

? À rendre LUNDI 10 mars 2025
Devoir Maison n°16

Travail à faire :

- Exercice n°1 : pour tou.te.s.
- Exercice n°2 ou 3 au choix : le n°2 est très proche du cours (c'est presque du cours pur) et le n°3 est moins facile (obligatoire pour Apollinaire, Avénie, Sokhna, Thibault, Edgar, Émile, Abderrahman, Ronan).
- Les questions marquées d'une * sont facultatives pour Rayhana, Alexis, Keita, Lucas, Florian, Kevin, Clément

Exercice n°1 Pendule pesant et python

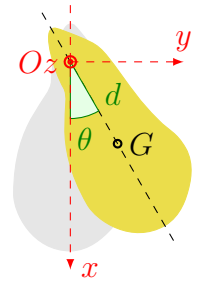
Pour quelques questions, il faudra récupérer le fichier : <https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/83fc-5685139>.
Le code est : 83fc-5685139.

On étudie un pendule pesant constitué d'un solide, de masse m , de moment d'inertie $J_{(Oz)}$ par rapport à l'axe (Oz) de rotation.

On suppose que la liaison entre le solide et le référentiel terrestre est une liaison pivot parfaite d'axe (Oz) . Et on néglige les frottements dus à l'air.

On repère la position du solide par l'angle θ que fait la droite (OG) avec la verticale descendante (Ox) .

On note d la distance OG .



Partie I Mise en équation

- Q1. Donner les expressions du moment cinétique scalaire et de l'énergie cinétique du pendule.
- Q2. Établir l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique par rapport à un axe que l'on précisera.
- Q3. Que devient-elle si les oscillations sont de faible amplitude? Exprimer la période propre T_0 en fonction de m , g , d et J_{Oz} .

Partie II Résolution avec Euler

L'équation différentielle $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$ ne peut pas être résolue littéralement, mais cela peut se faire numériquement. On se propose d'adapter l'algorithme d'Euler, normalement prévue pour une équation du premier ordre pour la résoudre.

Partie II.a) Mise en place de l'algorithme

L'idée est de transformer cette équation différentielle du second ordre en deux équation différentielle du premier ordre. Pour cela, on pose $y = \theta$ et $z = \dot{\theta}$, et on met en œuvre l'approximation d'Euler sur y et z .

On résout (c'est-à-dire détermine θ et $\dot{\theta}$) sur l'intervalle $[0, 5T_0]$ que l'on décompose en n intervalles de largeur h .

- Q4. Exprimer le pas h en fonction de T_0 et n .
- Q5. Avec n intervalles, combien y a-t-il d'instant de résolution au total? Exprimer l'instant t_i (pour $i \in \llbracket 0, \dots \rrbracket$: on complètera les ...) de résolution en fonction de h et i .

On note y_i et z_i les valeurs de y (c'est-à-dire θ) et z (c'est-à-dire $\dot{\theta}$) à l'instant t_i .

Q6. Exprimer $\frac{dy}{dt}$ en fonction de z .

Q7. En rappelant la nature de l'approximation d'Euler, montrer que

$$y_{i+1} = y_i + z_i \times h$$

Q8. Exprimer $\frac{dz}{dt}$ en fonction de $\ddot{\theta}$, puis en fonction de y .

Q9. En déduire la relation de récurrence

$$z_{i+1} = z_i - h\omega_0^2 \sin(y_i)$$

Q10. Expliquer comment à partir des conditions initiales $\theta(0)$ (c'est-à-dire $y(0)$) et $\dot{\theta}(0)$ (c'est-à-dire $z(0)$) on peut déterminer y (c'est-à-dire θ) et z (c'est-à-dire $\dot{\theta}$) à chaque instant t_i .

Partie II.b) Mise en œuvre

Q11. Recopier sur votre feuille le code ci-dessous permettant de résoudre numériquement l'équation différentielle pour $\theta(0) = \pi/2$ et $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$.

```

1 n = #### nombre d'intervalles
2 h = ... # (à compléter) : pas de temps
3 y = ... # (à compléter) : angle initial theta(0)
4 z = ... # (à compléter) : vitesse angulaire initiale dtheta/dt(0)
5 Ly , Lz = [y] , [z] # listes qui contiendrons les valeurs de y et z aux
   différents instants
6 for i in range( ... , ... ) : # (à compléter)
7     y , z = ... , ... # (à compléter) : calculs de y et z à l'instant
   suivant à partir de y et z à l'instant précédent, contenu dans les
   variables y et z avant modification en utilisant les relations de
   récurrences
8     Ly.append(y)
9     Lz.append(z)

```

Q12. * Pourquoi est-il nécessaire de modifier y et z simultanément et non successivement ?

Q13. * Compléter le code sur Capytale.

Q14. * S'amuser à modifier les conditions initiales (notamment la vitesse angulaire initiale) et noter les différentes évolutions observées.

Partie III Période du pendule

On cherche à établir l'expression du pendule pesant dans le cas où les oscillations ne sont pas de faible amplitude.

Partie III.a) Expression de la période

Q15. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur du pendule en fonction de m , g , d et θ .

Q16. Justifier que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement du pendule.

Sachant qu'à $t = 0$, le pendule est lâché avec une vitesse angulaire nulle depuis l'angle $\theta_0 > 0$, montrer que

$$J_{Oz}\dot{\theta}^2 = 2mgd(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$$

Les deux questions suivantes sont obligatoires pour Apollinaire, Avénie, Sokhna, Thibault, Edgar, Émile, Abderrahman, Ronan. Elles sont facultatives pour les autres.

Q17. Justifier que $\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{2mgd}{J_{Oz}}}\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}$ sur $[0, T/2]$ et $\dot{\theta} = +\sqrt{\frac{2mgd}{J_{Oz}}}\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}$ sur $[T/2, T]$.

Q18. En déduire que la période du pendule s'exprime selon :

$$T = \frac{T_0}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} \quad \text{soit} \quad T = \frac{\sqrt{2}T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

Partie III.b) Intégration numérique

L'intégrale précédente ne peut pas être calculée analytiquement.

On cherche à calculer, pour différentes valeurs de θ_0 , la valeur de $\frac{T}{T_0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$.

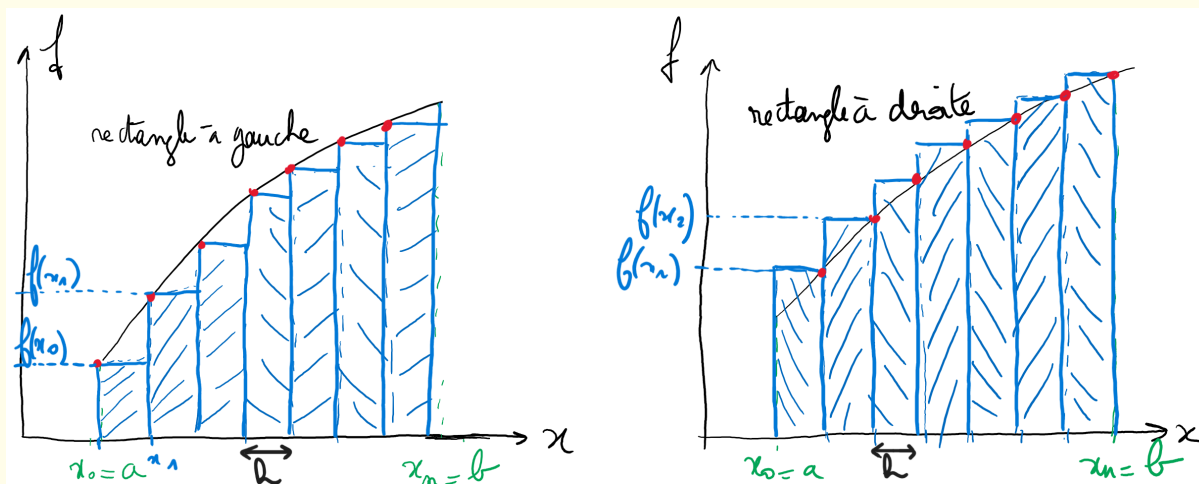
💡 Méthode : Méthode des rectangles pour l'intégration numérique

On souhaite calculer $\int_a^b f(x)dx$ de façon approchée.

On découpe l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de largeur constante $\frac{b-a}{n}$. Pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note ces intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, où $x_i = a + i \times h$.

Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, la fonction f est approchée par une fonction g dont le calcul de l'intégrale est plus simple. À votre programme, vous avez la méthode des rectangles, pour laquelle on approxime la fonction f sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par une fonction constante :

- méthode des rectangles à gauche : f est approchée par sa valeur prise à la borne inférieure de l'intervalle.
- méthode des rectangles à droite : f est approchée par sa valeur prise à la borne supérieure de l'intervalle.
- méthode des rectangles au milieu : f est approchée par sa valeur prise au milieu de l'intervalle.



L'intégrale est alors approchée par la somme des aires de chaque rectangle, de largeur $h = \frac{b-a}{n}$.

• Pour la méthode des rectangles à gauche : $I \approx \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) \times h)$, soit $I \approx h \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$, avec $x_i = a + i \times h$.

• Pour la méthode des rectangles à droite : $I \approx \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) \times h)$, soit $I \approx h \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) = h \times \sum_{i=1}^n f(x_i)$, avec $x_i = a + i \times h$.

Comment choisir n ?

- Le résultat est d'autant plus précis que n choisi est grand.
- Cependant de par la représentation des réels par des flottants en machine (en python : sur 64 bits), deux réels « trop proches » sont codés de la même façon (sur 64 bits, le plus petit écart entre deux réels codés distinctement est de 2×10^{-16}).
- La méthode des rectangles est de complexité linéaire en n , le temps de calcul reste donc raisonnable.

Q19. Recopier et compléter le code ci-dessous permettant de calculer la valeur approchée de

$$\int_0^{\theta_0} f(\theta) d\theta = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

par la méthode des rectangle à gauche, c'est-à-dire en calculant la somme $S = h \times \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \times h)$, où f est une fonction à identifier dans le cadre du problème étudié.

```

1 theta0 = ##### valeur à choisir
2 n = ##### nombre d'intervalles
3 a =      # (à compléter) : borne inférieure
4 b =      # (à compléter) : borne supérieure
5 h =      # (à compléter) : pas de calcul
6
7 S=        # (à compléter) : initialisation de la somme
8 for i in range(      ) : # (à compléter) :
9     thetai =      # (à compléter) : borne inférieure de l'intervalle où on
    évalue la fonction à intégrer
10     S =        # (à compléter) : calcul de la somme compte tenu de la
    fonction que l'on veut intégrer
11 S =        # (à compléter) : multiplication par le pas
12 rapport_T_T0 =      # (à compléter) : calcul du rapport T/T0

```

Q20. * Recopier le code dans le fichier `capytale` du DM.

Calculer la période pour $n = 1000$. L'angle θ_0 est à choisir : amusez-vous avec différentes valeurs !

Recopier la valeur obtenue pour le rapport $\frac{T}{T_0}$, en indiquant la valeur de θ_0 .

Q21. * On donne le graphe de $\frac{T}{T_0}$ en fonction de θ_0 . Commenter physiquement l'évolution de $\frac{T}{T_0}$ avec θ_0 .

Exercice n°2 Jupiter

Jupiter est la planète la plus volumineuse du système solaire et fait partie des planètes « géantes gazeuses ». Compte tenu du rôle central de la planète géante dans la formation du système solaire, celle-ci intrigue toujours les scientifiques puisque de nombreuses questions concernant sa formation restent sans réponse. En particulier, deux scénarios s'affrontent sur la manière dont la planète Jupiter s'est constituée :

- premier scénario : la planète s'est formée en deux temps - accrétion 1 des matériaux situés dans son voisinage jusqu'à former un noyau solide représentant une dizaine de masses terrestres puis effondrement gravitationnel de la masse de gaz et de poussière entourant la planète ;
- second scénario : celui-ci repose sur le seul effondrement gravitationnel d'un nuage de gaz et de poussières mais nécessite la présence d'une nébuleuse originelle de plus grande taille que celle retenue dans les scénarios de formation du système solaire.

La sonde Juno a pour objectif principal de résoudre ce dilemme en collectant des données permettant de reconstituer l'histoire de la formation de la planète géante et son évolution.

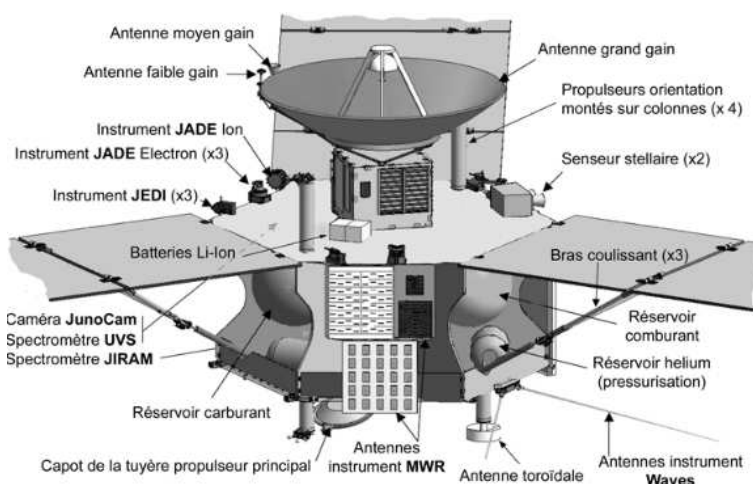


FIGURE 1 – Présentation de la sonde Juno - D'après Wikipedia

Satellite	Distance moyenne au centre de Jupiter	Période de révolution sidérale
Io	$4,218 \cdot 10^5$ km	1,769 jour
Europe	$6,714 \cdot 10^5$ km	3,551 jours
Ganymède	$1,070 \cdot 10^6$ km	7,155 jours
Callisto	$1,883 \cdot 10^6$ km	16,689 jours

- Masse de la Terre $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg
- Masse de Jupiter $M_J = 1,97 \cdot 10^{27}$ kg
- Rayon de la Terre $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km
- Rayon de Jupiter $R_J = 7,0 \cdot 10^4$ km
- Rayon de l'orbite terrestre $d_T = 1,50 \cdot 10^8$ km
- Rayon de l'orbite de Jupiter $d_J = 7,80 \cdot 10^8$ km
- Période de révolution sidérale de la Terre $T_T = 365,25$ jours

Partie I S'échapper de la Terre

Une des prouesses technologiques du siècle dernier a été de pouvoir s'échapper de la surface de la Terre afin d'envoyer hommes, satellites et instruments de mesure hors de l'atmosphère. Lancée en 2011 depuis la Terre, la sonde Juno restera en orbite autour de Jupiter jusqu'au mois de juillet 2021.

Pour libérer un objet M de masse m de l'attraction gravitationnelle terrestre, on comprend qu'il est nécessaire de le « lancer » vers l'espace avec une vitesse suffisamment importante. La vitesse de libération de la Terre v_ℓ est précisément la vitesse minimale, évaluée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, avec laquelle on doit lancer l'objet pour qu'il « s'échappe ».

Q1. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique à l'objet M entre l'instant initial (M à la surface de la Terre) et l'instant final (M à l'infini), déterminer la vitesse de libération v_ℓ en fonction de la masse M_T de la Terre, G la constante universelle de gravitation, et R_T le rayon de la Terre. Calculer numériquement v_ℓ .

Partie II Caractéristiques de la trajectoire

La sonde Juno devait, en tout, effectuer 36 révolutions complètes autour de Jupiter et achever sa mission en février 2018 mais un problème de moteur a contraint les ingénieurs à la laisser sur une **orbite elliptique de 53 jours**.

On assimile la sonde Juno à un point matériel P de masse m soumis uniquement à la force d'interaction gravitationnelle exercée par Jupiter de masse M_J . En outre, le centre O de Jupiter est supposé immobile dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen et la sonde est repérée par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Q2. Dans quelle circonstance est-il légitime de supposer que le centre de Jupiter est immobile ?

Q3. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le référentiel jupiterocentrique, montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O(P/\mathcal{R})$ est constant au cours du temps.

Conclure que le mouvement de la sonde est plan. Définir ce plan.

Il est donc plus judicieux de travailler en coordonnées cylindriques plutôt qu'en coordonnées sphériques. De plus, on choisit O comme étant l'origine du système de coordonnées cylindriques. Ce système de coordonnées est illustré sur la figure 2.

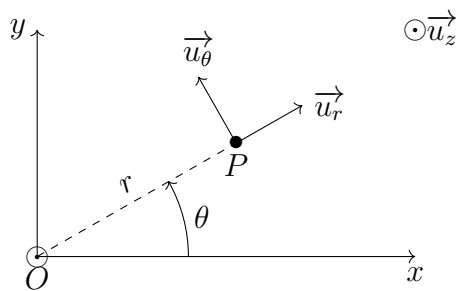


FIGURE 2 – Paramétrage cylindrique

Q4. Déterminer les expressions du vecteur position \vec{r} et du vecteur vitesse $\vec{v}(P/\mathcal{R})$ dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

Q5. On définit le vecteur \vec{C} par $\vec{C} = \frac{\vec{L}_O(P/\mathcal{R})}{m}$. En exprimant \vec{C} dans la base cylindrique orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, montrer que $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est une constante du mouvement que l'on exprimera en fonction de $C = \vec{C} \cdot \vec{u}_z$.

Q6. Déterminer l'énergie mécanique de la sonde et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\mathcal{E}_m(P/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m(\dot{r})^2 + U_{\text{eff}}(r)$$

On exprimera $U_{\text{eff}}(r)$ en fonction de m , C , G , M_J et r .

Justifier que \mathcal{E}_m se conserve.

Q7. Tracer l'allure de $U_{\text{eff}}(r)$ et discuter les trajectoires possibles de la sonde en fonction de \mathcal{E}_m .

On distinguera en particulier les états qualifiés de liés de ceux dits de diffusion.

Q8. Énoncer la troisième loi de Kepler.

Q9. En utilisant les données, déterminer le demi-grand axe a de l'orbite elliptique de la sonde.

Q10. Exprimer, sans justifier, \mathcal{E}_m , en fonction de a .

Q11. * En déduire une première équation liant la distance minimale r_{\min} , la distance maximale r_{\max} et a .

Q12. * Montrer également que r_{\min} et r_{\max} vérifient la relation suivante :

$$r_{\min}r_{\max} = -\frac{mC^2}{2\mathcal{E}_m}$$

Q13. * À l'aide de ces deux relations déterminer les expressions de r_{\min} et r_{\max} .

Partie III Satellites de Jupiter

On étudie le mouvement de Io, que l'on suppose circulaire de rayon R .

Q14. Justifier que le mouvement circulaire d'un satellite est nécessairement uniforme.

Q15. Établir l'expression de la norme de la vitesse du satellite en fonction de G , M_J et R .

Q16. En déduire la période du mouvement de Io en fonction de G , M_J et R . La calculer numériquement.

Retrouver la troisième loi de Kepler.

Q17. Exprimer l'énergie mécanique de Io en fonction de G , m , M_J et R .

Exercice n°3 Modèles de l'atome

Ce problème aborde certaines étapes de l'histoire des sciences qui ont permis, au cours du XX^e siècle, de préciser la structure et les propriétés de l'atome.
Les effets liés à la gravité seront négligés dans l'ensemble du problème.

Données

- Constante de Planck : $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Charge électrique élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- Électronvolt : $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
- Permittivité absolue du vide : $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Partie I Limite du modèle de *J.J. Thomson* à travers l'expérience de *E. Rutherford*

En 1898, *J.J. Thomson* fait l'hypothèse que les atomes sont constitués d'électrons emprisonnés dans une sorte de gelée de charges positives. Ce modèle est appelé modèle du « plum pudding », car *J.J. Thomson* compare les électrons aux raisins du célèbre dessert anglais. Le physicien *Jean Perrin* imagine, quant à lui, l'atome à l'image du système solaire. Il suppose que les électrons gravitent, à des distances immenses, autour d'un « soleil » d'électricité positive, sur des orbites pour lesquelles force coulombienne et force d'inertie s'équilibrent.

En 1909, *Ernest Rutherford*, procède à une série d'expériences dans lesquelles un faisceau de particules alpha (noyaux d'hélium 4 : ${}^4_2\text{He}$), ayant toutes la même énergie cinétique, est lancé contre une mince feuille d'or. Il observe que la majorité des particules alpha traversent la feuille d'or, mais qu'une faible proportion d'entre elles « rebondit » sur celle-ci. Le but de cette partie est de déterminer quel modèle est en accord avec cette observation expérimentale.

Nous nous plaçons d'abord dans le cadre du modèle de *J.J. Thomson*, supposant une répartition uniforme de la charge positive dans la feuille d'or.

Q1. Expliquer qualitativement pourquoi le modèle proposé par *J.J. Thomson* est incompatible avec les observations de *E. Rutherford*.

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre du modèle de *J. Perrin*, supposant l'existence d'un noyau massif de charge positive, et on étudie le mouvement de la particule alpha lors de son passage à proximité de ce noyau. Le noyau d'or, de charge positive ponctuelle $Z.e$, supposé ponctuel et immobile dans le référentiel galiléen du laboratoire, se situe au point O , origine d'un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Nous considérons qu'à l'instant initial $t = 0 \text{ s}$, la particule alpha, de masse m_α et de charge électrique $q_\alpha = +2e$, vient de « l'infini » avec un mouvement rectiligne uniforme selon $+\vec{e}_x$, à la vitesse v_0 , caractérisé par le vecteur vitesse $\vec{v}_0 = \vec{v}(t = 0) = v_0 \vec{e}_x$.

On désigne par b la distance du point O à la trajectoire de la particule à l'infini (Figure 3). À chaque instant t , on note $d(t)$ la distance entre la particule alpha et le point O .

La particule alpha est donc repérée par le vecteur position $\vec{OM} = d(t) \vec{e}_r$, avec $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ une base cylindrique locale directe.

Au plus proche du point O , la particule alpha est au point S , la distance minimale en ce point est notée d_m . La particule alpha est non relativiste. L'expérience est réalisée sous très faible pression.

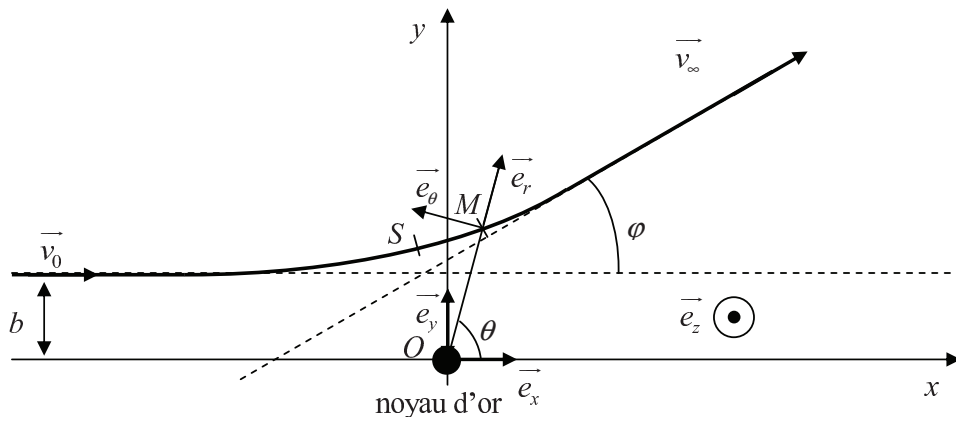


FIGURE 3 – Expérience de Ernest Rutherford

Q2. Donner l'expression de la force qui s'exerce sur la particule alpha en fonction de e , Z , d , ϵ_0 et \vec{e}_r . Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p qui y est associée, en considérant que $\lim_{d \rightarrow +\infty} E_p(d) = 0$, en fonction de e , Z , d et ϵ_0 . Réécrire ces deux expressions en fonction de $K = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0}$ et d .

Citer les propriétés de cette force qui permettent d'affirmer que le moment cinétique \vec{L}_O par rapport au point O et l'énergie mécanique E_M de la particule alpha se conservent.

Q3. Déterminer, en fonction de m_α et v_0 , l'énergie mécanique E_M de la particule alpha.

Q4. Exprimer le moment cinétique \vec{L}_O en fonction de b , m_α , v_0 et l'un des vecteurs unitaires du trièdre direct $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Pour cela, vous pourrez calculer \vec{L}_O en M_0 , position initiale de la particule alpha telle que $\vec{OM}_0 = X\vec{e}_x + b\vec{e}_y$.

Q5. Établir, à un instant t quelconque, l'expression du moment cinétique \vec{L}_O en fonction de $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, m_α , d et de l'un des vecteurs unitaires du trièdre direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. En déduire une relation entre d , b , $\dot{\theta}$ et v_0 .

Q6. Au sommet S de la trajectoire, le vecteur vitesse \vec{v}_s , de norme v_s , de la particule alpha est perpendiculaire au rayon vecteur \vec{OS} , de norme d_m . Déterminer un polynôme du second degré en d_m et en déduire l'expression de d_m en fonction de K , b , m_α et v_0 .

Q7. Malheureusement, b est inaccessible à la mesure. Par contre, l'angle de déviation φ est facilement mesurable. Il faut donc trouver la relation qui lie φ à b . Pour cela, vous écrivez le principe fondamental de la dynamique (P.F.D.) en fonction de K , d , m_α , \vec{v} et \vec{e}_r . Projeter le P.F.D. sur l'axe x en introduisant la composante v_x de la vitesse selon l'axe des x , et l'angle θ (Figure 3).

Réécrire cette équation en fonction uniquement de v_x , θ , $\dot{\theta}$, K , b , m_α et v_0 .

Intégrer cette équation entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$. On remarquera que $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) \approx \varphi$.

En déduire que la relation qui lie φ et b : $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{K}{bm_\alpha v_0^2}$

On rappelle que : $\cos(\varphi) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ et $\sin(\varphi) = 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

Q8. À partir de quelle valeur de φ les particules alpha rebondissent-elles sur la feuille d'or ? Expliquer pourquoi le modèle de *J. Perrin* permet d'interpréter les observations de *E. Rutherford*.

Nous nous proposons maintenant d'évaluer une borne supérieure de la dimension de ce noyau.

Q9. Montrer que la relation qui lie d_m à φ est : $d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)$.

Q10. Pour quelle valeur φ_m de l'angle φ , la distance d'approche est-elle minimale ? Déterminer, dans ce cas, l'expression de d_m en fonction de K , m_α et v_0 .

- Q11. Que vaut b pour $\varphi = \varphi_m$? Représenter l'allure de la trajectoire de la particule alpha pour cet angle et faire figurer d_m sur votre schéma. Justifier que d_m constitue une borne supérieure du rayon du noyau. Sachant que l'énergie typique d'une particule alpha est de 5 MeV et que le numéro atomique de l'or est $Z = 79$, déterminer numériquement la valeur de d_m .
- Q12. Justifier que, pour effectuer des expériences de physique nucléaire, il faut disposer de particules de haute énergie.

Partie II Limite du modèle planétaire

Le modèle de J.J. Thomson est écarté et l'on considère que les électrons évoluent, avec un mouvement circulaire uniforme, autour d'un noyau massif de charge électrique positive. Néanmoins, ce modèle est en contradiction avec une loi classique de l'électromagnétisme : toute particule chargée et accélérée émet de l'énergie électromagnétique. Pour mettre en évidence les conséquences de cette loi classique de l'électromagnétisme, nous allons étudier le mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène, de masse m_p et de charge électrique $q_p = +e$, sur une orbite circulaire de rayon r (Figure 4). Le noyau est considéré, dans le référentiel galiléen du laboratoire, fixe, ponctuel et placé en son centre C . Le centre de la trajectoire circulaire de l'électron est donc C .

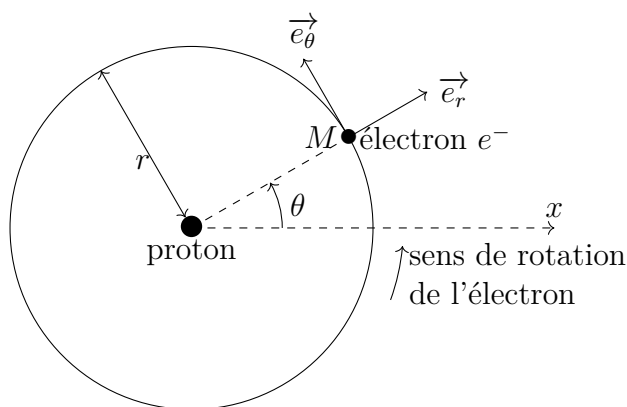


FIGURE 4 – Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène

Pour étudier le mouvement circulaire de l'électron, nous allons utiliser le repère polaire pour lequel, en un point M de la trajectoire décrite par l'électron, on associe deux vecteurs unitaires \vec{e}_r et \vec{e}_θ (Figure 4). \vec{e}_θ est le vecteur tangent à la trajectoire du point M et dirigé dans le sens du mouvement. La position de l'électron est repérée par le vecteur position : $\vec{CM} = r\vec{e}_r$ et l'angle $\theta = (\vec{Cx}, \vec{CM})$.

- Q13. Déterminer l'expression du vecteur vitesse \vec{v} de l'électron en fonction de e , m_e , ε_0 , r et d'un vecteur unitaire.
- Q14. Exprimer l'énergie mécanique $E_M(r)$ de l'électron sous la forme $E_M(r) = A.f(r)$ où A est une constante négative dont vous préciserez l'expression en fonction de e , ε_0 et $f(r)$ une fonction qui ne dépend que de r que vous déterminerez également.
- Q15. Une loi classique de l'électromagnétisme indique que toute particule chargée et accélérée émet de l'énergie électromagnétique. Aussi, d'après cette théorie, l'électron devrait émettre un rayonnement électromagnétique de puissance moyenne :

$$P(r) = \frac{\omega^4 e^2 r^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

où ω est la vitesse angulaire de l'électron et c la vitesse de la lumière dans le vide.

Cette puissance peut être mise sous la forme $P(r) = P_0 \times \frac{1}{r^4}$, où P_0 est une constante.

Déterminer l'expression de P_0 et son unité.

Justifier que le rayon de la trajectoire de l'électron diminue au cours du temps.

- Q16. Montrer qu'il existe une relation différentielle de la forme : $r^2 \frac{dr}{dt} = \frac{P_0}{A}$.
- Q17. À $t = 0$, on suppose que l'électron se trouve sur une orbite de rayon R . Donner l'expression, en fonction de P_0 , R et A , du temps t_f mis par l'électron pour atteindre le noyau. On donne $R = 1,0 \cdot 10^{-10}$ m, calculer t_f . Commenter le résultat obtenu.

Partie III Postulats de N. Bohr

Cf TD n°15. Modèle de l'atome d'hydrogène