Az}}{\mathrm{d}t} = 0$

On obtient : $-mgacos(\theta) + m'ga\cos(\dfrac{\theta}{2}) = 0$

Soit : $-m\cos(\theta) + m'\cos(\dfrac{\theta}{2}) = 0$

R3. Trouver la solution de cette équation. On pourra utiliser la relation $\cos(2u) = 2\cos^2(u) - 1$. On discutera de la condition sur m et m' pour que la solution existe.

Solution: La relation $-m\cos(\theta) + m'\cos(\dfrac{\theta}{2}) = 0$ peut s'écrire :

$-m\cos(2\dfrac{\theta}{2}) + m'\cos(\dfrac{\theta}{2}) = 0$

En utilisant la relation proposée ($\cos(2u) = 2\cos^2(u) - 1$), on obtient :

$-2m\cos^2(\dfrac{\theta}{2}) + m + m'\cos(\dfrac{\theta}{2}) = 0$

Que l'on peut remettre sous la forme :

$\cos^2(\dfrac{\theta}{2}) - \dfrac{m'}{2m}\cos(\dfrac{\theta}{2}) - \dfrac{1}{2} = 0$

On reconnait un trinôme avec $X = \cos(\dfrac{\theta}{2})$:

$X^2 - \dfrac{m'}{2m}X - \dfrac{1}{2} = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\dfrac{m'}{2m}\right)^2 + 4\dfrac{1}{2}$

$\Delta = \left(\dfrac{m'}{2m}\right)^2 + 2$

Δ est positive, les solutions sont :

$$\cos(\frac{\theta}{2}) = \frac{\frac{m'}{2m} + \sqrt{\left(\frac{m'}{2m}\right)^2 + 2}}{2} \text{ ou } \cos(\frac{\theta}{2}) = \frac{\frac{m'}{2m} - \sqrt{\left(\frac{m'}{2m}\right)^2 + 2}}{2}$$

La deuxième solution est négative, il ne reste que la solution $\cos(\dfrac{\theta}{2}) = \dfrac{\frac{m'}{2m} + \sqrt{\left(\frac{m'}{2m}\right)^2 + 2}}{2}$

Si m' est très petit devant m alors $\cos(\dfrac{\theta}{2})$ tend vers $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Cela implique du $\dfrac{\theta}{2}$ tend vers $\dfrac{\pi}{4}$ et θ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$

Cela n'est possible que si le fil qui relie M avec N est infini. dans le cas contraire, l'angle maximal est lié à la longueur du fil MN.

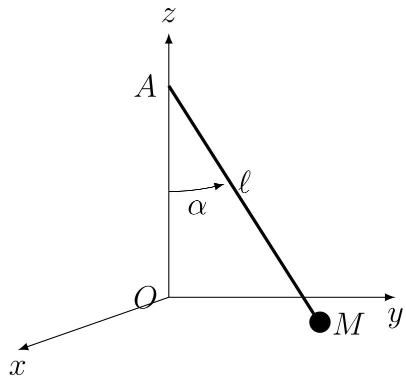
Reste que si le rapport $\dfrac{m'}{2m}$ devient trop grand (c'est déjà le cas si le rapport $\dfrac{m'}{2m}$ est supérieur à 2, c'est à dire si m' est supérieur à $4m$), la solution n'aura plus de sens mathématique car $\cos(\dfrac{\theta}{2})$ deviendrait supérieur à 1.

La valeur maximal pour $\cos(\dfrac{\theta}{2})$ sera donc 1, ce qui correspond, quand $\dfrac{m'}{2m}$ devient trop grand à un angle $\theta = 0$

Exercice n°6 Pendule conique

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur ℓ attaché en un point A fixe d'un axe (Oz).
Le point matériel M est astreint à tourner autour de (Oz), dans le plan (Oxy), à la vitesse angulaire constante ω dans le référentiel galiléen d'étude $\left(O;\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\right)$.

En appliquant le théorème du moment cinétique en un point astucieusement choisi, déterminer l'angle d'inclinaison constant α du pendule avec l'axe (Oz) en fonction de ℓ, g et ω.



Solution:

Système : point matériel $M(m)$
Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques :

— poids $m\overrightarrow{g}$

— tension du fil $\overrightarrow{T}$

La tension du fil est une force inconnue, il est donc préférable d'appliquer le TMC par rapport à un point qui permet de ne pas la faire intervenir : c'est le cas par rapport au point A, car $\overrightarrow{T}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AM}$, donc $\overrightarrow{\mathscr{M}_A}(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{0}$.

LMC par rapport à A : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_A}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathscr{M}_A}(m\overrightarrow{g}) + \overrightarrow{\mathscr{M}_A}(\overrightarrow{T})$

Le mouvement de M est circulaire, car ℓ et α sont constants, $\overrightarrow{L_A}(M) = \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{v}(M) = (-z_A\overrightarrow{u_z} + r\overrightarrow{u_r}) \wedge mr\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = mr\dot{\theta}z_A\overrightarrow{u_r} + mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$

La vitesse angulaire ω, le rayon r et l'altitude de A sont constantes, donc $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_A}}{\mathrm{d}t} = mr\omega z_A\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \overrightarrow{0}$
$\overrightarrow{\mathscr{M}_A}(m\overrightarrow{g}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{g} = mg\ell\sin(\alpha)\overrightarrow{u_\theta}$
le TMC donne donc : $mrz_A\omega^2 = mg\ell\sin(\alpha)$
De plus, $\cos(\alpha) = \dfrac{z_A}{\ell}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{r}{\ell}$

Ainsi : $\ell^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\omega^2 = g\ell\sin(\alpha)$, soit $\boxed{\cos(\alpha) = \dfrac{\ell\omega^2}{g}}$

Ce n'est possible que si $\omega > \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.