Thème III. L'énergie : conversions et transferts (Thermodynamique)

TD n°19 Machines thermiques – *Corrigé*

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Moteur ou récepteur ? ♪

On considère un système fermé fluide parcourant des cycles thermodynamiques dithermes, au cours desquels il reçoit algébriquement le travail $W = -53$ J, le transfert thermique $Q_F = -70$ J de la part de la source froide de température $T_F = 278$ K et le transfert thermique Q_C de la part de la source chaude de température $T_C = 500$ K.

R1. S'agit-il d'un cycle moteur ou d'un cycle récepteur ?

Solution: Le travail algébriquement reçu est négatif, ce cycle fournit donc réellement du travail au milieu extérieur, il s'agit d'un $\boxed{\text{cycle moteur}}$.

R2. Déterminer le transfert thermique Q_C qu'il reçoit algébriquement de la part de la source chaude. Faire l'application numérique.

Solution: D'après le premier principe sur un cycle : $\Delta_{\text{cycle}}U = Q_C + Q_F + W$, or $\Delta_{\text{cycle}}U = 0$.
Ainsi $\boxed{Q_C = -W - Q_F = 123 \text{ J} > 0}$

R3. Le fonctionnement de cette machine ditherme est-il réversible ?

Solution: D'après le deuxième principe sur un cycle $\Delta_{\text{cycle}}S = \dfrac{Q_C}{T_C} + \dfrac{Q_F}{T_F} + S_{\text{créée}}$, avec $\Delta_{\text{cycle}}S = 0$.
Soit $S_{\text{créée}} = -\dfrac{Q_C}{T_C} - \dfrac{Q_F}{T_F} = 0,0058 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0$
Le fonctionnement est donc irréversible.

Exercice n°2 Congélateur ♪

Un congélateur est placé dans une pièce à température ambiante de 21 °C. Pour que son intérieur reste à −19 °C, il est nécessaire d'en extraire un transfert thermique de 400 kJ par heure. On supposera cette opération faite de manière réversible.

R1. Rappelez l'expression puis donnez la valeur de l'efficacité de ce congélateur.

Solution: Efficacité du congélateur : $e = \dfrac{Q_f}{W_{\text{cycle}}}$

Si le congélateur a un fonctionnement réversible, $e = e_C = \dfrac{T_f}{T_c - T_f} = 6,35$

R2. Calculez la puissance électrique nécessaire pour faire fonctionner le congélateur dans les conditions indiquées.

Solution: $\mathscr{P}_{th,f} = 400$ kJ/h, donc $\mathscr{P} = \dfrac{\mathscr{P}_{th,f}}{e_C} = 17,5$ W

R3. Comment cette dernière valeur est-elle modifiée s'il fait 30 °C à l'extérieur ? Commentez.

Solution: S'il fait plus chaud à l'extérieur, l'efficacité diminue, et la puissance électrique nécessaire augmente.

R4. Que vaut le transfert thermique vers l'extérieur en une heure ?

Solution: Sur un cycle : $Q_f + Q_c + W_{\text{cycle}} = 0$, donc $Q_c = -Q_f - W_{\text{cycle}} = -128,6$ W

Exercice n°3 Centrale nucléaire ♪

Une centrale nucléaire est une machine ditherme en contact avec l'eau chaude du circuit primaire à $T_c = 320$ °C et un fleuve à $T_f = 10$ °C. La puissance délivrée par la centrale est $\mathcal{P} = 1,00$ GW.

R1. Calculez le rendement η de la centrale, sachant qu'il vaut 60% du rendement de Carnot.

Solution: Rendement de la centrale nucléaire : $\eta = 60\% \times \eta_{\text{Carnot}} = 0,6 \times \left(1 - \dfrac{T_c}{T_f}\right) = 0,31$

R2. Exprimez puis calculez $\dot{Q}_c$ le transfert thermique reçu par la machine de la part de la source chaude par unité de temps, et $\dot{Q}_f$ le transfert thermique reçu par la machine de la part de la source froide par unité de temps.

Solution: Par définition du rendement $\eta = \dfrac{\mathscr{P}}{\dot{Q}_c}$, ainsi $\dot{Q}_c = \dfrac{\mathscr{P}}{\eta} = 3,2$ GW

R3. Quelle énergie par unité de temps reçoit le fleuve ? Quelle conséquence a-t-elle ?

Solution: L'énergie reçue par le fleuve est $-\dot{Q}_f$ reçu par la machine ditherme.
D'après le 1er principe sur un cycle (en algébrisant !!) : $-\mathscr{P} + \dot{Q}_c + \dot{Q}_f = 0$, soit $-\dot{Q}_f = -\mathscr{P} + \dot{Q}_c = 2,2$ GW
Cette énergie reçue par le fleuve va réchauffer le fleuve.

II Descriptions de cycles

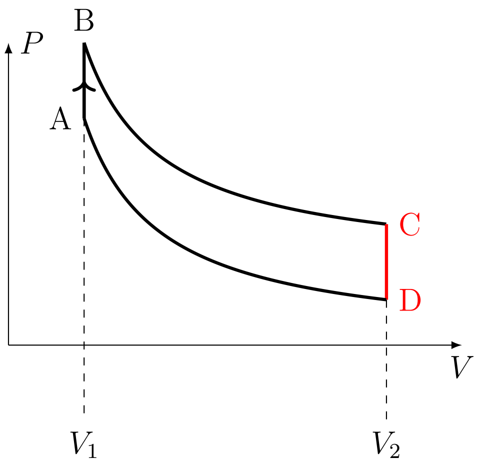
Exercice n°4 Moteur de Stirling ♪

On considère n moles d'air, considéré comme un gaz parfait de rapport $\gamma = 7/5$, subissant un cycle modélisé par les évolutions suivantes :

- Compression isotherme réversible au contact de la source TH_1 à T_1, jusqu'à l'état B, de volume $V_2 = \dfrac{V_1}{a}$.
- Échauffement isochore au contact thermique de la source TH_2 à T_2 jusqu'à l'état C de température T_2.
- Détente isotherme réversible au contact de la source TH_2 à T_2 jusqu'à l'état D de volume V_1.
- Refroidissement isochore au contact thermique de la source TH_1 jusqu'à l'état A.

R1. Dans quel sens est décrit un cycle moteur dans le diagramme de Clapeyron ?
Représenter ce cycle de Stirling dans le diagramme de Clapeyron.

Solution: Sur un cycle moteur, le travail reçu algébriquement par le gaz est négatif, donc l'aire du cycle est positive. Le cycle doit donc être décrit dans le sens direct.



R2. Exprimer les travaux et les transferts thermiques reçus par les n moles du gaz parfait sur chacune des quatre transformations, en fonction des températures T_1 et T_2, du taux de compression $a = \dfrac{V_2}{V_1}$, et de n, R et γ. Déterminer les signes.

Solution:

- Transformation $A \to B$
  - La transformation est isochore, donc $W_{AB} = 0$
  - D'après le 1er principe sur $A \to B$: $\Delta_{AB}U = Q_{AB}$

    Soit $\boxed{Q_{AB} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) > 0}$
- Transformation $B \to C$
  - La transformation est isotherme à T_2

$$\begin{aligned} W_{BC} &= \int_{V_1}^{V_2} -P\mathrm{d}V \\ &= \int_{V_1}^{V_2} -\frac{nRT_2}{V}\mathrm{d}V \\ &= -nRT_2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} \\ &= -nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \end{aligned}$$

    Soit $\boxed{W_{BC} = -nRT_2 \ln(a) < 0}$
  - La transformation est isotherme à T_2 et le gaz est parfait, donc $\Delta_{BC}U = 0$
  - D'après le 1er principe sur $B \to C$: $\Delta_{BC}U = Q_{BC} + W_{BC}$

    Ainsi $\boxed{Q_{BC} = nRT_2 \ln(a) > 0}$
- Transformation $C \to D$

  De même que sur $A \to B$: $W_{CD} = 0$ et $\boxed{Q_{CD} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_2) < 0}$
- Transformation $D \to A$

  De même que sur BC : $\boxed{W_{DA} = -nRT_1 \ln\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right) = nRT_1 \ln(a) > 0}$ et $\boxed{Q_{BC} = -nRT_1 \ln(a) < 0}$

R3. Identifier les transferts thermiques reçus par le gaz parfait de la part de la source chaude, et ceux reçus de la part de la source froide.

Solution: On étudie ici un moteur, donc le transfert thermique reçu de la part de la source chaude est positif : $\boxed{Q_{\text{ch}} = Q_{AB} + Q_{BC} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln(a)}$

Le transfert thermique reçu de la part de la source froide est négatif :

$$\boxed{Q_{\text{fr}} = Q_{CD} + Q_{DA} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_2) - nRT_1 \ln(a)}$$

R4. Exprimer le rendement thermodynamique de ce cycle en fonction des températures T_1, T_2, de γ et du taux de compression a.

Solution: Le rendement d'un moteur est défini par :

$$\begin{aligned} r &= \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_{\text{ch}}} \\ &= -\frac{-nRT_2 \ln(a) + nRT_1 \ln(a)}{\dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln(a)} \\ &= \frac{(T_2 - T_1)\ln(a)}{\dfrac{T_2 - T_1}{\gamma - 1} + T_2 \ln(a)} \end{aligned}$$

$$\boxed{r = \frac{1}{\dfrac{1}{\ln(a)(T_2 - T_1)} + \dfrac{T_2}{T_2 - T_1}}}$$

R5. Exprimer l'entropie créée par irréversibilité au sein du système au cours du cycle. Quel type d'irréversibilité entre en jeu ?

R6. ♪ ♪ On admet que le transfert thermique fourni au gaz lors du chauffage isochore est récupérée par un régénérateur lors du refroidissement isochore.
Que devient le rendement ?
Comparer ce rendement à celui de Carnot.

Solution: Le transfert thermique fourni au gaz lors du chauffage isochore est récupérée par un régénérateur lors du refroidissement isochore, il ne coûte donc rien.
Par conséquent, $Q_{\text{ch}} = Q_{BC}$
Ainsi

$$\begin{aligned} r' &= -\frac{-nRT_2 \ln(a) + nRT_1 \ln(a)}{nRT_2 \ln(a)} \\ &= \frac{T_2 - T_1}{T_2} \\ &= 1 - \frac{T_1}{T_2} \end{aligned}$$

Le rendement est alors égal à celui de Carnot.

Exercice n°5 Cycle de Joule ♪

On étudie le principe d'une turbine à gaz. Dans cet exercice, le gaz est supposé parfait (coefficient adiabatique $\gamma = 7/5$) :

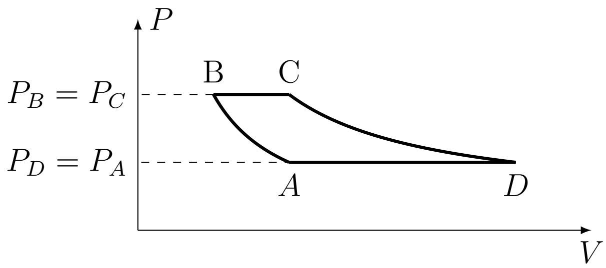
- $A \to B$: Le gaz est comprimé dans un compresseur (compression adiabatique réversible)

- $B \to C$: Il est chauffé à pression constante $P_B = P_C$ en contact avec une source chaude à $T_C = 600$ K
- $C \to D$: Il est détendu, entraînant avec lui une hélice (détente adiabatique réversible)
- $D \to A$: Le gaz est refroidit à pression constante $P_D = P_A$ au contact d'une source froide à $T_A = 300$ K

On notera n la quantité de matière du gaz, R la constante des gaz parfaits et α le rapport de compression $\alpha = \dfrac{P_B}{P_A} = 5$

R1. Représente le cycle dans le diagramme (P, V).

Solution: Pour un gaz parfait en transformation adiabatique réversible nous pouvons écrire que PV^γ est constant. Dans le diagramme (P, V) une telle transformation se représente par une hyperbole « plus pentue » que celle de l'isotherme.



R2. Définir le rendement et montrer que l'on peut l'exprimer $\eta = 1 + \dfrac{T_\mathrm{A} - T_\mathrm{D}}{T_\mathrm{C} - T_\mathrm{B}}$

Solution: Le rendement du moteur est défini par : $\eta = -\dfrac{W_\text{cycle}}{Q_c}$, avec $Q_c = Q_{BC}$ (la transformation BC a lieu en contact avec la source chaude).
D'après le premier principe sur un cycle : $0 = W_\text{cycle} + Q_{BC} + Q_{AD}$ (les autres transformations sont adiabatiques).
Ainsi $\eta = 1 + \dfrac{Q_{DA}}{Q_{BC}}$
Enfin, sur les transformations BC et DA isobares, le premier principe avec l'enthalpie permet d'écrire $Q_{BC} = nC_{Pm}(T_C - T_B)$ et $Q_{DA} = nC_{Pm}(T_A - T_D)$
Ainsi $\boxed{\eta = 1 + \dfrac{T_A - T_D}{T_C - T_B}}$

R3. Exprimer T_A en fonction de T_B, γ et α, et T_D en fonction de T_C, γ et α

Solution: L'idée est d'exploiter la loi de Laplace sur les transformations AB et CD.

$$\begin{aligned}
T_A^\gamma P_A^{1-\gamma} &= T_B^\gamma P_B^{1-\gamma} \\
T_A &= T_B \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \\
T_A &= T_B^{\frac{1}{\gamma}-1} \\
T_C^\gamma P_C^{1-\gamma} &= T_D^\gamma P_D^{1-\gamma} \\
T_D &= T_C \left(\frac{P_C}{P_D}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \\
T_D &= T_C \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \\
T_D &= T_C^{\frac{1}{\gamma}-1}
\end{aligned}$$

R4. Établir une nouvelle expression de η, uniquement en fonction de α et γ, puis faire l'application numérique.

> **Solution:** Rendement : $\eta = 1 + \dfrac{T_B^{\frac{1}{\gamma}-1} - T_C^{\frac{1}{\gamma}-1}}{T_C - T_B}$, soit $\boxed{r = 1 - 5^{\frac{1}{\gamma}-1} = 0,37}$

R5. Comparer au rendement de Carnot puis commenter.

> **Solution:** Rendement de Carnot : $\eta_C = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 1 - \dfrac{T_A}{T_C} = 0,5 > \eta$
> Le cycle de Joule présente deux transformations isobare en contact avec les thermostats, au cours desquelles la température du gaz varie pour atteindre la température du thermostat. Ces transformations ne sont pas réversibles car le transfert thermique est échangé entre deux système de températures différentes.

On donne le calcul suivant : $5^{-\frac{2}{7}} \simeq 0,63$

Exercice n°6 Cycle d'Ericson ♪

En 1833, John Ericson brevette son moteur (éponyme), capable de produire une puissance de 5 ch (3,7 kW). Le fluide utilisé est simplement de l'air (supposé gaz parfait diatomique, $\gamma = 1,4$), de quantité de matière n.

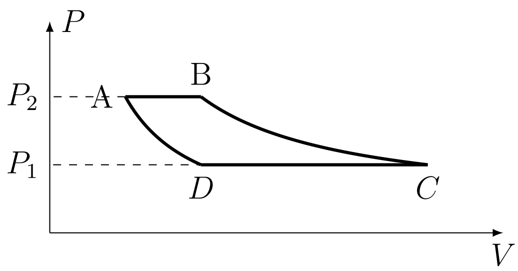
Le cycle est constitué de deux isothermes réversibles (notons T_1 et $T_2 = 2T_1$ leurs températures) et deux isobares (de pressions P_1 et $P_2 = 2P_1$).

R1. Rappeler les expressions des capacités thermiques à volume et à pression constante d'un gaz parfait en fonction de n, R et γ. Les simplifier compte tenu de la valeur $\gamma = 7/5$.

> **Solution:** Capacité thermique à volume constant : $C_V = \dfrac{nR}{\gamma - 1} = \dfrac{5}{2}nR$
> Capacité thermique à pression constante : $C_P = \dfrac{nR\gamma}{\gamma - 1} = \dfrac{7}{2}nR$

R2. Comment est représentée une transformation isotherme dans le diagramme de Clapeyron (P, V) ? même question pour une transformation isobare ?
Représenter les deux isobares à P_1 et P_2, et les deux isothermes à T_1 et T_2.

> **Solution:** Une transformation isotherme d'un gaz est représentée par une hyperbole dans le diagramme (P, V).
> Une transformation isobare est représentée par un segment horizontal.



de B à C : isotherme à la température $T_2 = 2T_1 > T_1$
de D à A : isotherme à la température T_1

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D \\
P_2 = 2P_1 & & P_2 = 2P_1 & & P_1 & & P_1 \\
T_1 & & T_2 = 2T_1 & & T_2 = 2T_1 & & T_1 \\
V_A = \dfrac{nRT_1}{2P_1} & & V_B = \dfrac{nRT_2}{2P_1} = \dfrac{2nRT_1}{2P_1} = \dfrac{nRT_1}{P_1} & & V_C = \dfrac{2nRT_1}{P_1} & & V_D = \dfrac{nRT_1}{P_1} = V_B
\end{array}$$

R3. Dans quel sens est décrit un cycle moteur ?
Représenter le cycle d'Ericson dans le plan (P, V) et indiquer son sens dessus.

Solution: Un cycle moteur est décrit dans le sens horaire : sens ABCDA ci-dessus.

R4. Exprimer les travaux reçus par l'air pour chacune des étapes du cycle, en fonction du produit nRT_1.

Solution:

- $A \to B$:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_{V_A}^{V_B} -P_{\text{ext}}\mathrm{d}V \\ &= \int_{V_A}^{V_B} -P_2\mathrm{d}V \\ &= -2P_1(V_B - V_A) \\ &= -2P_1\left(\frac{nRT_1}{P_1} - \frac{nRT_1}{2P_1}\right) \\ &= -P_1V_1 < 0 \end{aligned}$$

- $B \to C$:

$$\begin{aligned} W_{BC} &= \int_{V_B}^{V_C} -P_{\text{ext}}\mathrm{d}V \\ &= \int_{V_B}^{V_C} -P\mathrm{d}V \\ &= -\int_{V_B}^{V_C} \frac{2nRT_1}{V}\mathrm{d}V \\ &= -2nRT_1 \ln\frac{V_C}{V_B} \\ &= -2nRT_1 \ln(2) < 0 \end{aligned}$$

- $C \to D$:

$$\begin{aligned} W_{CD} &= \int_{V_C}^{V_D} -P_{\text{ext}}\mathrm{d}V \\ &= \int_{V_C}^{V_D} -P_1\mathrm{d}V \\ &= -P_1(V_D - V_C) \\ &= -P_1\left(\frac{nRT_1}{P_1} - \frac{2nRT_1}{P_1}\right) \\ &= P_1V_1 > 0 \end{aligned}$$

- $D \to A$:

$$\begin{aligned} W_{DA} &= -nRT_1 \ln\frac{V_A}{V_D} \\ &= -nRT_1 \ln(1/2) \\ &= nRT_1 \ln(2) > 0 \end{aligned}$$

R5. De même pour les transferts thermiques.
Pour les transformations isobares, on utilisera la version la plus adaptée du premier principe.

Solution:

- 1er principe sur $A \to B$ avec l'enthalpie car la transformation est isobare : $Q_{AB} = \Delta_{AB} H = nC_{Pm}(T_B - T_A)$, soit $\boxed{Q_{AB} = \frac{7}{2} nRT_1 > 0}$
- 1er principe sur $C \to D$ avec l'enthalpie car la transformation est isobare : $Q_{CD} = \Delta_{CD} H = nC_{Pm}(T_D - T_d)$, soit $\boxed{Q_{CD} = -\frac{7}{2} nRT_1}$
- 1er principe sur $B \to C$: $\Delta_{BC} U = W_{BC} + Q_{BC}$, or $\Delta_{BC} U = 0$ (d'après 1re loi de Joule), donc $\boxed{Q_{BC} = -W_{BC} = 2nRT_1 \ln(2) > 0}$
- De même, $\boxed{Q_{DA} = -W_{DA} = -nRT_1 \ln(2)}$

R6. En déduire l'expression puis la valeur du rendement du cycle.
Comparer au rendement de Carnot.
On donne : $\ln 2 \simeq 0,69$

Solution: Les transferts thermiques reçus par le gaz de la part de la source chaude sont positifs dans un moteur ditherme, donc $Q_c = Q_{AB} + Q_{BC}$

$$\begin{aligned}
\text{Rendement : } \quad \eta &= \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_c} \\
&= -\frac{W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}}{Q_{AB} + Q_{BC}} \\
&= -\frac{nRT_1(\ln(2) - 2\ln(2))}{\frac{7}{2} nRT_1 + 2nRT_1 \ln(2)} \\
&= \frac{\ln(2)}{\ln(2) + \frac{7}{2}} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{7}{2\ln(2)}} \\
&\approx \frac{1}{1 + \frac{7}{1{,}38}} \approx \frac{1}{1+5} \approx 0,17
\end{aligned}$$

Rendement de Carnot : $\eta_C = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 0,5 > \eta$

Le cycle d'Ericson présente deux transformations isobares en contact avec les thermostats, au cours desquelles la température du gaz varie pour atteindre la température du thermostat. Ces transformations ne sont pas réversibles car le transfert thermique est échangé entre deux système de températures différentes.

III Exercices d'approfondissement

Exercice n°7 Contraintes liées aux principes ♪ ♪

On considère une machine thermique fonctionnant au contact d'une unique source de chaleur de température T_0. Sur un cycle, le fluide reçoit le transfert thermique Q_0 de la part de la source de chaleur et un travail W.

R1. Appliquer les deux principes sur un cycle.

Solution:

$$\begin{aligned}
0 &= Q_0 + W \\
0 &= \frac{Q_0}{T_0} + S_{\text{créée}}
\end{aligned}$$

R2. Déterminer les signes de Q_0 et W. Est-il possible d'avoir un moteur monotherme ?

Solution: $S_{\text{créée}} \geq 0 \Rightarrow Q_0 \leq 0 \Rightarrow W \geq 0$
Un moteur monotherme n'existe donc pas ! (c'est un énoncé historique du deuxième principe).

On étudie un réfrigérateur dont on ouvre la porte.

R3. Démontrer qu'il est impossible de refroidir sa cuisine en laissant ouverte la porte de son réfrigérateur.

Solution:
Le réfrigérateur en fonctionnement libère dans la cuisine le transfert thermique $-Q_c > 0$.
La porte ouverte, il libère également le transfert thermique $-Q_f < 0$.
La question est de savoir s'il est possible d'avoir $|Q_f| > |Q_c|$, c'est-à-dire $Q_f > -Q_c$
D'après le premier principe $W + Q_c + Q_f = 0$, donc $Q_f = -Q_c - W$
Or $W > 0$ (machine réceptrice), donc $Q_f < -Q_c$
Il est donc impossible de refroidir l'air de la cuisine en ouvrant la porte du réfrigérateur !

IV Résolution de problème

Exercice n°8 Coût d'un refroidissement ♪ ♪ ♪

Vous achetez six bouteilles de 1 L de jus de fruit que vous rangez dans votre réfrigérateur. Une heure plus tard, elles sont à la température du frigo.

Question : combien vous coûte ce refroidissement ?

Données :

— l'efficacité thermodynamique du réfrigérateur vaut 1,5 ;
— l'isolation imparfaite du réfrigérateur se traduit par des fuites thermiques de puissance 10 W ;
— capacité thermique massique de l'eau liquide : $4,2$ kJ · K^{-1} · kg^{-1} ;
— tarifs EDF : 1 kWh coûte $0,20$ €.

Solution:

- Système : {jus de fruit}
  On l'assimile à de l'eau liquide dont la température passe de $T_0 = 25$ °C à $T_f = 5$ °C
  D'après le premier principe appliqué au jus de fruit : $\Delta U = Q + W$, or l'eau liquide est incompressible, donc de volume constant. Ainsi $W = 0$
  On en déduit que le jus de fruit reçoit le transfert thermique : $\boxed{Q = mc(T_f - T_0) = \rho V c(T_f - T_0)}$
- Système : {machine frigorifique = le fluide frigorigène }
  L'efficacité du réfrigérateur est $e = \dfrac{Q_f}{W_{\text{cycle}}}$
  Les jus de fruits constituent la source froide : le transfert thermique Q_f reçu par le fluide frigorigène de la part de la source froide (= les jus de fruits), est égal à l'opposé de ce que reçoivent les jus de fruits) : $Q_f = -Q$
  Ainsi : $\boxed{W_{\text{cycle}} = eQ_f = -eQ = -e\rho V c(T_f - T_0)}$
  A.N. : $W_{\text{cycle}} = 752$ kJ $= 0,209$ kWh, avec 1 kWh $= 1 \times 3600$ kJ
  Ce qui coûte 0,04 €.