Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)

TD n°15 Mouvements dans un champ de force centrale conservatif — *Corrigé*

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique.					✎	✎			
Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.			✎		✎	✎			
Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.	✎	✎	✎		✎	✎		✎	
Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective.					✎				
Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique.					✎				
Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.			✎						
Établir que le mouvement circulaire est uniforme et déterminer sa période.			✎	✎					✎
Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire.									
Exploiter sans démonstration la généralisation de la troisième loi de Kepler au cas d'une trajectoire elliptique.			✎				✎		
Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire.			✎	✎					✎
Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.			✎						
Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.			✎						
Exprimer les vitesses cosmiques et citer leur ordre de grandeur en dynamique terrestre.	✎								

Parcours possibles

— Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, n°2, n°3 (Q1 à Q6 uniquement) et n°4 (Q1 à Q4 uniquement).

— Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°3 (Q1 à Q8 uniquement), n°4 et n°5.

— Si vous êtes à l'aise : exercices n°3, 4, 5 et n°6.

I Exercices d'applications directes du cours

Exercice n°1 Au revoir Pioneer !

La sonde Pioneer 10 a été envoyée le 2 mars 1972, la sonde est propulsée avec une vitesse de 14356 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ par rapport à la Terre.

R1. Établir l'expression de la vitesse de libération pour un objet situé à la surface de la Terre. Faire l'application numérique.

> **Solution:** Système : sonde Pioneer
> Référentiel : géocentrique, supposé galiléen à l'échelle de l'expérience
> Bilan des forces : force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre, qui est une force conservative.
> La sonde peut se libérer de l'attraction si elle a une énergie mécanique positive ou nulle.
> Au minimum : $\mathscr{E}_m = \dfrac{1}{2}mv_\ell^2 - \dfrac{GM_Tm}{R_T} = 0$, on en déduit la vitesse de libération $\boxed{v_\ell = \sqrt{\dfrac{2GM_T}{R_T}} = 11,2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}}$

R2. Comparer les valeurs numériques de la vitesse de libération et de celle de la sonde Pioneer.

> **Solution:** $v = 14356\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} > v_\ell$, donc la sonde se libère de l'attraction terrestre.

R3. En exploitant la conservation de l'énergie mécanique, déterminer l'expression de la vitesse du satellite aux confins du système solaire. Faire l'application numérique.

> **Solution:** Aux confins du système solaire, on peut considérer que la sonde n'est soumise à aucune action mécanique, alors $\mathscr{E}_m = \dfrac{1}{2}mv_f^2 = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GM_Tm}{R_T}$, soit $\boxed{v_f = \sqrt{v^2 - \dfrac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{v^2 - v_\ell^2} = 8,91.10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$

Exercice n°2 Feu la comète

La comète Ison surnommée la comète du siècle est morte en décembre 2013 en rasant le soleil. La comète passa au plus près du soleil à une distance $r_\mathrm{P} = 0,012\mathrm{UA}$. Sa trajectoire était quasi parabolique de sorte qu'elle pourrait être issue du nuage de Oort sans vitesse initiale, frontière de notre système solaire.

R1. Rappeler l'expression de l'énergie mécanique en fonction de m, M, de la vitesse v et de la distance r de la comète par rapport au soleil.

> **Solution:** La comète est soumise à l'attraction du soleil. On étudie son mouvement dans le référentiel héliocentrique.
> Par définition de l'énergie mécanique : $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GM_Sm}{r}$

R2. Que vaut l'énergie mécanique sur une trajectoire parabolique ?

> **Solution:** Sur une trajectoire parabolique, $\mathscr{E}_m = 0$.

R3. En exploitant la conservation de l'énergie mécanique, déterminer la vitesse de la comète au périgée.

> **Solution:** Au périgée : $\dfrac{1}{2}mv_P^2 - \dfrac{GM_Sm}{r_p} = 0$, soit $\boxed{v_P = \sqrt{\dfrac{2GM_S}{r_p}} = 3,85.10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$

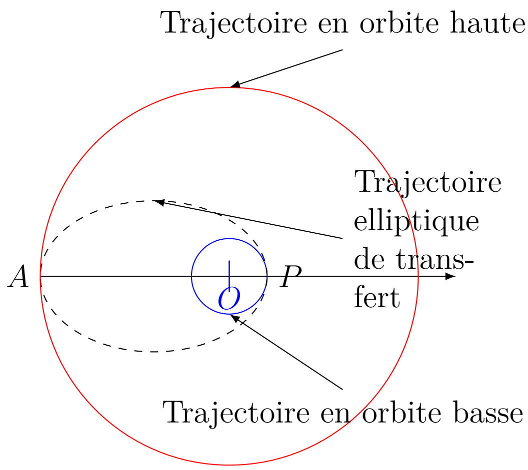
Données : 1 UA $= 150 \cdot 10^6$ km

Exercice n°3 Orbite de transfert

Un satellite artificiel, assimilé à un point matériel M de masse $m = 900$ kg, se trouve sur une orbite circulaire provisoire de rayon $r_1 = 7500$ km autour de la Terre. On souhaite le faire passer sur son orbite définitive de rayon $r_2 = 42200$ km (orbite géostationnaire).
Pour cela, on le fait d'abord passer sur une orbite de transfert elliptique dont le périgée P est à la distance r_1 et l'apogée A à la distance r_2 du centre de la Terre. Lorsque le satellite arrive à cet apogée, on le fait alors passer sur l'orbite circulaire de rayon r_2.
Ces deux changements d'orbites sont obtenus par allumage d'un moteur placé sur le satellite : ce processus est très bref (par rapport à la période orbitale), donc on considèrera que la vitesse passe instantanément de v_1 à v_{e1} en P, puis de v_{e2} à v_2 en A (sans changer de direction dans chaque cas).

R1. Faire un schéma représentant les deux orbites circulaires et l'ellipse de transfert entre P et A.

Solution:



R2. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, établir l'expression de la vitesse v du satellite sur une orbite circulaire de rayon r. Faire l'application numérique pour l'orbite basse (on notera v_1 la vitesse) et pour l'orbite géostationnaire (on notera v_2 la vitesse).

Solution: Système : satellite $M(m)$

Référentiel : géocentrique, considéré galiléen à l'échelle du mouvement

Bilan des forces : Force d'attraction gravitationnelle $\overrightarrow{F} = -\frac{GmM_T}{r_1}\overrightarrow{u_r}$

D'après le PFD : $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}$

Soit, en orbite basse : $-m\frac{v^2}{r_1}\overrightarrow{u_r} + mr_1\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = -\frac{GmM_T}{r_1}\overrightarrow{u_r}$

On en déduit $\ddot{\theta} = 0$: le mouvement circulaire est de plus uniforme.

On en déduit $\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}} = 7,29.10^3 \text{ m/s}}$

R3. Déterminer l'expression du demi grand-axe de l'orbite elliptique de transfert en fonction de r_1 et r_2. Faire l'application numérique.

R4. En exploitant la troisième loi de Kepler, exprimer et calculer la durée du transfert (entre P et A).

Solution: La durée du transfert τ est la demi-période du mouvement elliptique entre P et A. D'après la troisième loi de Kepler : $\frac{(2\tau)^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

Soit $\boxed{\tau = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi^2 a^3}{GM_T}\right)} = 19500 \text{ s} = 5,42 \text{ h}}$

R5. Démontrer que sur l'orbite de transfert elliptique, le produit $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante (en notant r et θ les coordonnées polaires du satellite).

Solution:
Sur l'orbite de transfert, le satellite est soumis uniquement à $\overrightarrow{F}$ qui est une force centrale, de centre le centre de la Terre T.

D'après le TMC par rapport à T : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_T}(M)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{TM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, car $\overrightarrow{TM}$ et $\overrightarrow{F}$ sont colinéaires.

Le moment cinétique se conserve.

Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{TM}$ et $\overrightarrow{v}(M)$ sont contenus dans le plan perpendiculaire à chaque instant au vecteur constant $\overrightarrow{L_T}(M)$,le mouvement est donc plan.

En utilisant les coordonnées cylindriques, on calcule le moment cinétique :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L_T}(M) &= \overrightarrow{TM} \wedge m\overrightarrow{v}(M) \\
&= r\overrightarrow{u_r} \wedge m(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}) \\
&= mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}
\end{aligned}$$

Or m et $\overrightarrow{u_z}$ sont constants, donc $\boxed{r^2\dot{\theta} \text{ est constant}}$

R6. Donner *(si vous n'êtes pas à l'aise)* / Établir *(si vous êtes plus à l'aise)* l'expression de l'énergie mécanique du satellite en orbite elliptique de demi-grand axe a.

Solution: cf cours ! $\mathscr{E}_m = -\dfrac{GM_Tm}{2a}$

R7. En déduire l'expression de la vitesse $v_e(r)$ du satellite sur la trajectoire elliptique en fonction de r et des constantes G, m, M_T, a.

Solution:
Sur la trajectoire elliptique, l'énergie mécanique s'exprime selon
$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p = \dfrac{1}{2}mv_e^2 - \dfrac{GM_Tm}{r} = -\dfrac{GM_Tm}{2a}$

ainsi $\boxed{v_e(r) = \sqrt{2GM_T\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{2a}\right)}}$

R8. Exprimer et calculer la vitesse v_{e1} après le premier transfert (au périgée donc).

Solution:
Au périgée, après le premier transfert :

$$\begin{aligned}
v_{e1} &= \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a}\right)} \\
&= \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right)} \\
&= \sqrt{2GM_T \times \frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} \\
v_{e1} &= 9,50.10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\
\Delta v_1 &= v_{e1} - v_1 \\
&= 2,21.10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}
\end{aligned}$$

R9. Exprimer et calculer également le travail W_P fourni par le moteur au satellite en ce point.

Solution:
Le travail fourni permet de modifier l'énergie cinétique, l'altitude ne variant pas au moment du transfert, le TEC lors du passage de l'orbite basse à l'orbite elliptique :

$$\begin{aligned}
\Delta\mathscr{E}_c &= W_P \\
\mathscr{E}_{ce1} - \mathscr{E}_{c1} &= W_P \\
W_P &= \frac{1}{2}mv_{e1}^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \\
W_P &= \frac{GM_T m r_2}{r_1(r_1+r_2)} - \frac{GM_T m}{2r_1} \\
W_P &= \frac{GM_T m(r_2-r_1)}{2(r_1+r_2)} \\
&= 3,54.10^8\ \mathrm{J}
\end{aligned}$$

R10. Déterminer une relation entre v_{e1}, v_{e2}, r_1 et r_2. Calculer v_{e2}.

Solution: Par conservation du moment cinétique sur la trajectoire elliptique, en P et A où la vitesse est orthoradiale ($\dot{r} = 0$).

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L_T(P)} &= \overrightarrow{L_T(A)} \\
mr_1v_{e1} &= mr_2v_{e2} \\
v_{e2} &= \frac{r_1}{r_2}v_{e1} \\
&= \sqrt{2GM_T \times \frac{r_1}{r_2(r_1+r_2)}} \\
&= 1,69.10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}
\end{aligned}$$

R11. Déterminer le second travail W_A fourni par le moteur au satellite.

Solution:

$$\begin{aligned}
W_A &= \mathscr{E}_{c2} - \mathscr{E}_{ce2} \\
&= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_{e2}^2 \\
&= \frac{GM_T m}{2r_2} - \frac{GM_T m r_1}{r_2(r_1+r_2)} \\
&= \frac{GM_T m(r_2-r_1)}{2r_2(r_1+r_2)}
\end{aligned}$$

Exercice n°4 Modèles de Rutherford et de Bohr de l'atome d'hydrogène

On considère l'interaction électrostatique entre l'électron et le proton d'un atome d'hydrogène. En 1911, l'expérience de Rutherford montre qu'il existe un noyau quasi ponctuel chargé positivement au sein de l'atome. Le modèle précédent de l'atome dû à Thomson (électrons localisés dans une sphère chargée uniformément positivement en volume) est alors invalidé. Rutherford propose un modèle planétaire dans lequel les électrons décrivent des trajectoires circulaires autour d'un noyau ponctuel fixe.

R1. Exprimer la force exercée par le noyau sur l'électron en fonction de e, ε_0, la distance a entre le noyau et l'électron et le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_r}$. Faire un schéma.

R2. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, déterminer l'expression de la vitesse v de l'électron sur son orbite circulaire en fonction de a, e, ε_0, m_e. *Le poids de l'électron sera négligé.*

R3. Déterminer l'énergie mécanique d'un électron sur une trajectoire de rayon a en fonction des paramètres du problème.

Solution:
Système : électron
Référentiel : celui du laboratoire considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques : $\overrightarrow{F} = \dfrac{e(-e)}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\overrightarrow{u_r} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\overrightarrow{u_r}$
PFD à l'électron dans le référentiel du laboratoire galiléen : $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}$
L'électron ayant un mouvement circulaire de rayon a et étant soumis à une unique force centrale, la loi des aires impose au mouvement d'être de plus uniforme. Alors $\overrightarrow{a} = -\dfrac{v^2}{a}\overrightarrow{u_r}$
Ainsi $-m\dfrac{v^2}{a} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$, alors $\boxed{v = \dfrac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m a}}}$
Énergie mécanique : $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p = \dfrac{1}{2}m\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m a} - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$, soit $\boxed{\mathscr{E}_m = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}}$

R4. Déterminer son moment cinétique en fonction de a, m_e, ε_0 et $\overrightarrow{u_z}$.

Solution:
Moment cinétique par rapport au point O (localisé au niveau du noyau) : $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = ma\overrightarrow{u_r} \wedge v\overrightarrow{u_\theta}$
Soit $\boxed{\overrightarrow{L_O} = mav\overrightarrow{u_z} = e\sqrt{\dfrac{ma}{4\pi\varepsilon_0}}\overrightarrow{u_z}}$

(La suite est liée au chapitre n°29 « Introduction à la mécanique quantique. »
Pour expliquer les raies discrètes du rayonnement émis par une lampe à décharge, observées par Balmer en 1885, Bohr propose en 1913 un modèle dans lequel il impose au moment cinétique d'être quantifié, c'est-à-dire de ne prendre que les valeurs $L_n = n\hbar$, où n est un entier et $\hbar$ la constante de Planck réduite, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$.

R5. Montrer que le rayon et l'énergie mécanique sont aussi quantifiés : $a = n^2 a_0$ et $\mathscr{E}_n = -\dfrac{\mathscr{E}_0}{n^2}$ où a_0 (rayon de Bohr) et $\mathscr{E}_0$ s'expriment en fonction de constantes fondamentales.

Solution:
$L_n = n\hbar = e\sqrt{\dfrac{ma_n}{4\pi\varepsilon_0}}$: la quantification du moment cinétique impose la quantification du rayon
Alors $a_n = n^2\hbar^2 \times \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{e^2 m}$, soit $\boxed{a_n = n^2 a_0}$, avec $\boxed{a_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 5,30.10^{-11}\text{ m}}$ (avec $2\pi\hbar = h$)
$\mathscr{E}_n = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_n} = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{\pi e^2 m}{\varepsilon_0 n^2 h^2}$
Ainsi $\boxed{\mathscr{E}_n = -\dfrac{\mathscr{E}_0}{n^2}}$, avec $\boxed{\mathscr{E}_0 = \dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = \dfrac{m}{2}\left(\dfrac{e^2}{2\varepsilon_0 h}\right)^2 = -2,18.10^{-18}\text{ J} = -13,6\text{ eV}}$

R6. Pourquoi peut-on faire l'hypothèse que l'émission d'un photon d'énergie $h\nu$ est due à la transition de l'électron d'une orbite d'énergie $\mathscr{E}_p$ à une orbite d'énergie $\mathscr{E}_n$ telles que $h\nu = \mathscr{E}_p - \mathscr{E}_n$.

Solution:
Par conservation de l'énergie :
$$\begin{array}{ccc} \text{énergie initiale} & = & \text{énergie finale} \\ \text{électron sur l'orbite } p & = & \text{électron sur l'orbite } n + \text{énergie photon} \\ \mathscr{E}_p & = & \mathscr{E}_n + h\nu \end{array}$$

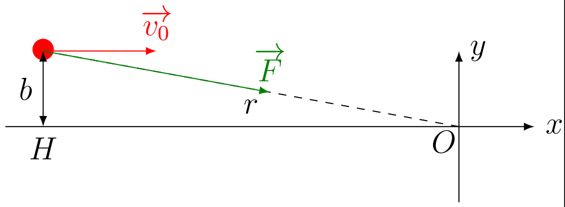
Alors le photon émis est donc d'énergie $\boxed{h\nu = \mathscr{E}_p - \mathscr{E}_n}$

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°5 Distance minimale d'approche d'un astéroïde

Un astéroïde de masse $m = 1,0.10^{18}$ kg s'approche dangereusement de la Terre. Il possède une vitesse $v_0 = 10$ km $\cdot$ s^{-1} dans le référentiel géocentrique ($\mathscr{R}_g$) supposé galiléen avec un paramètre d'impact $b = 8,0.10^3$ km. À cet instant, l'attraction terrestre peut encore être négligée. Nous assimilerons l'astéroïde à un point matériel M pour étudier son mouvement.

Solution:
- Système : astéroïde M de masse m
- Référentiel : géocentrique supposé galiléen à l'échelle du référentiel
- Bilan des forces : attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur l'astéroïde $\overrightarrow{F} = -\dfrac{GmM_T}{r^2}\overrightarrow{e_r}$



R1. Montrer que l'énergie mécanique $\mathscr{E}_m$ de la météorite est une constante et déterminer sa valeur initiale

Solution: L'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement car l'astéroïde est soumis à une unique force qui est conservative.

Initialement, la vitesse vaut v_0 et la distance r est très grande, donc $\boxed{\mathscr{E}_m = \dfrac{1}{2}mv_0^2}$, qui est strictement positive.

R2. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ de la météorite par rapport à O est une constante et déterminer sa valeur initiale. Rappeler les deux conséquences de la conservation du moment cinétique.

Solution: Appliquons le TMC à M par rapport à O dans le référentiel géocentrique :
$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F_{O\to M}}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_{O\to M}} = \overrightarrow{0}$, car $\overrightarrow{F_{O\to M}}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires.
Les deux conséquences sont : le mouvement plan et le mouvement se fait selon la loi des aires.
Calculons le moment cinétique quand l'astéroïde est au loin : $\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{OM_0} \wedge m\overrightarrow{v_0}$, introduisons H : $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM_0}$, avec $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{v_0}$ colinéaires.
Ainsi : $\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{HM_0} \wedge m\overrightarrow{v_0} = mb\overrightarrow{e_y} \wedge v_0\overrightarrow{e_x}$
Donc $\boxed{\overrightarrow{L_O}(M) = -mbv_0\overrightarrow{e_z}}$

R3. Définir des coordonnées polaires adaptées et établir l'expression du moment cinétique à chaque instant.

Solution:
$\overrightarrow{L_O}(M) = r\overrightarrow{e_r} \wedge m\left(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{cste}$

On introduit la constante des aires $\boxed{\mathscr{C} = r^2\dot{\theta}}$

La constante des aires est donc négative et vaut $\boxed{\mathscr{C} = -bv_0}$

R4. Établir l'expression de l'énergie potentielle effective en fonction des constantes du problème et de la distance r.

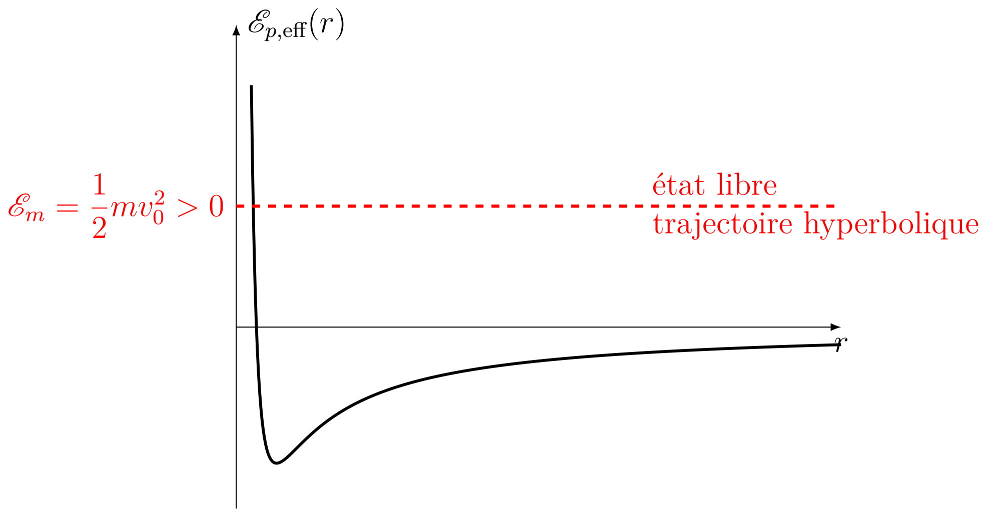
Solution: L'énergie mécanique vaut : $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GmM_T}{r}$

On calcule, en coordonnées polaires, $v^2 = \left\| \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \right\| = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$, et $\dot{\theta} = \dfrac{\mathscr{C}}{r^2}$

D'où : $\boxed{\mathscr{E}_m = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\dfrac{\mathscr{C}^2}{2mr^2} - \dfrac{Gmm_O}{r}}_{=\mathscr{E}_{p,\text{eff}}(r)}}$

R5. Tracer l'allure de la courbe d'énergie potentielle effective et en déduire la nature de la trajectoire de la météorite (compte tenu de la valeur de l'énergie mécanique).

Solution: Allure de la courbe représentative de $\mathscr{E}_{p,\text{eff}}(r)$.



Comme l'énergie mécanique est strictement positive, le point M s'échappe de l'attraction de l'astre avec une trajectoire hyperbolique (qui tourne autour de la Terre).

R6. En utilisant la conservation des deux grandeurs précédentes, déterminer la distance minimale d'approche de l'astéroïde par rapport au centre de la Terre. S'écrase-t-il sur Terre ?

Solution:
Conservation de l'énergie mécanique : $\mathscr{E}_m = \dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{1}{2}mv_P^2 - \dfrac{GmM_T}{r_P}$

Conservation du moment cinétique : $-bv_0 = r_P^2\dot{\theta}_P$, donc $-bv_0 = -r_Pv_P$, donc $v_P = \dfrac{bv_0}{r_P}$, car au périhélie $\dot{r} = 0$, donc $v_P = r_P|\dot{\theta}_P|$, or $\mathscr{C} < 0$, donc $\dot{\theta} < 0 \dots$

Ainsi : $\dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{1}{2}m\dfrac{b^2v_0^2}{r_P^2} - \dfrac{GmM_T}{r_P}$

En multipliant par r_P^2 et en réorganisant : $r_P^2 + \dfrac{2GM_T}{v_0^2}r_P - b^2 = 0$

Discriminant : $\Delta = \left(\dfrac{2GM_T}{v_0^2}\right)^2 + 4b^2 > 0$

Racines : $r_P = \dfrac{-\dfrac{2GM_T}{v_0^2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{2GM_T}{v_0^2}\right)^2 + 4b^2}}{2}$

La seule racine positive ($r_P > 0$) est la solution $\oplus$ et en réécrivant : $\boxed{r_P = \dfrac{GM_T}{v_0^2}\left(-1 + \sqrt{1 + \left(\dfrac{bv_0^2}{GM_T}\right)^2}\right)}$

L'astéroïde ne s'écrase pas sur Terre si $r_P > R_T$, d'où $\dfrac{GM_T}{v_0^2}\left(-1+\sqrt{1+\left(\dfrac{bv_0^2}{GM_T}\right)^2}\right) > R_T$

A.N. : $r_P = 4,9.10^6$ m $< R_T = 6,37.10^6$ m : le choc de l'astéroïde avec la Terre est inévitable.

Exercice n°6 Lancement d'un satellite

Le satellite EUTELSAT 8 West B d'une masse $m = 5,8$ tonnes a été lancé de Kourou en Guyane française par une fusée Ariane 5 le 21 août 2015 afin d'être placé sur une orbite géostationnaire.
La base de lancement de Kourou se situe à une latitude $\lambda = 5,2°$.
Dans le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_g$ supposé galiléen, la Terre peut-être assimilée à un solide en rotation autour d'un axe fixe (l'axe Nord-Sud) à une vitesse angulaire Ω.

R1. Décrire l'axe de rotation. Peut-on le considérer comme fixe ? Déterminer l'expression puis la valeur de Ω.

Solution: L'axe de rotation de la Terre sur elle-même est l'axe pôle nord-pôle sud. On peut le considérer comme fixe dans le référentiel géocentrique.
$\Omega = \dfrac{2\pi}{1 \text{ jour}} = 7,3.10^{-5}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

R2. En déduire l'expression de la vitesse du point P dans le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_g$ en fonction de Ω, du rayon de la Terre R_T et de la latitude λ.

Solution: À la latitude λ (0 situé à l'équateur), le point P décrit un cercle de rayon $r = R_T\cos(\lambda)$: $v_P = R_T\cos(\lambda)\Omega$

R3. Exprimer alors l'énergie mécanique initiale $\mathscr{E}_{m0}$ du satellite posé au sol au point P.

Solution: En P, $\mathscr{E}_{m0} = \dfrac{1}{2}mv_P^2 - \dfrac{GmM_T}{R_T}$

R4. En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite. Parmi les trois champs de tir : Baïkonour au Kazakhstan ($\lambda = 46°$), Cap Canaveral aux USA ($\lambda = 28,5°$) et Kourou en Guyane Française ($\lambda = 5,1°$), lequel est le plus adapté ?

Solution: Plus λ est faible et plus v_P est élevée, donc plus $\mathscr{E}_{m0}$ est élevée. Il est donc plus favorable d'envoyer un satellite depuis Kourou.

R5. Calculer l'énergie nécessaire pour mettre le satellite en orbite basse (altitude $z \ll R_T$) depuis Kourou.

Solution: En orbite basse, à une distance proche de R_T du centre de la Terre, le satellite a une énergie mécanique $\mathscr{E}_{m,ob} = -\dfrac{GM_Tm}{2R_T}$
L'énergie nécessaire pour le mettre en orbite est donc
$\boxed{\Delta\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_{m,ob} - \mathscr{E}_{m0} = -\dfrac{GM_Tm}{2R_T} - \dfrac{1}{2}mv_P^2 + \dfrac{GmM_T}{R_T} = \dfrac{GM_Tm}{2R_T} - \dfrac{1}{2}mv_P^2}$ Par kg de satellite :$\Delta\mathscr{E}_m = 31$ MJ/kg

R6. Sachant que 1 kW · h d'électricité coûte environ 0,15 €, estimer le coût théorique de la satellisation d'un kilogramme de charge utile. Ce coût est en réalité de l'ordre de 1000 €/kg. Commenter.

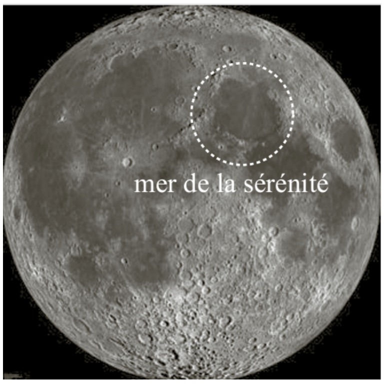
Solution: Or $1\ \text{kW} \cdot \text{h} = 3,6\ \text{MJ}$, on a besoin de $8,6$ kWh/kg, ce qui représente .....

R7. Calculer numériquement l'énergie gagnée entre Baïkonour et Kourou. Commenter.

Solution:

III Résolution de problème

Exercice n°7 La Lune



Le diamètre apparent de la Lune est de $\theta = 31'36''$. Sachant que la Lune gravite autour de la Terre en 27 jours, déterminer le diamètre de la mer de la sérénité en km.

Seules les valeurs de masse de la Terre et la constante universelle de gravitation sont nécessaires pour résoudre ce problème.

Solution: Idées de résolution :
- Connaissant la période de révolution de la Lune + 3e loi de Kepler, on en déduit la distance Terre-Lune.
- Avec le diamètre apparent, on en déduit le diamètre de la Lune.
- Par proportionnalité sur la taille de la photo, on répond à la question.

Exercice n°8 Expérience de Rutherford

Des particules α ($^4_2$He) de masse m sont envoyées d'une distance très grande d'un noyau d'or $_{79}$Au avec une vitesse v_0 en direction du noyau d'or de masse M, supposé immobile dans le référentiel galiléen d'étude.

On mesure la distance minimale d'approche $r_{\text{min}} = 3 \cdot 10^{-14}$ m des particules α par rapport au noyau d'or. En déduire la vitesse initiale v_0 communiquée aux particules α

Solution: Idées de résolution :
- Hypothèse : envoi de la particule α droit sur le noyau.
- Conservation de l'énergie mécanique entre l'état initial où on peut considérer que l'interaction coulombienne est nulle, et la distance minimale d'approche où la vitesse est nulle.

Exercice n°9 Descente d'un satellite

Un satellite est en orbite circulaire autour de la Terre à 800 km d'altitude. Sur cet orbite, on constate que son altitude diminue de 1 m durant une période. On décrit les frottements avec l'atmosphère par une force de frottement fluide quadratique $\overrightarrow{f} = -\alpha m v \overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{v}$ désigne la vitesse du satellite et m sa masse. Le coefficient α est supposé indépendant de l'altitude du satellite : $\alpha = 1,5.10^{-15}\ \text{m}^{-1}$.
Au bout de combien de temps l'altitude aura-t-elle baissé de 10 km ?

Solution:
- Sur un tour, le rayon a très très très peu varier, donc le mouvement est quasi circulaire.
- Utiliser les formules du mouvement circulaire.

— TPM

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t} &= \mathscr{P}(\overrightarrow{f}) = -\alpha m v \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{GM_T m}{2r}\right) &= -\alpha m v^3 \\
\frac{GM_T m}{2r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= -\alpha m \left(\frac{GM_T m}{r}\right)^{3/2} \\
\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= -2\alpha\sqrt{GM_T m^3}\sqrt{r} \\
\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r}} &= -2\alpha\sqrt{GM_T m^3}\mathrm{d}t \\
\int_{r=R}^{R-\Delta r}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r}} &= \int_0^{t_f} -2\alpha\sqrt{GM_T m^3}\mathrm{d}t \\
2\sqrt{R-\Delta r} - 2\sqrt{R} &= -2\alpha\sqrt{GM_T m^3}t_f \\
t_f &= \frac{\sqrt{R}-\sqrt{R-\Delta r}}{\alpha\sqrt{GM_T m^3}}
\end{aligned}
$$