? À rendre jeudi 20 mars 2025

Devoir Maison n°17

Travail à faire : Les étudiant.e.s les plus en difficulté pourront ne pas traiter les questions suivies d'une étoile.

Exercice n°1 Instrumentation rotative

Les instruments rotatifs sont primordiaux pour effectuer les soins sur les dents. Les premiers instruments de ce type sont apparus au milieu du XIXᵉ siècle : une turbine entrainant une fraise était mise en rotation à l'aide du pied. Les vitesses de rotation de ces dispositifs étaient de l'ordre de 200 à 300 $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Afin d'étudier les caractéristiques d'un instrument rotatif présent dans un cabinet dentaire, on le modélise par un cylindre plein et homogène placé verticalement et tournant autour de son axe vertical (Oz), son moment d'inertie par rapport à (Oz) est noté J. Suivant (Oz) ce cylindre est supposé soumis uniquement à un couple moteur constant $\Gamma_0 > 0$ et à un couple de frottements de type fluide $\Gamma_f = -\alpha\omega$ avec α une constante et ω la vitesse angulaire de rotation du cylindre.

Q1. Déterminer l'expression de la puissance du couple de frottements. En déduire le signe de α.

Q2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par ω puis la résoudre en supposant le cylindre immobile à l'instant initial.

Q3. Quelle est l'expression de la vitesse angulaire limite ω_ℓ que l'on peut atteindre avec ce dispositif ?

Des vibrations peuvent exister sur ce type de dispositif. Afin de les modéliser on écrit le moment par rapport à (Oz) du couple moteur sous la forme $\Gamma(t) = \Gamma_0\big(1 + \gamma\cos(\Omega t)\big)$ avec Ω une pulsation et γ une constante caractéristique de l'intensité des vibrations. Par ailleurs on définit $\varepsilon(t)$ telle que $\omega = \omega_\ell(1+\varepsilon)$.

Q4. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par ε est

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{J}\varepsilon = \frac{\alpha\gamma}{J}\cos\Omega t$$

Q5. Montrer qu'au bout d'un temps suffisant, $\varepsilon(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation Ω que l'on cherchera sous la forme $\varepsilon(t) = a\cos(\Omega t - \phi)$ [*].

Q6. Exprimer a et ϕ en fonction de γ, J, Ω et α en utilisant la notation complexe [†].

Q7. * Expliquer pourquoi, de façon à régulariser le fonctionnement d'objets en rotation, on adjoint aux parties tournantes un anneau massif et de grand rayon appelé volant d'inertie. Pourquoi un tel dispositif en cabinet dentaire est inapplicable ? Quelle autre solution peut-on envisager ?

Une turbine de cabinet dentaire permet la rotation très rapide d'une fraise afin, par exemple, d'effectuer un trou dans une dent cariée. La turbine est mis en rotation par de l'air comprimé actionnant un rotor mettant en mouvement la fraise. La vitesse angulaire de rotation de la fraise est de 400000 $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

FIGURE 1 – Turbine pour cabinet dentaire

Q8. * Estimer la valeur de la vitesse linéaire v_ℓ pour un point de la périphérie de la fraise. Commenter le résultat obtenu [‡].

Q9. * Dès lors qu'on exerce une pression sur la fraise donc lors du contact avec une dent la vitesse angulaire de rotation diminue fortement, quasi de moitié. Expliquer ce phénomène.

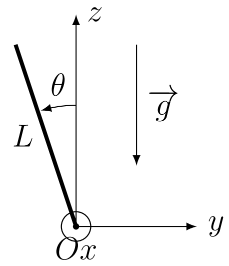
*. Voir Chapitre n°7 - §I.3

†. Voir Chapitre n°7 - §I.4 : Notation complexe.
Introduire l'amplitude complexe $\underline{a}$ telle que $\underline{\varepsilon}(t) = \underline{a}e^{j\Omega t}$
Passer l'équation différentielle en complexe, en déduire $\underline{a} = \dfrac{\gamma}{1 + j\frac{J\Omega}{\alpha}}$.
En déduire l'amplitude $a = |\underline{a}|$ et la phase ϕ : $\arg(\underline{a}) = -\phi$.

‡. Il faudra estimer le rayon de la fraise.

Exercice n°2 Gravimètre

On étudie le pendule ci-contre, constitué d'une tige homogène de longueur L accrochée à sa base à un ressort spirale exerçant un couple $\Gamma = -C\theta$, de constante de torsion $C > 0$.
Le moment d'inertie de la tige est noté J.
Tous les frottements seront négligés.



Partie A Mise en équation

Q1. Appliquer le théorème du moment cinétique scalaire pour obtenir l'équation différentielle du mouvement.

Q2. Montrer qu'à l'équilibre l'angle θ_e vérifie l'équation :

$$\sin(\theta_e) = \frac{2C}{mgL}\theta_e$$

L'écrire sous la forme $h(\theta_e) = 0$, on donnera l'expression de la fonction h.

Q3. Donner les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle de torsion.
En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale.

Q4. Comment caractérise-t-on une position d'équilibre en terme d'énergie potentielle ? Retrouver l'équation vérifiée par θ_e précédente.

Partie B Résolution numérique

L'équation de la question Q2 ne peut être résolue analytiquement. On utilise la dichotomie *(cf TP d'informatique et le livret « Capacités numériques »)*.

Q5. Recopier sur votre copie et compléter le code ci-dessous qui renvoie la valeur approchée c de l'annulation de f, à ε près.

```
def dichotomie(f,a,b,eps):
    while       # (à compléter) tant que |b-a| est supérieur à eps
        c =     # (à compléter) centre de l'intervalle
        if .... # (à compléter) f(a) et f(c) sont de signes opposés
           .... # (à compléter) f s'annule sur l'intervalle [..., ....]
       else:
          ..... # (à compléter) sinon, f s'annule sur [..,..]
    return c
```

Q6. Écrire en python la fonction `h(theta)` définie Q2.

Q7. * 💻 Compléter le fichier capytale `https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/84c4-5864412` (Code de partage : `84c4-5864412`).

Q8. * À partir du graphique de $h(\theta)$, déterminer l'intervalle sur lequel appliquer la fonction `dichotomie`.

Q9. * Écrire sur votre copie la ligne de code qui permet d'obtenir la valeur approchée de θ_e à 10^{-2} près en utilisant la fonction `dichotomie`.
💻 Écrire cette ligne de code sur le fichier python, et l'exécuter.
Écrire sur votre copie la valeur de θ_e obtenue.

Q10. * Expliquer comment ce système peut-il être utilisé comme mesure de g.