Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)

Chapitre n°16 Mouvement d'un solide

Quand on regarde un patineur (ou une patineuse) artistique tournant sur la pointe des patins, on constate que lorsqu'il (ou elle) écarte les bras, la vitesse de rotation diminue, et inversement lorsqu'il (elle) resserre les bras, la vitesse de rotation augmente.
Quelle loi physique permet d'expliquer cette observation ?

Pré-requis

- PCSI : Thème Mouvement et interactions
  - Chapitre n°14. Moment cinétique du point matériel

Objectifs du chapitre

— Définir et décrire le mouvement de translation et le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe dans un référentiel donné.

— Exprimer les grandeurs cinétiques (quantité de mouvement, moment cinétique, énergie cinétique) d'un solide.

— Énoncer les lois du moment cinétique et de la puissance cinétique appliquées à un solide en rotation autour d'un axe fixe.

— Étudier le mouvement d'un pendule pesant et d'un pendule de torsion.

— Étudier un exemple de système déformable.

Plan du cours

Ai-je bien appris mon cours ?

1 – 🙂 – 🙁 – Qu'est-ce qu'un solide ?

2 – 🙂 – 🙁 – Définir le mouvement de translation d'un solide dans un référentiel. Qu'est-ce qu'une translation rectiligne ? circulaire ?

3 – 🙂 – 🙁 – Quel est le mouvement d'un point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe ?

4 – 🙂 – 🙁 – Exprimer la vitesse d'un point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.

5 – 🙂 – 🙁 – Donner la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie.

6 – 🙂 – 🙁 – Quelle est l'unité du moment d'inertie. Que quantifie le moment d'inertie ?

7 – 🙂 – 🙁 – Qu'est-ce qu'un couple ?

8 – 🙂 – 🙁 – Qu'est-ce qu'une liaison pivot ? Comment est le moment par rapport à l'axe de rotation qu'elle peut produire ?

9 – 🙂 – 🙁 – Qu'est-ce qu'une liaison pivot parfaite ? Que peut-on dire de son moment par rapport à l'axe de rotation ?

10 – 🙂 – 🙁 – Énoncer le TMC scalaire par rapport à l'axe de rotation pour un solide en rotation.

11 – 🙂 – 🙁 – Établir l'équation du mouvement du pendule pesant.

12 – 🙂 – 🙁 – Établir l'intégrale première du mouvement du pendule pesant. Identifier les différents termes. Que traduit cette équation ?

13 – 🙂 – 🙁 – Établir l'équation du mouvement du pendule torsion.

14 – 🙂 – 🙁 – Établir l'intégrale première du mouvement du pendule torsion. Identifier les différents termes. Que traduit cette équation ?

15 – 🙂 – 🙁 – Donner la relation entre l'énergie cinétique, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie.

16 – 🙂 – 🙁 – Donner la relation entre la puissance d'une action mécanique, le moment de l'action par rapport à l'axe de rotation et la vitesse angulaire de rotation.

17 – 🙂 – 🙁 – Que peut-on dire de la puissance des actions mécaniques intérieures dans un solide ? dans un système déformable ?

18 – 🙂 – 🙁 – Énoncer le TPC et le TEC pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.

19 – 🙂 – 🙁 – Énoncer le TPC et le TEC pour un système déformable. Que doit-on prendre en compte ?

I Description du mouvement d'un solide

I.1 Solide

I.1.a) Définition

<u>Capacité exigible</u> : Différencier un solide d'un système déformable.

Définition : Solide

Un **<u>solide</u>** est un système matériel indéformable dont les points restent à distance constante les uns des autres :

$$\forall\ A,\ B \in \text{ solide } \ AB = \text{cste}$$

On oppose les solides (indéformables) aux systèmes déformables dont les points peuvent se déplacer les uns aux autres. Les déformations ou les ruptures du solide sont exclues de cette étude.

> **Exemple 1.** Une boule de billard est un solide indéformable tandis qu'un ressort est un système déformable.

I.1.b) Repérage d'un solide

Pour connaître la position d'un point nous avons besoin de connaître trois coordonnées d'espace. Pour un système de N points il est alors nécessaire de connaître $3N$ coordonnées d'espace, cela nécessitera donc un très grand nombre d'équations !
Dans le cas d'un solide indéformable les points étant liés entre eux, leurs mouvements ne sont pas indépendants : la description nécessitera donc moins de variables.
Soient $\mathscr{R}\left(O;\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\right)$ le référentiel d'étude et $\mathscr{R}'\left(O';\overrightarrow{u_{x'}},\overrightarrow{u_{y'}},\overrightarrow{u_{z'}}\right)$ le repère lié au solide. Repérer le solide par rapport à $\mathscr{R}$ revient à repérer le repère $\mathscr{R}'$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}$.
Il faut donc connaître :

- les trois coordonnées d'espace d'un point du solide
- et trois coordonnées angulaires repérant l'orientation du solide par rapport au référentiel $\mathscr{R}$.

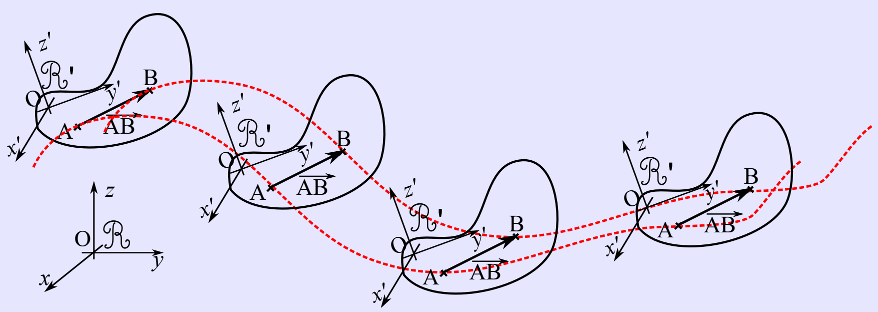
La description du mouvement d'un solide nécessite donc la connaissance de 6 paramètres.
Un **<u>point matériel</u>** est un solide dont les dimensions sont négligeables et dont on peut négliger les mouvements de rotation : les trois seules coordonnées d'espace suffisent alors.

Dans le cadre du programme de 1ère année, nous étudierons **deux mouvements particuliers d'un solide** : le **mouvement de translation** et le **mouvement de rotation autour d'un axe fixe**.

I.2 Translation

Définition : Translation

Un solide $\mathcal{S}$ est en **<u>translation</u>** par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ lorsque les directions du repère lié au solide restent fixes par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ d'étude.
Autrement dit : Le solide est en translation ssi $\forall(A,B)$ liés au solide, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est constant au cours du mouvement.



À retenir

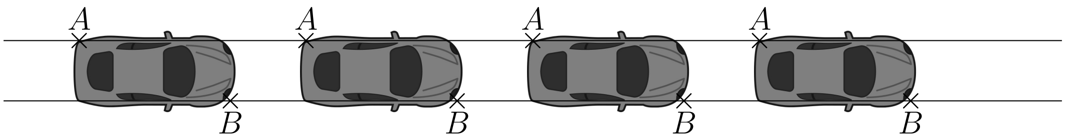
Tous les points d'un solide en translation dans le référentiel $\mathscr{R}$ ont même trajectoire, même vecteur vitesse, même vecteur accélération dans ce référentiel $\mathscr{R}$.
La nature de la translation est donnée par la trajectoire d'un des points du solide.

<u>Capacité exigible</u> : Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire.

Définition : Translation rectiligne

Tous les points d'un solide en **<u>translation rectiligne</u>** dans le référentiel $\mathscr{R}$ d'étude décrivent des trajectoires rectilignes parallèles entre elles dans $\mathscr{R}$.

Ex : Voiture sur une route droite



Définition : Translation circulaire

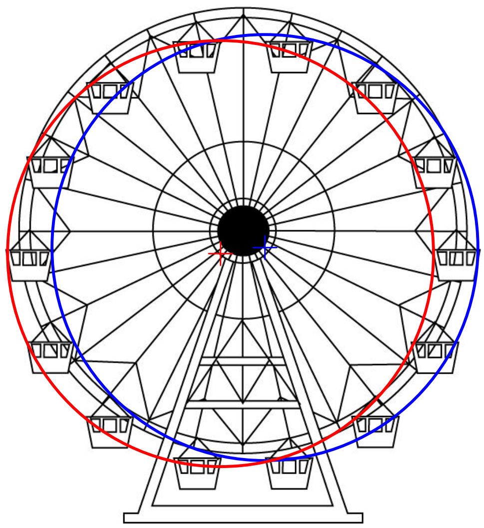
Tous les points d'un solide en **<u>translation circulaire</u>** dans le référentiel $\mathscr{R}$ d'étude décrivent des trajectoires circulaires dans $\mathscr{R}$ de même rayon mais dont les centres sont décalés les uns par rapport aux autres.

Exercice de cours A Mouvement de la nacelle d'une grande roue

La grande roue a été inventée par l'ingénieur G. Ferris lors de l'exposition universelle de Chicago en 1893 pour rivaliser avec la Tour Eiffel construite lors de l'exposition universelle de 1889 à Paris. La grande roue de 1893 contenait 36 nacelles de 60 places chacune.
On se place dans le référentiel $\mathscr{R}$ lié au sol.

Q1. Décrire le mouvement d'une nacelle.

Q2. Exprimer le vecteur vitesse $\overrightarrow{v(O'/\mathscr{R})}$ dans $\mathscr{R}$ du point d'attache O' de la nacelle en fonction du rayon de la grande roue et de sa vitesse de rotation.



Exemple 2. Le référentiel géocentrique est en translation elliptique autour du référentiel héliocentrique.

I.3 Rotation autour d'un axe fixe

Définition : Rotation autour d'un axe fixe

Un solide a un mouvement de **rotation autour d'un axe fixe** par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ si les points liés rigidement au solide et situés sur cet axe sont fixes par rapport à $\mathscr{R}$ et au solide.
L'axe de rotation peut appartenir ou non au solide en rotation.

Exemple 3.

— mouvement d'un CD ou d'un DVD en lecture

— mouvement d'une roue d'un voiture roulant en ligne droite par rapport au référentiel de la voiture.

<u>Capacité exigible</u> : **Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide en rotation autour d'un axe fixe et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.**

Exercice de cours B Rotation propre de la Terre

La Terre est en rotation sur elle-même autour de l'axe Nord-Sud dans le référentiel géocentrique.

Q1. Faire un schéma et tracer la trajectoire d'un point de la surface de la Terre dans le référentiel géocentrique. Comparer les trajectoires des différents points de la surface de la Terre.

Q2. Quel est le système de coordonnées adapté à la description du mouvement de ce point dans le référentiel géocentrique ?

Q3. Établir l'expression du vecteur vitesse de ce point en fonction du rayon R_T de la Terre, de la vitesse angulaire Ω_T de rotation et de la latitude λ (angle entre le plan de l'équateur et le vecteur $\overrightarrow{OM}$, où O est le centre de la Terre). Faire l'A.N. pour un point situé à Pont d'Isère ($\lambda = 45°$).

À retenir : Vitesse d'un point d'un solide en rotation

Soit un solide en rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'axe de rotation $\Delta = (0; \overrightarrow{u_\Delta})$, fixe dans le référentiel d'étude $\mathscr{R}$ et un point M appartenant au solide. On note H son projeté orthogonal sur l'axe de rotation. M **décrit un cercle de centre** H **et d'axe** Δ**.**
Le vecteur vitesse du point M, s'écrit, en utilisant les coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = r\omega\overrightarrow{u_\theta}$$

où $r = \left\|\overrightarrow{HM}\right\|$, $\overrightarrow{\omega} = \omega\overrightarrow{u_\Delta}$ et $\omega = \dot{\theta}$.

I.4 Comment reconnaître la nature du mouvement d'un solide ?

Méthode : Comment reconnaître la nature du mouvement d'un solide $\mathcal{S}$?

Prendre deux points A et B du solide $\mathcal{S}$ étudié.

- Si $\forall A, B \in \mathcal{S}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur constant au cours du mouvement, alors le solide $\mathcal{S}$ est en translation dans le référentiel $\mathscr{R}$.
  - Si la trajectoire de A (et B) est rectiligne, il s'agit d'une **translation rectiligne**.
  - Si A et B décrivent un cercle de même rayon et de centres différents, il s'agit d'une **translation circulaire**.
- Si A et B ont un mouvement circulaire dont les centres sont sur le même axe et de rayons a priori différents alors $\mathcal{S}$ est en **rotation** dans le référentiel $\mathscr{R}$ et l'axe de rotation passe par le centre commun des cercles.

Attention − Erreur à ne pas commettre

Ne pas confondre translation circulaire et rotation.

REMARQUES

Le mouvement le plus général d'un solide est la combinaison d'une translation et d'une rotation : mouvement du référentiel terrestre par rapport au référentiel héliocentrique ou le mouvement de la roue d'une voiture par rapport au référentiel terrestre.

II Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation

II.1 Moment cinétique d'un système de points

II.1.a) Définition

Définition : Moment cinétique d'un système de points

Le **moment cinétique du système** $\mathcal{S} = \left\{M_i(m_i)\right\}_{i\in[1,n]}$ **par rapport à un axe orienté** $\Delta = (O;\overrightarrow{u_\Delta})$ **dans le référentiel** $\mathscr{R}$ est la somme des moments cinétiques de chacun des points $M_i(m_i)$ par rapport à Δ :

$$L_\Delta(\mathcal{S}/\mathscr{R}) = \sum_{i=1}^{n} L_\Delta(M_i/\mathscr{R}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{OM_i}\wedge m_i\overrightarrow{v(M_i/\mathscr{R})}\right)\cdot\overrightarrow{u_\Delta}$$

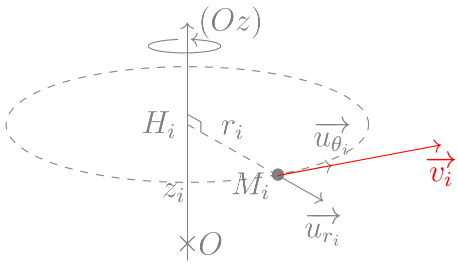
II.1.b) Moment cinétique d'un solide en rotation

On étudie un solide en rotation autour d'un axe (Oz) fixe dans le référentiel $\mathscr{R}$ d'étude, à la vitesse angulaire ω.

Les points M_i du solide décrivent des cercles de centre H_i, projeté orthogonal de M_i sur l'axe de rotation, et de rayon $r_i = H_iM_i$.

On repère les points M_i par leurs coordonnées cylindriques : (r_i, θ_i, z_i).

On a : $\overrightarrow{OM_i} = r_i\overrightarrow{u_{r_i}} + z_i\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{v(M_i/\mathscr{R})} = r_i\dot{\theta}_i\overrightarrow{u_{\theta_i}} = r_i\omega\overrightarrow{u_{\theta_i}}$



Le moment cinétique d'un point M_i du solide est :

$$\begin{aligned}
L_{(Oz)}(M_i/\mathscr{R}) &= \left(\overrightarrow{OM_i}\wedge m_i\overrightarrow{v(M_i/\mathscr{R})}\right)\cdot\overrightarrow{u_z}\\
L_{(Oz)}(M_i/\mathscr{R}) &= \left(\left(r_i\overrightarrow{u_{r_i}} + z_i\overrightarrow{u_z}\right)\wedge m_ir_i\omega\overrightarrow{u_{\theta_i}}\right)\cdot\overrightarrow{u_z}\\
L_{(Oz)}(M_i/\mathscr{R}) &= m_i\left(r_i^2\omega\overrightarrow{u_z} - z_ir_i\omega\overrightarrow{u_{r_i}}\right)\cdot\overrightarrow{u_z}\\
\text{or } \overrightarrow{u_{r_i}}\perp\overrightarrow{u_z}\text{ , donc } L_{(Oz)}(M_i/\mathscr{R}) &= m_ir_i^2\omega
\end{aligned}$$

Donc le moment cinétique du solide est :

$$\begin{aligned}
L_{(Oz)}(\mathcal{S}/\mathscr{R}) &= \sum_i L_{(Oz)}(M_i/\mathscr{R})\\
L_{(Oz)}(\mathcal{S}/\mathscr{R}) &= \sum_i m_ir_i^2\omega\\
L_{(Oz)}(\mathcal{S}/\mathscr{R}) &= \underbrace{\sum_i (m_ir_i^2)}_{\underline{\text{moment d'inertie}}\,:\,J_{(Oz)}}\times\omega
\end{aligned}$$

<u>Capacité exigible</u> : **Exploiter la relation pour le solide entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni. Maîtriser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.**

À retenir : Moment cinétique par rapport à l'axe de rotation du solide

Le **moment cinétique d'un solide $\mathcal{S}$ en rotation autour de l'axe fixe Δ à la vitesse angulaire ω, par rapport à l'axe orienté $\Delta = \left(O; \overrightarrow{u_\Delta}\right)$** s'écrit :

$$L_\Delta(\mathcal{S}) = J_\Delta(\mathcal{S}) \times \omega$$

avec $J_\Delta(\mathcal{S})$ (en kg $\cdot$ m^2) le **moment d'inertie du solide $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe de rotation Δ**.
$J_\Delta(\mathcal{S})$ est un nombre réel strictement positif.
$L_\Delta(\mathcal{S})$ est positif si la rotation du solide a lieu dans le sens direct autour de Δ ($\omega > 0$).
$L_\Delta(\mathcal{S})$ est négatif si la rotation du solide a lieu dans le sens indirect autour de Δ ($\omega < 0$).

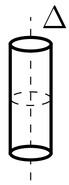
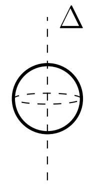
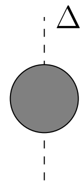
II.1.c) Moment d'inertie

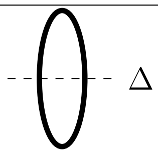
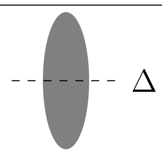
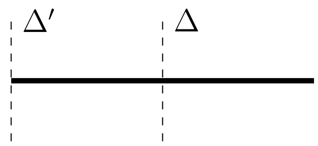
Capacité exigible : Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
D'après la définition du moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ, on constate que les points situés sur l'axe Δ (distance $r_i = 0$) ne participent pas au moment d'inertie (ceci est lié au fait que les points situés sur l'axe sont fixes dans le référentiel $\mathscr{R}$), tandis que les points les plus éloignés de l'axe de rotation contribuent de façon la plus importante.

À retenir : Moment d'inertie

Le moment d'inertie mesure l'**inertie d'un objet** (résistance au changement) **à être mis en rotation** : il est d'autant plus difficile de mettre en rotation un objet de moment d'inertie élevé.
J_Δ quantifie la répartition de la masse du solide par rapport à l'axe de rotation Δ du solide.
Le moment d'inertie est d'autant plus élevé que la masse du solide est éloignée de l'axe de rotation.

On donne les moments d'inertie par rapport à l'axe Δ pour des solides homogènes de masse totale m :

cylindre vide de rayon R	cylindre plein de rayon R	sphère (vide) de rayon R	boule (pleine) de rayon R
			
$J_\Delta = mR^2$	$J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2$	$J_\Delta = mR^2$	$J_\Delta = \frac{2}{5}mR^2$

anneau de rayon R	disque de rayon R	barre de longueur L
		
$J_\Delta = mR^2$	$J_\Delta = \frac{mR^2}{2}$	$J_{\Delta'} = \frac{1}{3}mL^2$ $\quad J_\Delta = \frac{1}{12}mL^2$

- Dans le cylindre vide de masse m, toute la masse est située à la distance R de l'axe Δ. Dans le cylindre plein, cette même masse est répartie entre l'axe de rotation et la distance R, la masse est donc répartie à plus faible distance de l'axe de rotation. Le moment d'inertie du cylindre plein est donc plus faible que celui du cylindre creux.
- Ce sont les mêmes raisons pour la sphère/boule et l'anneau/le disque.
- Dans le cas de la barre de longueur L, par rapport à l'axe Δ, la masse est située au plus à la distance $\frac{L}{2}$, tandis que par rapport à l'axe Δ', la masse est située jusqu'à la distance L. C'est pour cela que le moment d'inertie par rapport à Δ' est supérieur à celui par rapport à Δ.

II.2 Moment des actions mécaniques

Rappel pour un point matériel : le moment d'une **force** $\overrightarrow{F}$ **s'exerçant sur le point matériel** M par rapport à un point O est défini par $\overrightarrow{\mathscr{M}_O(\overrightarrow{F})} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$

II.2.a) Moment des actions mécaniques extérieures pour un solide

Le moment des forces extérieures par rapport au point quelconque O est la somme des moments des différentes forces extérieures qui s'exercent sur chacun des points du solide. **De façon générale, le moment des actions extérieures doit se calculer en sommant les moments des actions extérieures s'exerçant sur chacun des points du solide.**

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_O^{\text{tot}}} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{F_i^{\text{ext}}}$$

Attention
Le moment résultant n'est pas a priori égal au moment de la résultante, car les points d'application ne sont pas les mêmes.

Pour une force volumique $\overrightarrow{F_{\text{vol}}}$ s'appliquant de manière uniforme en tout point du solide, le moment résultant s'exprime :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F_{\text{vol}}}) = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{F_{\text{vol}}}$$

Moment du poids : $\overrightarrow{\mathscr{M}_O(\text{poids})} = \sum_i \left(\overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\overrightarrow{g}\right) = \left(\sum_i m_i\overrightarrow{OM_i}\right) \wedge \overrightarrow{g} = m\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{g}$, par définition du centre d'inertie G.

À retenir : Moment du poids
L'action de la pesanteur sur un système $\mathcal{S}$ de masse m peut être décrite comme **une unique force** $m\overrightarrow{g}$ **appliquée au centre d'inertie** G **du système**. Le moment du poids par rapport au point O s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\text{poids}) = \overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{g}$$

II.2.b) Moment des actions mécaniques intérieures

Moment des actions mécaniques intérieures s'exerçant entre deux points P et Q :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_{O,qp}} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{f_{Q\to P}} + \overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{f_{P\to Q}}$$

D'après la 3e loi de Newton $\overrightarrow{f_{P\to Q}} = -\overrightarrow{f_{Q\to P}}$, donc $\overrightarrow{\mathscr{M}_{O,qp}} = \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\right) \wedge \overrightarrow{f_{Q\to P}} = \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{f_{Q\to P}}$

D'après la 3e loi de Newton, $\overrightarrow{f_{Q\to P}}$ est portée par la droite (PQ), donc $\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{f_{Q\to P}} = \overrightarrow{0}$.

À retenir : Moments des actions mécaniques intérieures
La résultante des actions mécaniques intérieures et le moment résultant des actions mécaniques intérieures d'un système de points (qu'il soit déformable ou indéformable) est nul.

II.3 Couple

<u>**Capacité exigible**</u> : **Définir un couple.**

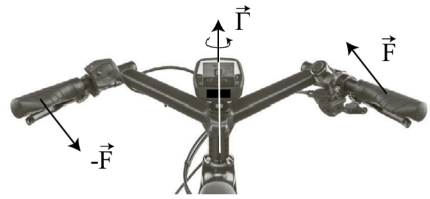
Certaines actions mécaniques, bien que de résultante nulle, peuvent mettre en rotation un solide, elles n'ont donc pas un moment résultant nul. Si vous tenez un guidon de vélo de façon symétrique, et que vous exercez de chaque côté une force de même norme mais opposées, que vaut la résultante ? que se passe-t-il ?

Définition : Couple

Un **couple** est un ensemble d'actions mécaniques de **résultante nulle** et de **moment non nul**.
Par abus de langage, « couple » désignera souvent le moment du couple, et sera souvent noté $\overrightarrow{\Gamma}$.
Le moment d'un couple est indépendant du point par rapport auquel on le calcule.

Exemple 4.

Les mains de part et d'autre du guidon exercent une force $\overrightarrow{F}$, chacune opposée à l'autre. Si la somme de ces vecteurs est nul, l'action de ces forces induit la rotation du guidon.



Résultant des forces s'exerçant sur le guidon : $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} = \overrightarrow{0}$, car les deux forces sont opposées.
Moment résultant des forces s'exerçant sur le guidon :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{M}_O}^{\text{tot}} &= \overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F_A}) + \overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F_B}) \\
&= \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_B} \\
&= \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F} + (-\overrightarrow{OA}) \wedge (-\overrightarrow{F}) \\
&= 2\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F} \\
&= 2LF\overrightarrow{u_z} \neq \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

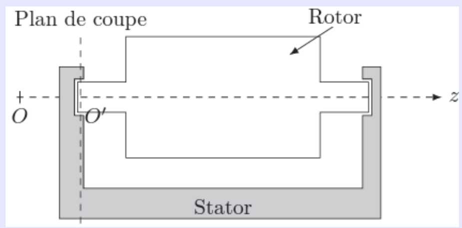
II.4 Liaison pivot

Capacité exigible : **Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle produit.**

Définition : Liaison pivot

Une **liaison pivot** d'axe Δ entre deux solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ est une liaison n'autorisant qu'une rotation de $\mathcal{S}_2$ par rapport à $\mathcal{S}_1$ autour d'un seul axe Δ, fixe par rapport à $\mathcal{S}_1$.

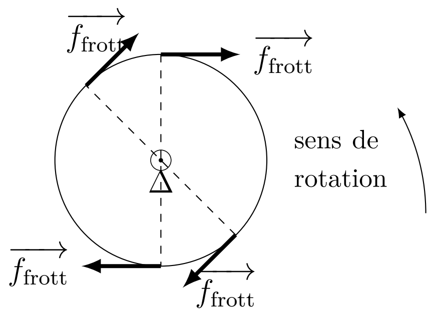
Si $\mathcal{S}_1$ est fixe dans $\mathscr{R}$, alors c'est le stator, et $\mathcal{S}_2$ est le rotor.



La liaison pivot peut être réalisée en emboîtant deux cylindres sur le même axe et en réalisant des butées pour empêcher les cylindres de coulisser le long de leur axe commun.

Moment produit par la liaison pivot :
La réalisation d'une liaison pivot donne naissance à deux types d'**actions mécaniques** :

- Les butées exercent des forces qui sont colinéaires à l'axe Δ de rotation.
  Le moment de ces forces par rapport à l'axe orienté Δ est nul :
  $\mathscr{M}_\Delta(\text{butée}) = 0$
- Le contact entre les deux cylindres conduit à l'existence de forces de frottement qui sont orthoradiales.
  Ces forces orthoradiales engendrent un couple de frottement dont le moment scalaire par rapport à l'axe orienté Δ est non nul : $\mathscr{M}_\Delta(\text{frott orthoradiaux}) \neq 0$.



Le moment scalaire de liaison pivot n'est pas nul : $\boxed{\mathscr{M}_\Delta(\text{liaison pivot}) \neq 0}$, avec $\mathscr{M}_\Delta$ de signe opposé à ω, c'est-à-dire $\mathscr{M}_\Delta < 0$ si la rotation a lieu dans le sens direct par rapport à Δ ($\omega > 0$) et $\mathscr{M}_\Delta > 0$ si la rotation a lieu dans le sens indirect par rapport à Δ ($\omega < 0$) .

Définition : Liaison pivot parfaite

La **liaison pivot d'axe Δ est parfaite** si les frottements sont négligeables. Alors, le moment scalaire de l'action de contact entre les deux solides par rapport à l'axe de rotation Δ est nul :

$$\mathscr{M}_\Delta(\text{liaison pivot parfaite}) = 0$$

II.5 Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation

Capacité exigible : **Énoncer et utiliser la loi scalaire du moment cinétique appliquée au solide en rotation autour d'un axe fixe orienté dans un référentiel galiléen.**

- Système : solide $\mathcal{S}$, en rotation autour d'un axe orienté $\Delta = \left(O;\overrightarrow{u_\Delta}\right)$ fixe dans le référentiel $\mathscr{R}$ d'étude.
- Référentiel : $\mathscr{R}$ (terrestre) pouvant être considéré galiléen à l'échelle de l'expérience.
- Bilan des actions mécaniques extérieures.

À retenir : Théorème du moment cinétique scalaire

Le **théorème du moment cinétique au solide $\mathcal{S}$ en rotation autour d'un axe Δ fixe dans $\mathscr{R}$ galiléen** s'écrit **par rapport à l'axe de rotation orienté $\Delta = \left(O;\overrightarrow{u_\Delta}\right)$** :

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta(\mathcal{S}/\mathscr{R})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}(J_\Delta\omega)}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}} \quad \Leftrightarrow \quad J_\Delta\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}}$$

avec J_Δ, le moment d'inertie de $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe orienté Δ, constant pour un solide (indéformable) et $\sum \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}}$ le moment résultant des actions mécaniques extérieures par rapport à l'axe orienté Δ.

III Application du TMC

III.1 Méthode d'application du TMC

Méthode

① Définir le **système** étudié : Solide de masse m et de moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe de rotation ($\Delta = (Ox), (Oy), (Oz)$).

② Préciser le **référentiel d'étude** *(supposé galiléen en 1ère année)*.

③ Faire un **schéma clair** et de taille suffisante.

④ Faire un **bilan des actions mécaniques** précis et complet. ⚠ Attention à **ne pas oublier les actions mécaniques de liaison**, notamment l'**action de la liaison pivot**.

⑤ Écrire la **loi du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation** du référentiel galiléen.
- Exprimer le moment cinétique par rapport à l'axe de rotation : $L_\Delta = J_\Delta\omega$
- Calculer la dérivée temporelle du moment cinétique calculé précédemment.
- Exprimer le moment des différentes actions mécaniques par rapport à l'axe de rotation Δ, en utilisant le **bras de levier** (ex : pour les forces connues comme le poids) ou l'expression fournie par l'énoncé (ex : action d'une liaison pivot non parfaite).

⑥ En déduire l'équation du mouvement : équation différentielle vérifiée par θ, avec $\dot{\theta} = \omega$.

III.2 Intégrale première du mouvement

Définition : Intégrale première du mouvement

L'intégrale première du mouvement, pour un mouvement à un degré de liberté, est une relation entre la variable d'espace, sa dérivée et les constantes du problème.

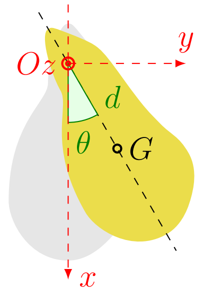
Méthode : Comment obtenir l'intégrale première du mouvement ?

1. Écrire l'équation du mouvement non linéarisée obtenue directement par application du TMC.
2. Multiplier l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$.
3. Calculer une primitive (à une constante près !) par rapport au temps de cette équation.
4. Interpréter l'équation obtenue, en terme d'énergie.

III.3 Pendule pesant

III.3.a) Mise en équation

Un **pendule pesant** est un solide de masse m de forme quelconque mobile dans le champ de pesanteur terrestre autour d'un axe horizontal fixe ne passant pas par son centre de gravité G.
On note (Oz) l'axe de rotation du solide et $J_{(Oz)}$ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oz).
On suppose que la liaison entre le solide et le référentiel terrestre est une liaison pivot parfaite d'axe (Oz). Et on néglige les frottements dus à l'air.
On repère la position du solide par l'angle θ que fait la droite (OG) avec la verticale descendante (Ox).
On note d la distance OG.



Capacité exigible : **Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement.**

Exemple de cours à maîtriser : le pendule pesant

Équation du mouvement

Q1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

Intégrale première du mouvement

Q2. Multiplier l'équation différentielle obtenue précédemment par $\dot{\theta}$, puis en en calculer une primitive pour en déduire une relation entre $\dot{\theta}$ et θ. Il s'agit d'une **intégrale première du mouvement**.

Q3. Identifier les termes de l'intégrale première du mouvement avec une énergie cinétique et une énergie potentielle. Que traduit cette intégrale première du mouvement ?

Oscillations de faible amplitude

Q4. Linéariser l'équation différentielle du mouvement établie précédemment dans le cas des oscillations de faible amplitude. Quelle équation du mouvement reconnaît-on ?

Q5. Résoudre l'équation du mouvement dans le cas des petites oscillations et donner l'expression de la période propre. Dépend-elle de l'amplitude du mouvement ?

Q6. Proposer un protocole pour mesurer le moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz).

III.3.b) Résolution numérique

Capacité numérique : **À l'aide d'un langage de programmation, mettre en évidence le non isochronisme des oscillations.**

L'équation différentielle du pendule pesant $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$ ne peut pas être résolue analytiquement. On peut la résoudre numériquement à l'aide de l'algorithme d'Euler (le plus simple à mettre en œuvre, mais aussi le moins précis) ou à l'aide d'algorithmes plus évolués qui sont déjà programmés dans certaines bibliothèques python.

Cependant, la méthode d'Euler, ou les autres algorithmes de résolution numérique permet de résoudre numériquement des équations différentielles du premier ordre du type $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = f(t, X)$ avec $X(t_0) = X_0$ (CI).

Résolution numérique d'une équation différentielle du 2e ordre non linéaire

Q1. Réécrire l'équation différentielle du mouvement du pendule simple sous la forme d'un problème du premier ordre c'est-à-dire $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = f(t, X)$, en posant $X = \begin{pmatrix} \theta \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$.

Q2. Écrire la fonction `f_pendule(t,X)` qui définit l'équation différentielle selon la relation précédente.

Q3. Utiliser la documentation de `solve_ivp` pour résoudre l'équation du pendule simple.

Q4. Écrire les instructions permettant de tracer la courbe de θ en fonction du temps pour $m = 100$ g, $\ell = 10$ cm. On prendra $t_0 = 0$, $t_f = 4T_0$ (T_0 est la période propre des petites oscillations) , $N = 10000$ pas de calculs et successivement $\theta(0) = 0,1$ rad; $0,3$ rad; 1 rad; 2 rad; 2.8 rad

Q5. Commenter les courbes obtenues. Qu'observe-t-on pour les faibles amplitudes ? Que se passe-t-il quand l'amplitude du mouvement n'est plus petite devant 1 rad ? Le mouvement est-il toujours harmonique ? A-t-on toujours isochronisme des oscillations ?

i- Réécriture de l'équation différentielle

On réécrit l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$, sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = f(t, X)$

Pour cela, on introduit $X = \begin{pmatrix} \theta \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \end{pmatrix} \\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ -\omega_0^2 \sin(\theta) \end{pmatrix} \\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} &= f\left(t, \begin{pmatrix} \theta \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}\right) \\
\text{avec } f(t, X) = f\left(t, \begin{pmatrix} \theta \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ -\omega_0^2 \sin(\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On peut écrire la fonction `f_pendule(t,X)` qui définit l'équation différentielle.

```
def f_pendule(t,X):
    # X tableau, où X[0] est theta(t), X[1] est dtheta/dt(t)
    f0 = X[1]     # 1er élément : dérivée de theta(t)
    f1 = -w0**2*np.sin(X[0]) # 2è élément : dérivée seconde donnée par l'ED
    return np.array([f0,f1]) # renvoie la liste des deux fonctions
```

ii- Utilisation de `solve_ivp`

On utilise la fonction `solve_ivp` qui permet de résoudre les équations différentielles sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}y}{dt} = f(t, y)$$

avec la condition initiale $y(0) = y_0$, où y est un vecteur de taille N et f une fonction de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$. Dans le cas du pendule simple, la fonction f va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. La fonction `solve_ivp` attend 4 variables :

— la fonction $f(t, y)$

— l'intervalle de temps de résolution

— le vecteur de condition initiale y_0

— le tableau des instants de résolution

```
resol=sci.solve_ivp(f_pendule,(t0,tf),np.array([2.8,0]),t_eval=liste_t)
#resol.t contient les instants de résolutions
#resol.y est le tableau des valeurs de y, chaque colonne correspondant à un
   instant de résolution. La 1ière ligne correspond ici aux valeurs de theta,
    la 2ième ligne aux valeurs de dtheta/dt
theta=resol.y[0]
dtheta_sur_dt=resol.y[1]
```

iii- Résolution et commentaires

Pour résoudre l'équation différentielle, il est nécessaire de commencer par définir les différents paramètres utiles :

```
# Définition des paramètres
m=0.1 # kg
g=9.81 # N/kg
l=0.10 # m : taille de la barre
J=1/12*m*l**2 # moment d'inertie
w0=np.sqrt(m*g*l/J) # pulsation propre
t0 = 0
tf = 4*2*np.pi/w0 # choix de tf pour représenter 4 périodes pour les petites
    oscillations
N=10000  # nombre de pas de calculs
liste_t = np.linspace(                          ) # liste des N+1 instants
   de calculs entre t0 et tf
```

Puis, on effectue la résolution à proprement parlé en utilisant `solve_ivp` à notre problème avec les paramètres définis précédemment.

```
# résolution
theta0=2 # rad -> à choisir
dtheta0=0 # rad/s -> à choisir
CI= np.array([theta0,dtheta0]) # conditions initiales
solution =                                       # on utilise solve_ivp
#récupération des angles aux différents instants
theta=
```

Enfin, pour visualiser l'évolution temporelle, on représente la courbe de θ en fonction du temps.

```
# tracé de l'évolution de theta(t)
plt.plot(liste_t,theta)
plt.xlabel(' t(s)') # abscisse
plt.ylabel('theta (t)')  # ordonnée
plt.title('theta en fonction du temps pour le pendule pesant')
plt.show()
```

Pour identifier le non isochronisme des oscillations, on effectue la résolution pour différentes valeurs de la vitesse angulaires initiales (ou de l'angle initial...).

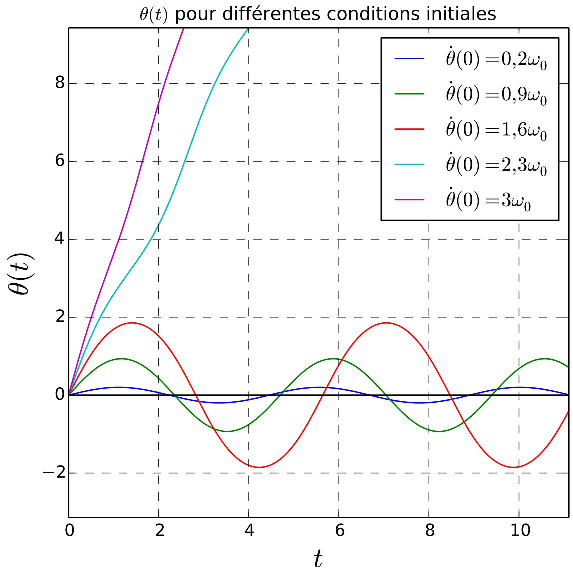


FIGURE 1 – Évolutions de θ en fonction du temps pour différentes CI.

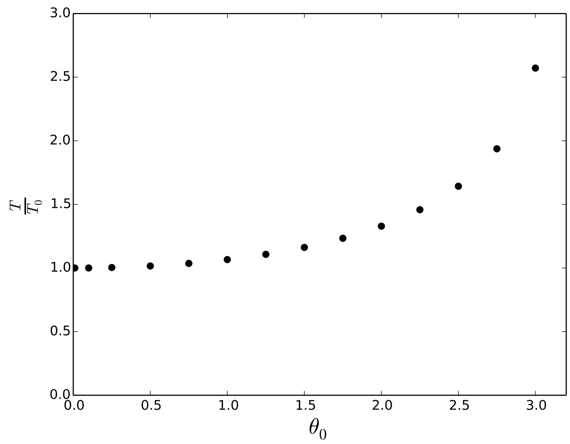
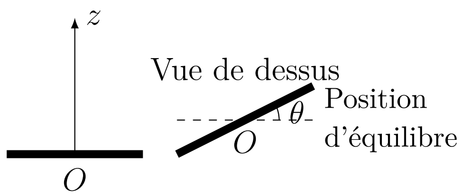


FIGURE 2 – Rapport de la période T sur la période propre T_0 des petites oscillations en fonction de l'amplitude θ_0 du mouvement.

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/periode_pendule.html

III.4 Pendule de torsion

Le pendule de torsion est constitué d'une barre homogène de longueur L, de masse m et fixée en un point O (confondu avec le centre d'inertie de la barre) à un fil.
On fait tourner le fil sur lui-même de manière à le « tordre » et on lâche sans vitesse initiale et la barre se met à tourner autour de l'axe (Oz).



À retenir : Couple de torsion

L'action du fil sur la barre est modélisée par un couple de rappel de moment par rapport à l'axe du fil :

$$\Gamma = -C\theta$$

appelé **couple de torsion** qui est proportionnel à l'angle de torsion θ par rapport à la position d'équilibre. C (positive) est la constante de torsion, en $\mathrm{N \cdot m} = \mathrm{J}$.

Capacité exigible : **Établir l'équation du mouvement du pendule de torsion. Établir une intégrale première du mouvement.**

Exemple de cours à maîtriser : le pendule de torsion

Le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe $(O;\overrightarrow{u_z})$ est noté J et vaut $J = \dfrac{1}{12}mL^2$. On néglige tous les frottements.

Q1. Établir l'équation différentielle vérifiée par θ.

Q2. À partir de l'équation différentielle précédente, déterminer une intégrale première du mouvement.

Q3. Identifier les différents termes : énergie cinétique et énergie potentielle de torsion. Interpréter.

IV Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation

IV.1 Énergie cinétique

IV.1.a) Définition générale

Définition : Énergie cinétique d'un solide

L'**énergie cinétique** d'un système $\mathcal{S} = \{M_i(m_i)\}_{i\in[1,n]}$ est égale à la somme des énergies cinétiques des points qui composent le système $\mathscr{E}_c(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left\| \overrightarrow{v_i} \right\|^2$

IV.1.b) Solide en translation

À retenir : Énergie cinétique d'un solide en translation

Pour un solide, de masse m, en translation, tous les points ont même mouvement, donc ils ont tous le même vecteur vitesse $\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v(G)}$.

L'**énergie cinétique d'un solide de masse m en translation** s'écrit

$$\mathscr{E}_c(\mathcal{S}/\mathscr{R}) = \frac{1}{2} m \left\| \overrightarrow{v(G/\mathscr{R})} \right\|^2$$

Un solide en translation s'étudie comme un point matériel confondu avec le centre d'inertie G du solide qui concentrerait toute la masse du solide.

IV.1.c) Solide en rotation autour d'un axe fixe

Capacité exigible : **Utiliser la relation $\mathscr{E}_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$, l'expression de J_Δ étant fournie.**

Exprimons l'énergie cinétique du solide en rotation autour de l'axe Δ, comme nous l'avons fait pour le moment cinétique :

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_c(\mathcal{S}/\mathscr{R}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left\| \overrightarrow{v_i} \right\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left\| r_i \omega \overrightarrow{u_{\theta_i}} \right\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left(m_i r_i^2 \omega^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right)}_{=J_\Delta} \omega^2
\end{aligned}$$

À retenir : Énergie cinétique d'un solide en rotation

L'énergie cinétique d'un solide $\mathcal{S}$ en rotation autour d'un axe $\Delta = (0; \overrightarrow{u_\Delta})$ fixe dans le référentiel $\mathscr{R}$ d'étude, à la vitesse angulaire de rotation ω, s'écrit :

$$\mathscr{E}_c(\mathcal{S}/\mathscr{R}) = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$$

avec J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ de rotation.

IV.2 Puissance et travail des actions mécaniques

IV.2.a) Puissance et travail des actions mécaniques extérieures

La puissance des forces extérieures est la somme des puissances des actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur chaque point du solide : $\mathscr{P}^{\text{ext}} = \sum_i \left(\overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}} \cdot \overrightarrow{v_i}\right)$, avec $\overrightarrow{v_i}$ le vecteur vitesse du point M_i sur lequel s'exerce la force $\overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}}$.
Pour un solide en rotation autour de l'axe (Oz), et en utilisant les coordonnées cylindriques d'axe (Oz) pour repérer le point M_i : $\overrightarrow{OM_i} = r_i\overrightarrow{u_{r_i}} + z_i\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{v_i} = r_i\omega\overrightarrow{u_{\theta_i}}$;
La puissance de la force $\overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}}$ subie par M_i s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}\left(\overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}}\right) &= \overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}} \cdot \overrightarrow{v_i} \\
\mathscr{P}\left(\overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}}\right) &= F_{i,\theta} \times r_i\omega
\end{aligned}$$

Le moment de la force $\overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}}$ subie par M_i par rapport à l'axe (Oz) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}_{(Oz)}\left(\overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}}\right) &= \left(\overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}}\right) \cdot \overrightarrow{u_z} \\
\mathscr{M}_{(Oz)}\left(\overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}}\right) &= \left(\begin{pmatrix} r_i \\ 0 \\ z_i \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_{i,r} \\ F_{i,\theta} \\ F_{i,z} \end{pmatrix}\right) \cdot \overrightarrow{u_z} \\
&= \begin{pmatrix} -F_{i,\theta}z_i \\ z_iF_{i,r} - r_iF_{i,z} \\ r_iF_{i,\theta} \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{u_z} \\
\mathscr{M}_{(Oz)}\left(\overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}}\right) &= r_iF_{i,\theta}
\end{aligned}$$

Soit $\mathscr{P}\left(\overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}}\right) = \mathscr{M}_{(Oz)}\left(\overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}}\right) \times \omega$

À retenir : Puissance des actions mécaniques extérieures

Soit un solide en rotation autour d'un axe Δ à la vitesse angulaire de rotation $\omega = \dot{\theta}$.
La **puissance d'une action mécanique extérieure** de moment par rapport à l'axe de rotation $\mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}}$ s'écrit :

$$\mathscr{P}^{\text{ext}} = \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}} \times \omega$$

Le **travail d'une action mécanique extérieure** entre $A(t_A, \theta_A)$ et $B(t_B, \theta_B)$:

$$W_{A\to B}^{\text{ext}} = \int_{t_A}^{t_B} \mathscr{P}^{\text{ext}}\mathrm{d}t = \int_{t_A}^{t_B} \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}}\omega\mathrm{d}t = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}}\mathrm{d}\theta$$

Comme celles subies par un point matériel, les actions mécaniques exercées sur un solide peuvent être conservatives. Dans ces cas, il existe une fonction énergie potentielle $\mathscr{E}_p$ tel que $\delta\mathcal{W}^{\text{ext}} = -\mathrm{d}\mathscr{E}_p$.

À retenir : Énergie potentielle de pesanteur

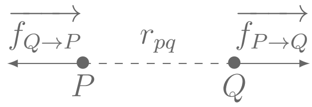
Le poids du système $\mathcal{S}$ de masse m et de centre d'inertie G est une force conservative dont l'énergie potentielle s'écrit

$$\mathscr{E}_{pp} = -m\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{OG} + \text{cste}$$

$$\mathscr{E}_{pp} = \pm mgz_G + \text{cste}$$

IV.2.b) Puissance et travail des actions mécaniques intérieures

Au §III, nous avons vu que la résultante et le moment résultant des actions mécaniques intérieures sont nuls quel que soit le système de points considéré. Qu'en est-il de la puissance des actions mécaniques intérieures ? Considérons deux points P et Q du système matériel $\mathcal{S}$.



Travail élémentaire des actions mécaniques intérieures s'exerçant entre deux points P et Q :
$\delta W_{pq} = \overrightarrow{f_{P\to Q}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{f_{Q\to P}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OP}$
D'après la 3ème loi de Newton : $\overrightarrow{f_{Q\to P}} = -\overrightarrow{f_{P\to Q}}$ et $\overrightarrow{f_{P\to Q}}$ sont dirigées selon le vecteur $\overrightarrow{PQ} = r_{pq}\overrightarrow{u_{pq}}$.
Notons $\overrightarrow{f_{P\to Q}} = f_{pq}\overrightarrow{u_{pq}}$ et donc $\overrightarrow{f_{Q\to P}} = -f_{pq}\overrightarrow{u_{pq}}$

$$\begin{aligned}
\delta W_{pq} &= f_{pq}\overrightarrow{u_{pq}} \cdot \left(\mathrm{d}\overrightarrow{OQ} - \mathrm{d}\overrightarrow{OP}\right) \\
&= f_{pq}\overrightarrow{u_{pq}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{PQ} \\
&= f_{pq}\overrightarrow{u_{pq}} \cdot \mathrm{d}(r_{pq}\overrightarrow{u_{pq}}) \\
&= f_{pq}\overrightarrow{u_{pq}} \cdot \left((\mathrm{d}r_{pq})\overrightarrow{u_{pq}} + r_{pq}\mathrm{d}(\overrightarrow{u_{pq}})\right) \\
&= f_{pq}\mathrm{d}r_{pq} + f_{pq}r_{pq}\overrightarrow{u_{pq}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{u_{pq}}
\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{u_{pq}}$ est un vecteur unitaire, donc $\mathrm{d}(\|\overrightarrow{u_{pq}}\|^2) = 0$. Or $\mathrm{d}(\|\overrightarrow{u_{pq}}\|^2) = 2\overrightarrow{u_{pq}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{u_{pq}}$, donc $\boxed{\overrightarrow{u_{pq}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{u_{pq}} = 0}$

On en déduit : $\delta \mathcal{W}_{pq} = f_{pq}\mathrm{d}r_{pq} \neq 0$ et $\mathscr{P}_{pq} = f_{pq}\dfrac{\mathrm{d}r_{pq}}{\mathrm{d}t} \neq 0$, si r_{pq} n'est pas constant, c'est-à-dire si les points Q et P se déplacent l'un par rapport à l'autre.

> **♥ À retenir : Puissance des actions intérieures à un solide**
> La **puissance des actions mécaniques intérieures d'un solide indéformable** (tous les points restent à une distance constante les uns par rapport aux autres) est **nulle**.

IV.3 Théorèmes de l'énergie et de la puissance cinétiques pour un solide

<u>Capacité exigible</u> : Établir l'équivalence dans le cas d'un solide d'un solide en rotation autour d'un axe fixe entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.

> **♥ À retenir : TPC et TEC pour un solide en rotation**
> Soit $\mathcal{S}$ un <u>solide</u> (<u>système indéformable</u>) que l'on étudie dans un référentiel $\mathscr{R}$ galiléen.
> **<u>Théorème de la puissance cinétique</u>** :
> $$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c(\mathcal{S}/\mathscr{R})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}^{\text{ext}}_{/\mathscr{R}} = \sum \mathscr{M}^{\text{ext}}_{\Delta} \times \omega$$
> **<u>Théorème de l'énergie cinétique entre t_A et t_B</u>** :
> $$\Delta_{t_A\to t_B}\mathscr{E}_c(\mathcal{S}/\mathscr{R}) = \sum \mathcal{W}^{\text{ext}}_{t_A\to t_B}$$
> Avec $\Delta_{t_A\to t_B}\mathscr{E}_c(\mathcal{S}/\mathscr{R})$ la variation de l'énergie cinétique du solide $\mathcal{S}$ par rapport à $\mathscr{R}$ entre les instants t_A et t_B.

Montrons l'équivalence dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe entre la loi scalaire du moment cinétique et celle de l'énergie cinétique.

Énergie cinétique : $\mathscr{E}_c(\mathcal{S}) = \dfrac{1}{2}J_\Delta\omega^2$

Ainsi : $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}J_\Delta\omega^2\right) = J_\Delta\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \times \omega$.

Or, d'après le TMC par rapport à Δ : $J_\Delta\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}^{\text{ext}}_{\Delta}$

Ainsi : $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}^{\text{ext}}_{\Delta} \times \omega$

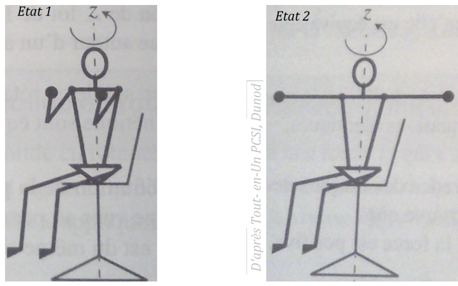
Nous avons montré précédemment que $\mathscr{P}^{\text{ext}} = \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}} \times \omega$.
Donc le TMC par rapport à Δ et le TPC sont équivalentes : on passe de l'une à l'autre en multipliant/divisant par ω.

V Système déformable

Capacité exigible : **Réaliser le bilan énergétique du tabouret d'inertie.**

Exemple de cours à connaître : Tabouret d'inertie

Une personne est assise sur un tabouret dont le siège peut tourner quasiment sans frottement autour d'un axe vertical Δ.
La personne se met en rotation, les bras repliés sur elle-même (état 1), à la vitesse angulaire ω_1.
Ensuite elle détend les bras (état 2) et sa rotation se fait à une vitesse angulaire différente ω_2.
https://www.youtube.com/watch?v=G6XSK72zZJc



Q1. Dans les états initial et final, le système est assimilable à un solide, de moments d'inertie par rapport à l'axe Δ notés J_1 dans l'état initial et J_2 dans l'état final. Comparer J_1 et J_2.

Q2. Que dire du moment cinétique scalaire L_Δ du système {personne-assise du siège} pendant cette opération ?

Q3. Trouver une relation entre les moments d'inertie et les vitesses angulaires initiaux et finaux. Conclure sur les vitesses angulaires.

Q4. Exprimer la variation de l'énergie cinétique, et commenter le résultat.

Q5. L'expérience est plus spectaculaire si la personne tient dans ses mains des haltères. Expliquer pourquoi.

À retenir : Théorèmes énergétiques pour un système déformable

Théorème de la puissance cinétique pour un système déformable :

$$\boxed{\mathscr{P}_{\text{int}} \neq 0}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c(\mathcal{S}/\mathscr{R})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}^{\text{ext}} + \sum \mathscr{P}^{\text{int}}$$

Théorème de l'énergie cinétique entre $A(t_A)$ et $B(t_B)$ pour un système déformable :

$$\boxed{W_{A\to B}^{\text{int}} \neq 0}$$

$$\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_c(\mathcal{S}/\mathscr{R}) = \sum W_{A\to B}^{\text{ext}} + \sum W_{A\to B}^{\text{int}}$$

Il ne faut pas oublier la prise en compte des actions mécaniques intérieures lors de l'étude du mouvement d'un système déformable.