Thème I. Ondes et signaux (Induction)

TD n°24 Induction dans un circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7
Évaluer et citer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur.	✎						
Définir l'inductance mutuelle entre deux bobines.	✎					✎	
Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en « influence totale » .	✎					✎	
Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'orientation.		✎	✎	✎	✎		
En présence d'induction mutuelle, établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.		✎	✎	✎	✎		
Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction ou d'induction mutuelle en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.				✎	✎		
Établir la loi des tensions d'un transformateur de tension.							✎

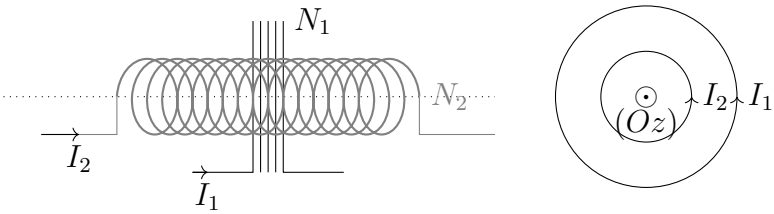
Parcours possibles

- Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : 2 et 3.
- Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : 1, 2, 3, 5 (Q1 à Q6)
- Si vous êtes à l'aise : 3, 5, 6, 4, 7.

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Induction mutuelle *(D'après Oral CCINP)*

Une bobine circulaire de rayon R_1 de N_1 spires enlace une bobine longue de N_2 spires, de longueur ℓ et de rayon R_2.

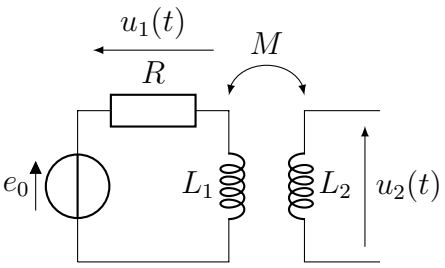


Q1. Déterminer l'inductance propre L_2 de la bobine 2 (bobine longue).

Q2. Déterminer l'expression de l'inductance mutuelle M de ces deux circuits.

Exercice n°2 Mesure d'un coefficient d'inductance mutuelle

Le montage ci-contre permet de mesurer le coefficient d'inductance mutuelle entre deux bobines. Les deux bobines se font face comme sur la figure.
La première bobine est montée en série avec une résistance $R = 100\ \Omega$ et un générateur de tension e_0 harmonique de fréquence $f = 2,0$ kHz.
Les tensions u_1 et u_2 sont mesurées grâce à un oscilloscope supposé idéal, c'est-à-dire de résistance d'entrée infinie.



Q1. Quelle est l'intensité circulant dans la bobine 2 ? D'après la loi de comportement habituelle de la bobine (celle vue en début d'année), que vaudrait alors la tension u_2 ? Pourquoi cette loi n'est elle pas applicable telle quelle ici ?

Q2. Exprimer la tension u_2 en fonction de M et u_1.

Q3. Calculer M sachant que les tensions lues à l'oscilloscope ont des amplitudes $U_1 = 3,00$ V et $U_2 = 0,50$ V.

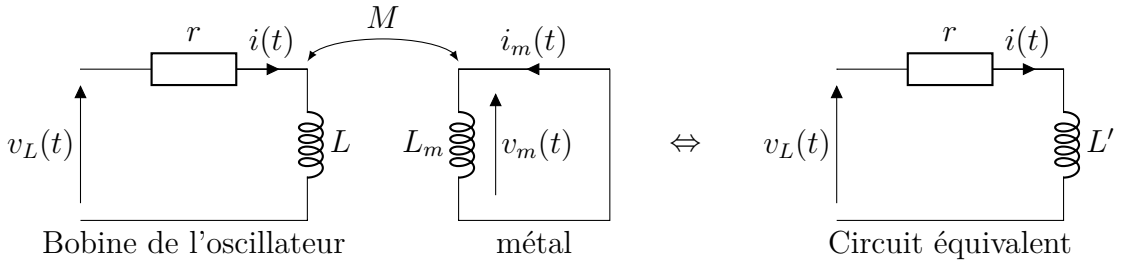
Q4. Comment placer les deux bobines pour obtenir le coefficient M maximal ?

Exercice n°3 Détecteur de métaux

Pour fabriquer le détecteur de métaux, on associe deux circuits oscillateurs. On note f_r la fréquence fixe du circuit de référence et f_d la fréquence variable du circuit de détection. En l'absence de détection, les fréquences d'oscillations des oscillateurs sont identiques :

$$f_d = f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Lorsqu'un métal est présent dans le champ de la bobine de détection, d'inductance propre L , on admet que le métal détecté se comporte comme une bobine d'inductance propre L_m. Le couplage entre les deux inductances est matérialisé par une inductance mutuelle notée M. L'inductance propre du circuit de détection se trouve alors modifiée et devient L'.



Q1. Exprimer la force électromotrice induite dans le métal.

Q2. Représenter le circuit électrique équivalent au métal. En déduire l'expression de v_m.

Q3. Compte-tenu du court-circuit, en déduire que $\dfrac{\mathrm{d}i_m}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{M}{L_m}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

Q4. Exprimer la force électromotrice induite dans le circuit de l'oscillateur.

Q5. Représenter le circuit électrique équivalent à l'oscillateur. En déduire l'expression de v_L en fonction de r, i, L, M et i_m.

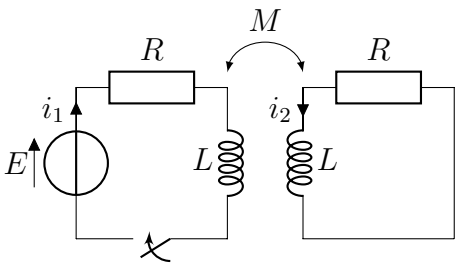
Q6. En déduire alors que la tension v_L peut se mettre sous la forme $v_L(t) = ri + L'\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. On exprimera L' en fonction de L, M, L_m.

Q7. Sachant que $M^2 \ll LL_m$, en déduire que la détection d'un métal engendre une variation relative $\dfrac{f_d - f_r}{f_r}$ de la fréquence d'oscillation du détecteur de la quantité $\dfrac{1}{2}\dfrac{M^2}{LL_m}$

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°4 Régime transitoire dans deux circuits inductifs couplés

On étudie deux circuits électriques couplés par induction mutuelle. Le premier circuit comporte un solénoïde d'inductance L, une résistance R, un générateur de tension stabilisée de force électromotrice E constante, et un interrupteur disposés en série. Le deuxième circuit comporte un solénoïde d'inductance L, une résistance R en série. On note M le coefficient d'inductance mutuelle, qui est supposé positif (les deux bobines sont orientées pour qu'il en soit ainsi).



Q1. Établir le système de deux équations différentielles vérifiées par les intensités i_1 et i_2.

Q2. En déduire deux équations différentielles vérifiées, l'une par $I = i_1 - i_2$ et l'autre par $J = i_1 + i_2$.

Q3. L'interrupteur est initialement ouvert (pour $t < 0$), et il est fermé à l'instant $t = 0$.
En posant $\tau_1 = \dfrac{L+M}{R}$ et $\tau_2 = \dfrac{L-M}{R}$, déterminer les expressions des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ pour $t > 0$, dans le cas où $M < L$. Donner l'allure des représentations graphiques de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction du temps.

Q4. Effectuer une bilan de puissance.

Exercice n°5 Chauffage par induction

Le chauffage du fond métallique des récipients de cuisson peut être réalisé directement au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable. Logé dans une table en céramique, un bobinage, nommé inducteur, alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire assimilable à une spire unique fermée sur elle même, située au fond de la casserole.
L'inducteur, de rayon 5 cm, possède 20 spires de cuivre de résistance $R_1 = 1,8 \times 10^{-2}\ \Omega$ et d'auto-inductance L_1. L'inducteur est alimenté par une tension $v_1(t)$.
La plaque de résistance $R_2 = 8,3\ \text{m}\Omega$ et d'auto-inductance $L_2 = 0,24\ \mu\text{H}$, nommée induit, est assimilable à une spire refermée sur elle même.
Le coefficient de mutuelle inductance est estimé à $M = 2,0\ \mu\text{H}$.

Q1. L'inducteur, alimenté en l'absence d'induit, sous une tension efficace de $V_{1\text{eff}} = 24$ V, à la fréquence de $f = 25$ kHz, est traversé par un courant de valeur efficace égale à $I_{1\text{eff}} = 5,1$ A.
Faire le circuit électrique de l'inducteur. Établir la relation, en complexe entre $\underline{v_1}$, $\underline{i_1}$, R_1, L_1 et ω.
En passant astucieusement au module, exprimer littéralement son auto-inductance L_1 en fonction de $V_{1,\text{eff}}$, $I_{1,\text{eff}}$ et f. Puis en donner la valeur numérique.

Q2. Vérifier numériquement (en faisant les applications numériques) que $L_1\omega \gg R_1$ et $L_2\omega \gg R_2$. On se placera dans ce cas dans la suite.

Q3. Faire un schéma électrique qui retranscrit la situation, sur lequel apparaît le circuit de l'inducteur (générateur, résistance, inductance L_1) et le circuit de l'induit (résistance R_2, inductance L_2), les deux circuits étant couplés par la mutuelle M.
Faire ensuite un schéma électrique équivalent.

Q4. Établir les équations (différentielles) électriques relatives aux deux circuits.

Q5. En déduire l'expression de $\dfrac{\underline{i_2}}{\underline{i_1}}$, puis celle du rapport des amplitudes $\left|\dfrac{I_{2m}}{I_{1m}}\right|$, que l'on simplifiera compte tenu de l'approximation $R_2 \ll L_2\omega$.
Faire l'application numérique

Q6. Établir l'expression de $\underline{v_1}$ en fonction de $\underline{i_1}$ et de R_1, R_2, L_1, L_2, M, ω. Simplifier compte tenu des approximations précédentes.

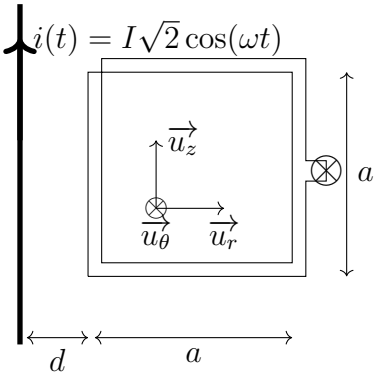
Q7. En déduire que $I_{2,m} = V_{1,m} \times \dfrac{|M|}{(L_1L_2 - M^2)\omega}$.
Faire l'application numérique de I_2.
En déduire la puissance moyenne dissipée dans la casserole donnée par $\mathscr{P}_2 = \dfrac{1}{2}R_2I_{2m}^2$.

Q8. On soulève la casserole. Comment varie l'amplitude du courant i_2 circulant dans l'induit, et donc la puissance dissipée dans l'induit ?

Q9. Pour des raisons de sécurité, on se fixe comme objectif de limiter les pertes par effet Joule dans l'inducteur à 50 W (en moyenne). Quelle est alors la valeur efficace du courant maximal admissible dans l'inducteur ?
En déduire la valeur efficace maximale de la tension d'alimentation, l'intensité efficace du courant dans la plaque et la puissance (moyenne) de chauffe développée dans celle-ci.

Exercice n°6 Ligne haute tension *(D'après Oral CCINP)*

Une ligne haute tension transporte un courant sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz et de valeur efficace $I = 1$ kA.
On approche une bobine plate de N spires carrées de côte $a = 30$ cm à une distance $d = 2$ cm comme indiqué sur le schéma.
Cette bobine, d'inductance et de résistance négligeables, est fermée sur une ampoule qui éclaire si la tension efficace à ses bornes est supérieure à 1,5 V.



Q1. Déterminer l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.

Q2. En déduire le nombre de spires nécessaire pour la bobine.

On donne le champ magnétique créé par le fil infini à la distance r en coordonnées polaires : $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\overrightarrow{u_\theta}$.

III Résolution de problème

Exercice n°7 Dimensionnement d'un transformateur

On cherche à dimensionner le transformateur utilisé pour recharger un portable. La chaîne d'énergie, logée dans un boîtier placé sur le cordon d'alimentation du portable, se compose successivement :

- de l'alimentation EDF du secteur qui délivre la tension $v_1(t) = V_{0,1}\sin(2\pi f_0 t)$, où $f_0 = 50$ Hz et $V_{0,1} = 240$ V,
- d'un transformateur, dont la sortie est $v_2(t) = V_{0,2}\sin(2\pi f_0 t)$, et dont le rapport de transformation est noté m,
- d'un redresseur, montage qui délivre la valeur absolue v_3 de la tension d'entrée v_2,
- d'un filtre moyenneur, dont la sotie v_4 est la valeur moyenne de la tension d'entrée v_3. La batterie de portable est branchée à la sortie, elle requiert une tension de charge constante $v_4 = 12$ V.

Déterminer le rapport m du transformateur à utiliser.