

Thème I. Ondes et signaux (Induction)

TD n°24 Induction dans un circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps

Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7
Capacités							
Évaluer et citer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur.	🔪						
Définir l'inductance mutuelle entre deux bobines.	🔪					🔪	
Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en « influence totale » .	🔪					🔪	
Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'orientation.		🔪	🔪	🔪	🔪		
En présence d'induction mutuelle, établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.		🔪	🔪	🔪	🔪		
Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction ou d'induction mutuelle en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.				🔪	🔪		
Établir la loi des tensions d'un transformateur de tension.							🔪

Parcours possibles

- 🎵 Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : 1, 2, 4 (Q1 à Q4)
- 🎵 🎵 Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : 1, 2, 3, 4 (Q1 à Q6)
- 🎵 🎵 🎵 Si vous êtes à l'aise : 4, 5, 6, 7.

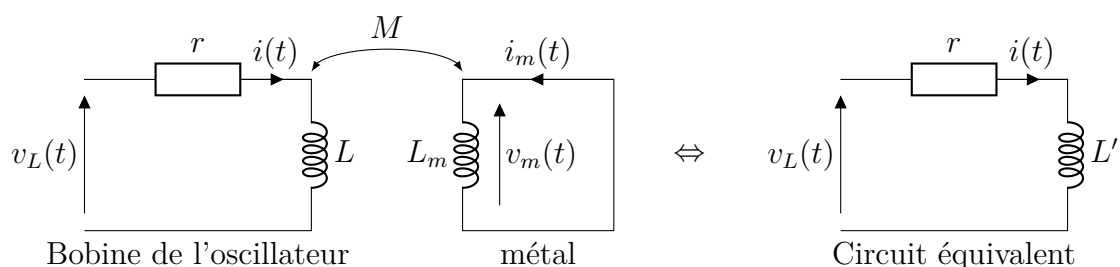
I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Détecteur de métaux 🎵

Pour fabriquer le détecteur de métaux, on associe deux circuits oscillateurs. On note  $f_r$  la fréquence fixe du circuit de référence et  $f_d$  la fréquence variable du circuit de détection. En l'absence de détection, les fréquences d'oscillations des oscillateurs sont identiques :

$$f_d = f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Lorsqu'un métal est présent dans le champ de la bobine de détection, d'inductance propre  $L$ , on admet que le métal détecté se comporte comme une bobine d'inductance propre  $L_m$ . Le couplage entre les deux inductances est matérialisé par une inductance mutuelle notée  $M$ . L'inductance propre du circuit de détection se trouve alors modifiée et devient  $L'$ .



- Q1. Exprimer la force électromotrice induite dans le métal.
- Q2. Représenter le circuit électrique équivalent au métal. En déduire l'expression de  $v_m$ .
- Q3. Compte-tenu du court-circuit, en déduire que  $\frac{di_m}{dt} = -\frac{M}{L_m} \frac{di}{dt}$

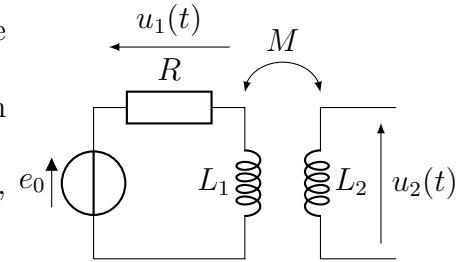
- Q4. Exprimer la force électromotrice induite dans le circuit de l'oscillateur.
- Q5. Représenter le circuit électrique équivalent à l'oscillateur. En déduire l'expression de  $v_L$  en fonction de  $r$ ,  $i$ ,  $L$ ,  $M$  et  $i_m$ .
- Q6. En déduire alors que la tension  $v_L$  peut se mettre sous la forme  $v_L(t) = ri + L' \frac{di}{dt}$ . On exprimera  $L'$  en fonction de  $L$ ,  $M$ ,  $L_m$ .
- Q7. 🎵 Sachant que  $M^2 \ll LL_m$ , en déduire que la détection d'un métal engendre une variation relative  $\frac{f_d - f_r}{f_r}$  de la fréquence d'oscillation du détecteur de la quantité  $\frac{1}{2} \frac{M^2}{LL_m}$

### Exercice n°2 Mesure d'un coefficient d'inductance mutuelle 🎵

Le montage ci-contre permet de mesurer le coefficient d'inductance mutuelle entre deux bobines. Les deux bobines se font face comme sur la figure.

La première bobine est montée en série avec une résistance  $R = 100 \Omega$  et un générateur de tension  $e_0$  harmonique de fréquence  $f = 2,0 \text{ kHz}$ .

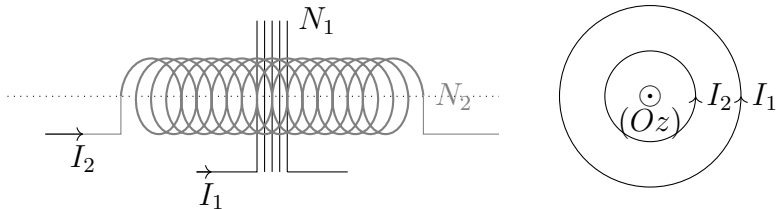
Les tensions  $u_1$  et  $u_2$  sont mesurées grâce à un oscilloscope supposé idéal, c'est-à-dire de résistance d'entrée infinie.



- Q1. Quelle est l'intensité circulant dans la bobine 2? D'après la loi de comportement habituelle de la bobine (celle vue en début d'année), que vaudrait alors la tension  $u_2$ ? Pourquoi cette loi n'est elle pas applicable telle quelle ici?
- Q2. Exprimer la tension  $u_2$  en fonction de  $M$  et  $u_1$ .
- Q3. Calculer  $M$  sachant que les tensions lues à l'oscilloscope ont des amplitudes  $U_1 = 3,00 \text{ V}$  et  $U_2 = 0,50 \text{ V}$ .
- Q4. Comment placer les deux bobines pour obtenir le coefficient  $M$  maximal?

### Exercice n°3 Induction mutuelle (D'après Oral CCINP) 🎵

Une bobine circulaire de rayon  $R_1$  de  $N_1$  spires enlace une bobine longue de  $N_2$  spires, de longueur  $\ell$  et de rayon  $R_2$ .



- Q1. Déterminer l'inductance propre  $L_2$  de la bobine 2 (bobine longue).
- Q2. Déterminer l'expression de l'inductance mutuelle  $M$  de ces deux circuits.

## II Exercices d'approfondissement

### Exercice n°4 Chauffage par induction 🎵 🎵

Le chauffage du fond métallique des récipients de cuisson peut être réalisé directement au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable. Logé dans une table en céramique, un bobinage, nommé inducteur, alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire assimilable à une spire unique fermée sur elle-même, située au fond de la casserole.

L'inducteur, de rayon 5 cm, possède 20 spires de cuivre de résistance  $R_1 = 1,8 \times 10^{-2} \Omega$  et d'auto-inductance  $L_1$ . L'inducteur est alimenté par une tension  $v_1(t)$ .

La plaque de résistance  $R_2 = 8,3 \text{ m}\Omega$  et d'auto-inductance  $L_2 = 0,24 \mu\text{H}$ , nommée induit, est assimilable à une spire refermée sur elle-même.

Le coefficient de mutuelle inductance est estimé à  $M = 2,0 \mu\text{H}$ .

Q1. L'inducteur, alimenté en l'absence d'induit, sous une tension efficace de  $V_{1\text{eff}} = 24 \text{ V}$ , à la fréquence de  $f = 25 \text{ kHz}$ , est traversé par un courant de valeur efficace égale à  $I_{1\text{eff}} = 5,1 \text{ A}$ .

(a) Faire le circuit électrique de l'inducteur.

(b) Établir la relation, en complexe entre  $\underline{v}_1$ ,  $\underline{i}_1$ ,  $R_1$ ,  $L_1$  et  $\omega$ .

(c) En passant astucieusement au module, exprimer littéralement son auto-inductance  $L_1$  en fonction de  $V_{1,\text{eff}}$ ,  $I_{1,\text{eff}}$  et  $f$ .

(d) Puis en donner la valeur numérique.

Q2. Vérifier numériquement (en faisant les applications numériques) que  $L_1\omega \gg R_1$  et  $L_2\omega \gg R_2$ . On se placera dans ce cas dans la suite.

Q3. Faire un schéma électrique qui retranscrit la situation, sur lequel apparaît le circuit de l'inducteur (générateur, résistance, inductance  $L_1$ ) et le circuit de l'induit (résistance  $R_2$ , inductance  $L_2$ ), les deux circuits étant couplés par la mutuelle  $M$ .

Faire ensuite un schéma électrique équivalent.

Q4. Établir les équations (différentielles) couplées électriques relatives aux deux circuits.

Q5. En déduire l'expression de  $\frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1}$ , puis celle du rapport des amplitudes  $\left| \frac{I_{2m}}{I_{1m}} \right|$ , que l'on simplifiera compte tenu de l'approximation  $R_2 \ll L_2\omega$ .

Faire l'application numérique

Q6. Établir l'expression de  $\underline{v}_1$  en fonction de  $\underline{i}_1$  et de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M$ ,  $\omega$ . Simplifier compte tenu des approximations précédentes.

Q7. En déduire que  $I_{2,m} = V_{1,m} \times \frac{|M|}{(L_1L_2 - M^2)\omega}$ .

Faire l'application numérique de  $I_{2m}$ .

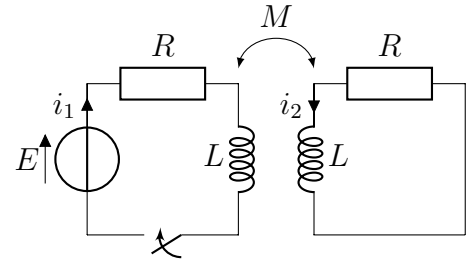
En déduire la puissance moyenne dissipée dans la casserole donnée par  $\mathcal{P}_2 = \frac{1}{2}R_2I_{2m}^2$ .

Q8. On soulève la casserole. Comment varie l'amplitude du courant  $i_2$  circulant dans l'induit, et donc la puissance dissipée dans l'induit ?

Q9. Pour des raisons de sécurité, on se fixe comme objectif de limiter les pertes par effet Joule dans l'inducteur à 50 W (en moyenne). Quelle est alors la valeur efficace du courant maximal admissible dans l'inducteur ? En déduire la valeur efficace maximale de la tension d'alimentation, l'intensité efficace du courant dans la plaque et la puissance (moyenne) de chauffe développée dans celle-ci.

### Exercice n°5 Régime transitoire dans deux circuits inductifs couplés 🎵 🎵 🎵

On étudie deux circuits électriques couplés par induction mutuelle. Le premier circuit comporte un solénoïde d'inductance  $L$ , une résistance  $R$ , un générateur de tension stabilisée de force électromotrice  $E$  constante, et un interrupteur disposés en série. Le deuxième circuit comporte un solénoïde d'inductance  $L$ , une résistance  $R$  en série. On note  $M$  le coefficient d'inductance mutuelle, qui est supposé positif (les deux bobines sont orientées pour qu'il en soit ainsi).



- Q1. Établir le système de deux équations différentielles couplées vérifié par les intensités  $i_1$  et  $i_2$ .  
Q2. En déduire deux équations différentielles vérifiées, l'une par  $I = i_1 - i_2$  et l'autre par  $J = i_1 + i_2$ .

L'interrupteur est initialement ouvert (pour  $t < 0$ ), et il est fermé à l'instant  $t = 0$ .

On pourra poser  $\tau_1 = \frac{L + M}{R}$  et  $\tau_2 = \frac{L - M}{R}$ .

- Q3. Que valent  $i_1(0^+)$  et  $i_2(0^+)$ ?  
Q4. Déterminer les expressions de  $I(t)$  et  $J(t)$  complètement.  
Q5. En déduire les expressions des intensités  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  pour  $t > 0$ , dans le cas où  $M < L$ .  
Donner l'allure des représentations graphiques de  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  en fonction du temps.

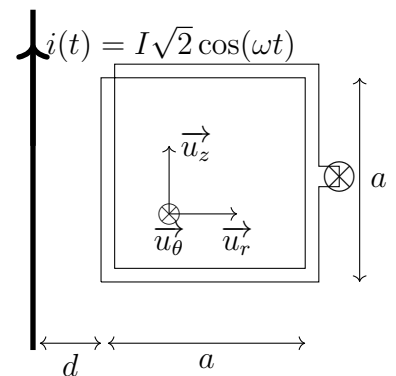
- Q6. Effectuer une bilan de puissance.

### Exercice n°6 Ligne haute tension (D'après Oral CCINP) 🎵 🎵 🎵

Une ligne haute tension transporte un courant sinusoïdal de fréquence  $f = 50$  Hz et de valeur efficace  $I = 1$  kA.

On approche une bobine plate de  $N$  spires carrées de côté  $a = 30$  cm à une distance  $d = 2$  cm comme indiqué sur le schéma.

Cette bobine, d'inductance et de résistance négligeables, est fermée sur une ampoule qui éclaire si la tension efficace à ses bornes est supérieure à 1,5 V.



On donne le champ magnétique créé par le fil infini à la distance  $r$  en coordonnées polaires :  $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ .

- Q1. Exprimer le flux du champ magnétique créé par le fil à travers la bobine.  
Q2. Déterminer l'inductance mutuelle  $M$  entre les deux circuits.  
Q3. En déduire le nombre de spires nécessaire pour la bobine.

## III Résolution de problème

### Exercice n°7 Dimensionnement d'un transformateur 🎵 🎵

On cherche à dimensionner le transformateur utilisé pour recharger un portable. La chaîne d'énergie, logée dans un boîtier placé sur le cordon d'alimentation du portable, se compose successivement :

- de l'alimentation EDF du secteur qui délivre la tension  $v_1(t) = V_{0,1} \sin(2\pi f_0 t)$ , où  $f_0 = 50$  Hz et  $V_{0,1} = 240$  V,
- d'un transformateur, dont la sortie est  $v_2(t) = V_{0,2} \sin(2\pi f_0 t)$ , et dont le rapport de transformation est noté  $m$ ,
- d'un redresseur, montage qui délivre la valeur absolue  $v_3$  de la tension d'entrée  $v_2$ ,
- d'un filtre moyenneur, dont la sortie  $v_4$  est la valeur moyenne de la tension d'entrée  $v_3$ . La batterie de portable est branchée à la sortie, elle requiert une tension de charge constante  $v_4 = 12$  V.

Déterminer le rapport  $m$  du transformateur à utiliser.