

📖 Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)
TD n°12 Approche énergétique du mouvement d'un point matériel – Corrigé

Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7
Capacités							
Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.	📖		📖	📖	📖	📖	📖
Connaître l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur et élastique.	📖	📖	📖	📖	📖		📖
Distinguer force conservative et force non conservative.	📖		📖	📖	📖		📖
Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.			📖		📖	📖	
Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie.						📖	
Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.					📖	📖	

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Skieuse

Une skieuse de masse $m = 60$ kg descend une piste rectiligne de longueur $\ell = 100$ m de pente 50%. On prend en compte les frottements solides de coefficient de frottement $f = 0,1$ et qui vérifient les lois de Coulomb du frottement solide. On néglige les frottements fluides.

R1. Faire un schéma représentant le système et les forces.

Solution:

Système : Skieuse $M(m)$
 Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
 Bilan des forces :

- poids $m\vec{g}$: force conservative d'énergie potentielle
 $\mathcal{E}_p =$
- réaction du support

R2. Déterminer l'expression des travaux de la réaction normale et de la force de frottement solide.

Solution:

$$\begin{aligned}
 W_{AB}(\vec{R}_N) &= 0 \quad \vec{R}_N \perp \text{mouvement} \\
 W_{AB}(\vec{R}_T) &= \int_A^B \vec{R}_T \cdot d\vec{OM} \\
 &= \int_A^B -R_T \vec{u}_x \cdot d\vec{OM} \\
 &= \int_A^B -R_T dx \\
 &= \int_{x_A}^{x_B} -f R_N dx
 \end{aligned}$$

Le PFD projeté selon \vec{u}_y donne : $0 = -mg \cos(\alpha) + R_N$, soit $R_N = mg \cos(\alpha)$, ainsi :

$$\begin{aligned} W_{AB}(\vec{R}_T) &= \int_{x_A}^{x_B} -fmg \cos(\alpha) dx \\ &= -fmg \sin(\alpha)L \end{aligned}$$

R3. À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, établir la vitesse de la skieuse en bas de la piste en supposant que sa vitesse initiale est nulle.

Solution: Il est judicieux ici d'utiliser le **théorème de l'énergie mécanique** car nous cherchons une vitesse en un point particulier, nous ne nous intéressons pas au mouvement à chaque instant.

Théorème de l'énergie mécanique entre le point de départ, A , et le point d'arrivée, B en bas de la pente.

$$\begin{aligned} \Delta_{AB} \mathcal{E}_m &= W_{AB}(\vec{R}_N) + W_{AB}(\vec{R}_T) \\ \Delta_{AB} \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_B^2 \\ \Delta_{AB} \mathcal{E}_{pp} &= mgh_B - mgh_A \\ &= -mg(h_A - h_B) \\ &= -mgL \sin(\alpha) \end{aligned}$$

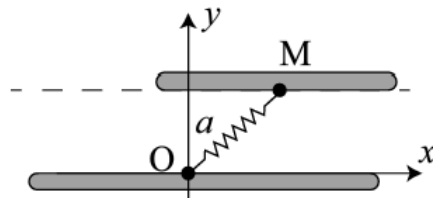
Le TEM donne : $\frac{1}{2}mv_B^2 - mgL \sin(\alpha) = -fmg \cos(\alpha)L$

$$v_B^2 = 2gL(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha))$$

Soit $v_B = \sqrt{2gL(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha))}$

Exercice n°2 Téléphone

Un des premiers téléphones portables grands publics était composé de deux parties coulissantes composées de l'écran et du clavier. Un ressort de constante k et de longueur à vide ℓ_0 permettait d'avoir deux positions stables, l'une correspondant au téléphone ouvert et l'autre fermé. Dans le schéma proposé, le point $M(x, a)$ peut se translater horizontalement.



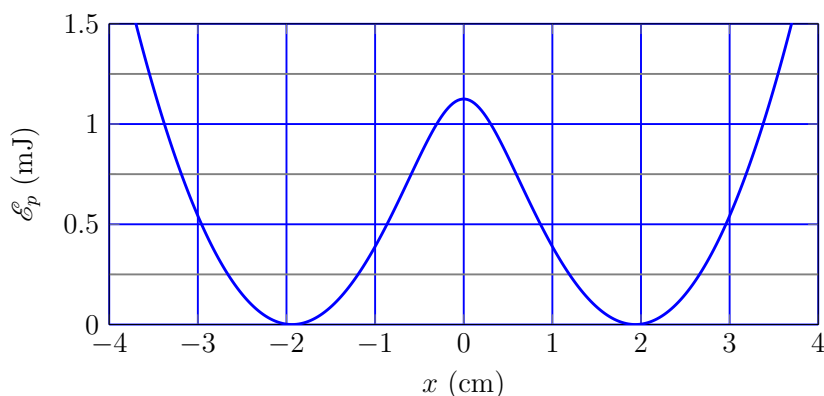
R1. À l'aide du schéma ci-dessus, exprimer la longueur du ressort ℓ en fonction de x et a .

Solution: $\ell = \sqrt{a^2 + \ell_0^2}$

R2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle élastique.

Solution: L'énergie potentielle élastique vaut donc $\mathcal{E}_{p,él} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(\sqrt{a^2 + \ell_0^2} - \ell_0)^2$

On donne le graphe de \mathcal{E}_p en fonction de x .



R3. Préciser les positions d'équilibre et leur stabilité.

Solution: Les positions d'équilibres sont les extremas de \mathcal{E}_p : $x_{e,12} = \pm 2$ cm et $x_{e3} = 0$.

En $x_{e,12} = \pm 2$ cm, \mathcal{E}_p est minimale, donc l'équilibre est stable.

En $x_3 = 0$, \mathcal{E}_p est maximale, donc l'équilibre est instable.

R4. Retrouver ces résultats mathématiquement¹.

Solution:

— Équilibre ?

$$\text{Dérivons } \mathcal{E}_p \text{ par rapport à } x : \frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = \frac{k}{2} \times \frac{2x \times 2}{2\sqrt{x^2 + a^2}} (\sqrt{x^2 + a^2} - \ell_0) = kx \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right)$$

Elle s'annule en $x_{e,3} = 0$ et $\sqrt{x^2 + a^2} - \ell_0 = 0$, soit $x_{e,12} = \pm \sqrt{\ell_0^2 - a^2}$ (qui n'existe que si $\ell_0 > a$).

— Stabilité ?

$$\text{Dérivons une deuxième fois : } \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} = k \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) - kx \times \frac{2x}{-2(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\text{— En } x_{e,3} = 0 : \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x=0) = k \left(1 - \frac{\ell_0}{a} \right) - 0 < 0$$

Si $\ell_0 > a$ (les autres solutions existent), cette position est instable.

Si $\ell_0 < a$ (les autres solutions n'existent pas), cette position est stable.

$$\text{— En } x_{e,12} = \pm \sqrt{\ell_0^2 - a^2}, \text{ soit } \sqrt{x_{e,12}^2 + a^2} = \ell_0$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_{e,12}) = k \left(1 - \frac{\ell_0}{\ell_0} \right) + \frac{k(\ell_0^2 - a^2)}{\ell_0^3} = \frac{k(\ell_0^2 - a^2)}{\ell_0^3} > 0 \text{ si elles existent, elles sont stables.}$$

R5. L'écran est dans l'une des deux positions d'équilibre stable. Quelle énergie doit-il avoir pour qu'il puisse passer dans l'autre position d'équilibre stable ? Quelle doit être sa vitesse initiale ?

Solution: L'énergie mécanique de l'écran doit lui permettre de franchir la barrière de potentiel. Pour cela, elle doit être supérieure à sa hauteur, soit à $\mathcal{E}_{barr} = 1,2$ mJ.

$$\text{L'énergie mécanique se conserve, et elle vaut initialement } \mathcal{E}_m(0) = \mathcal{E}_p(x_{e12}) + \mathcal{E}_c = 0 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

1. Indications :

- Dériver \mathcal{E}_p .
- Chercher les annulations de la dérivée pour déterminer les positions d'équilibre.
- Dériver une deuxième fois.
- Évaluer la dérivée seconde aux positions d'équilibre, déterminer les signes et conclure sur leurs stabilités.

Ainsi, il est nécessaire que $v_0 > \frac{2\mathcal{E}_{barr}}{m}$ pour que l'écran puisse passer de l'autre côté.

Données : $k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$; $a = 0,50 \text{ cm}$; $\ell_0 = 2,0 \text{ cm}$.

Exercice n°3 Marsupilami

Le Marsupilami est un animal de bande dessinée créé par Franquin aux capacités physiques remarquables, en particulier grâce à sa queue qui possède une force importante. Pour se déplacer, le Marsupilami enroule sa queue comme un ressort entre lui et le sol et s'en sert pour se propulser vers le haut.

On note $\ell_0 = 2 \text{ m}$ la longueur à vide du ressort équivalent. Lorsqu'il est complètement comprimé, la longueur du ressort est $\ell_m = 50 \text{ cm}$.

La masse de l'animal est 50 kg et la queue quitte le sol lorsque le ressort mesure ℓ_0 . Tous les frottements sont négligés dans cet exercice.



Solution: Système : Marsupilami $M(m)$

Référentiel : terrestre \mathcal{R} supposé galiléen

Bilan des forces :

- Tant que la queue est de longueur inférieure à ℓ_0 :
 - poids $m\vec{g}$
 - force de rappel élastique
- Quand la queue est de longueur supérieure à ℓ_0 : poids $m\vec{g}$ uniquement.

Le Marsupilami est soumis uniquement à des forces conservatives : le poids et la force de rappel élastique. On choisit l'axe (Oz) vertical ascendant.

- Quand la queue est comprimée au maximum (A) : $z = \ell_m$, $\dot{z} = 0$ (il s'élance sans vitesse initiale), $\mathcal{E}_{pp} = mg\ell_m$, $\mathcal{E}_{p,él} = \frac{1}{2}k(\ell_m - \ell_0)^2$
- Quand la queue quitte le sol (B) : $z = \ell_0$, $\dot{z} = v_0$, $\mathcal{E}_{pp} = mg\ell_0$, $\mathcal{E}_{p,él} = 0$
- Quand le Marsupilami atteint la hauteur maximale (C) : $z = h$, $\dot{z} = 0$ (max de z , donc $\dot{z} = 0$), $\mathcal{E}_{pp} = mgh$, le ressort n'agit plus.

Les TPC et TPM ne sont pas adaptées ici, car nous ne cherchons pas l'équation du mouvement mais une vitesse ...

Ici, vous pouviez utiliser le TEC ou la conservation de l'énergie mécanique, cette dernière ayant l'avantage de ne pas avoir à calculer les travaux des forces conservatives dont vous connaissez les énergies potentielles.

Le schéma est toujours obligatoire dans tout exercice de mécanique ! Pensez à définir les notations que vous introduisez (notamment les différents états du système).

R1. Que peut-on dire de l'énergie mécanique du Marsupilami ?

R2. Quelles sont les forces qui s'exercent sur le Marsupilami durant les différentes phases du mouvement ?

R3. Quelle est la constante de raideur du ressort équivalent si la hauteur maximale d'un saut est $h = 10 \text{ m}$?

Solution: L'énergie mécanique du marsupilami se conserve entre A et C, donc

$$\mathcal{E}_m(A) = \mathcal{E}_m(C) \Leftrightarrow 0 + mg\ell_m + \frac{1}{2}k(\ell_m - \ell_0)^2 = mgh \Leftrightarrow k = \frac{2mg(h - \ell_m)}{(\ell_m - \ell_0)^2} = 4,1.10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

R4. Quelle est sa vitesse lorsque la queue quitte le sol ?

Solution: L'énergie mécanique du marsupilami se conserve entre B et C au Marsupilami, donc :

$$\mathcal{E}_m(C) = \mathcal{E}_m(B) \Leftrightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgl_0 + 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(h - l_0)$$

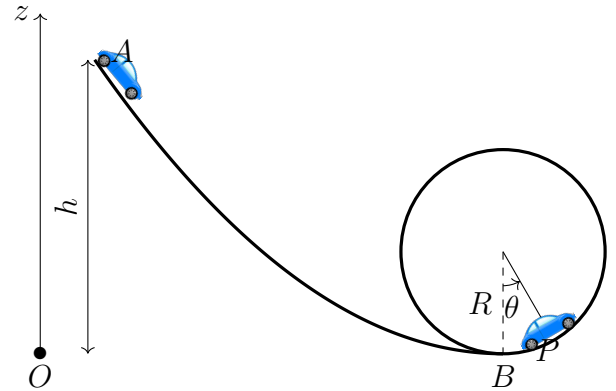
$$\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2g(h - l_0)} = 12,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 45,1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°4 Looping

Le nouveau jeu pour petites voitures de la petite Louise contient une descente, de hauteur h , permettant aux voitures de prendre de l'élan avant d'aborder un looping de rayon $R = 30 \text{ cm}$.

La petite voiture est assimilée à un point matériel de masse $m = 30 \text{ g}$ qui glisse sans frottement sur la piste.



R1. Que peut-on dire de l'énergie mécanique de la voiture au cours de son mouvement ?

R2. Établir l'expression de la vitesse v_0 atteinte par la petite voiture en bas de descente en fonction de la hauteur h à laquelle la petite Louise laisse la voiture (sans vitesse initiale).

Solution: Système : petite voiture de Louise $M(m)$

Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- poids : $m\vec{g}$, force conservative ;
- réaction normale du support, force qui ne travaille pas

Tous les frottements sont négligés, donc l'énergie mécanique de la voiture se conserve au cours du mouvement.

En utilisant la conservation de l'énergie mécanique entre le point de départ et le point d'arrivée :

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0, \text{ soit } v_0 = \sqrt{2gh}$$

On étudie le mouvement de la petite voiture sur le looping circulaire.

R3. En exploitant la réponse de R1 entre B (au début de la piste circulaire) et P (un point quelconque sur la piste circulaire repéré par θ) montrer que

$$R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R} + 2g(\cos(\theta) - 1)$$

Solution:

Énergie potentielle de pesanteur de M sur le looping :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{pp} &= mgz \\ &= mg(R - R\cos(\theta)) \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{E}_p(\theta) = mgR(1 - \cos(\theta))$

Conservation de l'énergie mécanique (entre $\theta = 0$ et θ quelconque) : $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1 - \cos(\theta))$

$$\text{Ainsi } \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(\cos(\theta) - 1)$$

R4. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, exprimer la norme de la réaction normale du support en fonction de m , R , $\dot{\theta}$, g et θ .

En déduire, en utilisant la question précédente, que la norme de la réaction normale s'écrit

$$\|\vec{R}_N\| = m \left(\frac{v_0^2}{R} + g(3 \cos(\theta) - 2) \right)$$

Solution:

PFD selon \vec{u}_r : $-mR\dot{\theta}^2 = mg \cos(\theta) - R_N$, soit $R_N = mR\dot{\theta}^2 + mg \cos(\theta)$, avec $R_N = \|\vec{R}_N\|$.

avec la conservation de \mathcal{E}_m , on en déduit : $R_N = m \frac{v_0^2}{R} - 2mg(1 - \cos(\theta)) + mg \cos(\theta)$

$$\text{Soit } \|\vec{R}_N\| = m \left(\frac{v_0^2}{R} + g(3 \cos(\theta) - 2) \right)$$

R5. Montrer que la voiture reste en contact avec le support lors de tout le mouvement lorsque la vitesse initiale v_0 est supérieure à une vitesse v_{\min} à déterminer.

R6. Déterminer la hauteur minimale à laquelle Louise doit déposer la voiture pour qu'elle reste en contact avec le support. Faire l'application numérique.

Solution: La bille reste en contact avec le support lors de tout le mouvement ssi la réaction normale du support ne s'annule jamais. Cherchons une condition pour que $\forall \theta, R_N(\theta) > 0$.

Or $R_N(\theta)$ est minimale pour $\cos(\theta)$ minimale, c'est-à-dire $\cos(\theta) = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi$

Cherchons donc la condition sur v_0 , pour que $R_N(\theta = \pi) > 0 \Leftrightarrow m \left(\frac{v_0^2}{R} + g(-3 - 2) \right) > 0 \Leftrightarrow$

$$v_0 > \sqrt{5gR} = v_{\min}$$

Or nous avons établi à la question 1. que $v_0 = \sqrt{2gh}$, ainsi la condition précédente s'écrit $\sqrt{2gh} > \sqrt{5gR}$.

Louise devra lâcher sa petite voiture à une hauteur $h > \frac{5R}{2}$ pour qu'elle ne décolle jamais.

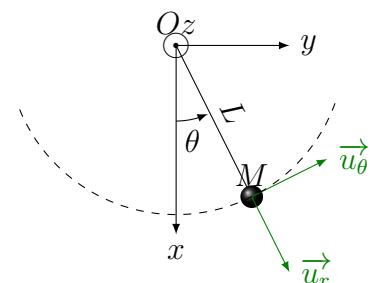
R7. Supposons $v_0 < v_{\min}$. Déterminer l'angle auquel la bille quitte le support et tombe.

Solution: Supposons $v_0 < v_{\min}$, la voiture décollera pour l'angle θ_d tel que $R_N(\theta_d) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{v_0^2}{R} + g(3 \cos(\theta_d) - 2) = 0 \Leftrightarrow \theta_d = \arccos \left(\frac{1}{3} \left(2 - \frac{v_0^2}{gR} \right) \right) > 0$$

Exercice n°5 Approximation harmonique du pendule simple

On considère le pendule simple ci-contre, de masse m et de longueur L .



R1. Exprimer l'énergie potentielle du pendule simple en fonction de m , g , L et θ .

Solution: $\mathcal{E}_{pp} = -mgx = -mgL \cos(\theta)$

R2. En déduire que la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable.

Solution:

— Équilibre ?

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = mgL \sin(\theta)$$

En une position d'équilibre $\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \sin(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$ ou π

— Stabilité ?

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2} = mgL \cos(\theta)$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2}(0) = mgL > 0, \text{ donc l'équilibre } \theta = 0 \text{ est stable.}$$

R3. En utilisant le développement limité de \cos au voisinage de 0 au deuxième ordre, montrer que l'énergie potentielle peut s'écrire sous la même forme que l'énergie potentielle d'un ressort : $\mathcal{E}_p \approx \frac{1}{2}K\theta^2$ à proximité de la position d'équilibre stable où K est une constante que l'on exprimera en fonction de L , g et m .

Solution: $\mathcal{E}_{pp} \approx -mgL \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{1}{2}mgL\theta^2 - mgL$

On identifie $K = mgL$.

R4. Que peut-on dire de l'énergie mécanique si on néglige les frottements ?

Solution: La masse M est soumise à son poids qui est une force conservative, et à la tension du fil.

Le théorème de la puissance mécanique donne $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{v} = 0$, car $\vec{T} \perp \vec{v}$.

Ainsi, l'énergie mécanique se conserve.

R5. Exploiter cela pour obtenir l'équation différentielle du mouvement au voisinage de la position d'équilibre stable.

Solution:

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$$

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_{pp}}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{2}mL^2 \times 2\ddot{\theta} + mgL\dot{\theta} = 0$$

Soit $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$

Exercice n°6 Piégeage d'un électron dans un piège de Penning

On cherche à piéger un électron dans le vide en lui appliquant un champ électromagnétique. Le référentiel est galiléen ; on utilise un repère $Oxyz$ orthonormé direct de vecteurs unitaires de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

L'électron est piégé dans un champ électrique qui dérive du potentiel $V(x, y, z) = \frac{V_0}{2d^2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$. L'énergie potentielle de l'électron est donnée par $\mathcal{E}_p(x, y, z) = -eV(x, y, z)$.

Données numériques :

- masse de l'électron : $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
- charge élémentaire : $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C
- Les caractéristiques du piège sont : $V_0 = 6,0$ V et $d = 5,0$ mm

R1. Exprimer la force subie par l'électron.

Solution:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_p) \\ &= -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z} \vec{u}_z \\ &= (-e) \left(-\frac{V_0}{d^2} x \vec{u}_x - \frac{V_0}{d^2} y \vec{u}_y + \frac{2V_0}{d^2} z \vec{u}_z \right) \end{aligned}$$

Soit $\boxed{\vec{F} = e \frac{V_0}{d^2} (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y - 2z \vec{u}_z)}$

R2. Quelle est la position d'équilibre de l'électron ? Est-elle stable ?

Solution: L'électron, étudié dans le référentiel du laboratoire galiléen, est soumis uniquement à \vec{F} .

L'électron est à l'équilibre quand $\vec{F} = \vec{0}$, soit en $\boxed{x = y = z = 0}$ (à l'origine du repère).

Dans la direction de l'axe (Ox) , si on écarte légèrement l'électron selon $+\vec{u}_x$, la force est dirigée selon $+\vec{u}_x$ et tend donc à l'écarter davantage. L'équilibre n'est pas stable dans la direction de l'axe (Ox) . Il en est de même dans la direction de l'axe (Oy) .

À l'inverse, si on écarte légèrement l'électron selon $+\vec{u}_z$, la force est dirigée selon $-\vec{u}_z$ et tend donc à ramener l'électron à la position d'équilibre. La position d'équilibre est donc stable dans la direction de l'axe (Oz) .

R3. Établir les équations différentielles vérifiées par x , y et z .

Quelle est la nature de l'équation différentielle selon l'axe (Oz) ?

Que peut-on dire du mouvement dans cette direction ? En calculer sa caractéristique.

Solution: On applique le PFD à l'électron : $m \vec{a} = \vec{F}$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} m\ddot{x} = \frac{eV_0}{d^2}x \\ m\ddot{y} = \frac{eV_0}{d^2}y \\ m\ddot{z} = -2\frac{eV_0}{d^2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} - \frac{eV_0}{md^2}x = 0 \\ \ddot{y} - \frac{eV_0}{md^2}y = 0 \\ \ddot{z} + 2\frac{eV_0}{md^2}z = 0 \end{cases}$$

L'équation différentielle dans la direction de l'axe (Oz) est celle d'un oscillateur harmonique. L'électron

oscille donc sinusoidalement au cours du temps autour de $z = 0$, à la pulsation $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{md^2}}}$

III Résolution de problèmes

Exercice n°7 Remonte pente

Un remonte-pente est constitué d'un câble auquel les skieurs s'accrochent pour remonter.



Déterminer la puissance du moteur qui entraîne le câble.

Données :

- Longueur totale du câble : 200 m ;
- Distance séparant deux skieurs : 5 m ;
- Dénivelé entre les extrémités du câble : 5 m ;
- Vitesse du câble : $5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.
- Lorsque le ski glisse sur la neige, la réaction tangentielle \vec{R}_T du sol sur le ski est reliée à la réaction normale \vec{R}_N par $\|\vec{R}_T\| = f \|\vec{R}_N\|$ avec $f = 0,10$.

Solution: