Thème I. Ondes et signaux (Induction)

TD n°25 Induction dans un circuit mobile dans un champ magnétique constant

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7
Interpréter qualitativement les phénomènes observés.	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎
Écrire les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe.	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎
Effectuer un bilan énergétique.	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎

Parcours possibles

— Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : 1 et 2.

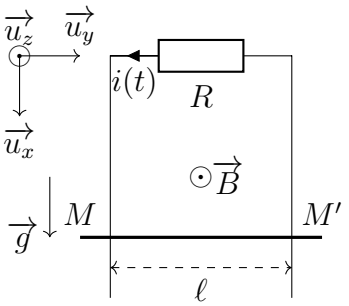
— Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : 5 puis 3

— Si vous êtes à l'aise : 5, 6, 3, 4.

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Rails de Laplace verticaux

Sur deux rails conducteurs fixes, constitués de deux tiges verticales et parallèles distantes de ℓ, glisse sans frottement une tige horizontale MM', de masse m, grâce à deux contacts glissants M et M'. On considère que l'axe Ox du repère est parallèle aux tiges verticales et l'axe Oy est parallèle à la tige MM'.
On négligera les résistances de la tige MM' et des rails, ainsi que le champ propre produit par les courants induits.
On produit un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$ uniforme et permanent, normal au plan du circuit formé par la tige MM' et les rails.
On note $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{u_x}$ l'accélération de la pesanteur.



Les extrémités supérieures des rails sont reliées à un résistor de résistance R. La tige MM' est abandonnée sans vitesse à l'instant $t = 0$. On désignera par $v(t)$ la norme de la vitesse de la tige et $i(t)$ l'intensité du courant dans le circuit à l'instant t.

Q1. Étudier qualitativement l'évolution du système.

Q2. Déterminer la force électromotrice e induite dans la tige MM'. En déduire l'équation électrique du montage.

Q3. Établir l'équation mécanique du système.

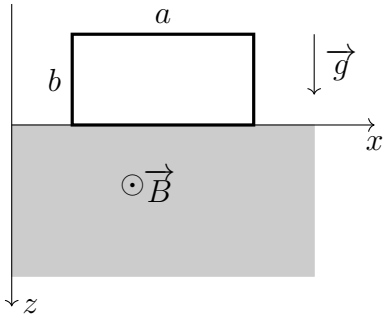
Q4. En déduire l'équation différentielle en $i(t)$ puis celle en $v(t)$. Montrer que i et v tendent vers une valeur limite que l'on précisera.

Q5. Déterminer complètement les expressions de $i(t)$ et de $v(t)$.

Q6. Établir le bilan de puissance. Comparer la puissance de la force de Laplace et la puissance électrique de la fem induite. Conclure sur la conversion électromagnétique.

Exercice n°2 Freinage par induction

La plupart des manèges des parcs d'attraction utilisent des dispositifs de freinage inductif en plus du freinage par friction. On modélise dans cet exercice une attraction proposant aux passagers d'une cabine d'ascenseur de tomber en chute quasi-libre pendant quelques secondes avant d'être brutalement freinés. La première étape du freinage est magnétique.



Dans le châssis de la cabine d'ascenseur est placée un bobinage conducteur modélisé par une unique spire rectangulaire de côtés a et b, de masse m et de résistance R. Sa position est repérée par la cote z du bas de la spire. Dans le demi-espace $z > 0$ règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et permanent.
À l'instant $t = 0$, la cabine se trouve dans la situation représentée sur la figure ci-contre où $z = 0$, sa vitesse valant alors $\vec{v} = v_0\vec{u_x}$.
Pour simplifier, les frottements de l'air seront négligés dans tout l'exercice.

Q1. Montrer que le mouvement ultérieur de la cabine reste une translation verticale selon l'axe (Oz).

Q2. Établir une équation différentielle portant sur la vitesse v de la cabine.

Q3. Résoudre cette équation. Que se passe-t-il lorsque $z = b$?

Q4. Justifier qu'un freinage magnétique ne peut pas suffire à arrêter la cabine d'ascenseur.

II Exercices d'approfondissement

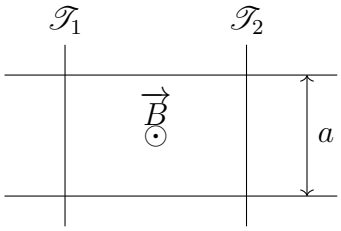
Exercice n°3 Rails de Laplace couplés *(D'après Oral Banque PT 2018)*

On considère deux barreaux $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ de résistance R et de masse m posés sur un rail et plongés dans un champ magnétique uniforme B.

À $t = 0$, on applique à $\mathscr{T}_1$ une vitesse v_0.

Q1. Mener une analyse physique de l'évolution du système.

Q2. Établir les équations couplées vérifiées par $v_1(t)$ et $v_2(t)$, on fera apparaître la grandeur $\dfrac{mR}{(aB)^2}$.

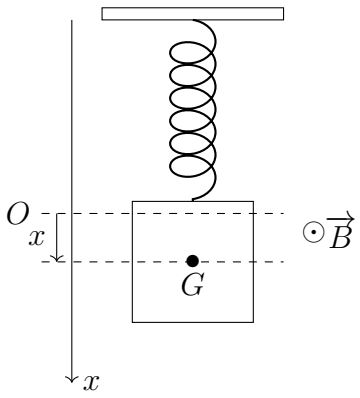


Q3. Établir les expressions de $v_1(t)$ et de $v_2(t)$.

Q4. Vérifier que la conversion d'énergie est parfaite.

Exercice n°4 Cadre *(D'après Oral Mines-Pont 2018)*

On considère un cadre de cuivre filiforme suspendu à un ressort de raideur k. Le cadre est carré de coté a, de centre G, de masse m et de résistance R. À l'équilibre, la moitié inférieure du cadre est plongée dans un champ $\vec{B}$ uniforme stationnaire de norme B. On n'étudie que le mouvement vertical du cadre.
L'origine O de l'axe (Ox) vertical descendant est prise à la position d'équilibre du cadre.
À l'instant initial , on descend le cadre vers le bas d'une distance $a/2$.
Mener l'analyse physique de l'évolution du système, puis établir l'équation différentielle du mouvement.



Exercice n°5 Haut-parleur *(E3A 2021 ; CCINP 2019&2020 ; Mines-Pont 2018 = LE classique)*

Les enceintes acoustiques d'une patinoire comportent chacune plusieurs haut-parleurs pour restituer toutes les plages de fréquences audibles de manière optimale.

Le schéma d'un haut-parleur est donné en figure 1. Il est constitué :

— d'un aimant fixe d'axe (Oz) créant un champ magnétique radial permanent $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_r}$ (figure 2) où B est la norme du champ magnétique supposée constante en tous points de l'entrefer et $\overrightarrow{u_r}$ est un vecteur unitaire dirigé selon le rayon de la bobine mobile et perpendiculaire à l'axe (Oz) ;

— d'une bobine d'axe (Oz) comportant N spires de rayon a et située dans l'entrefer de l'aimant. La longueur totale du bobinage est notée ℓ ;

— d'une membrane solidaire de la bobine.

L'ensemble { bobine + membrane } est un solide de masse m, mobile en translation selon l'axe (Oz). Le spider et la suspension exercent sur cet ensemble une force de rappel élastique vers la position d'équilibre $z = 0$:

$$\overrightarrow{F_e} = -kz\overrightarrow{u_z}$$

Cet ensemble est également soumis à une force de frottement visqueux de la part de l'air de la forme :

$$\overrightarrow{F} = -f\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_z}$$

où f et k sont des constantes.

Le vecteur $\overrightarrow{u_z}$ est un vecteur unitaire dirigé selon l'axe z et orienté dans le sens des z positifs.

La bobine est alimentée par un générateur extérieur délivrant la tension $u(t)$. Il apparaît un courant $i(t)$ dans la bobine orienté dans le sens indiqué sur la figure 2.

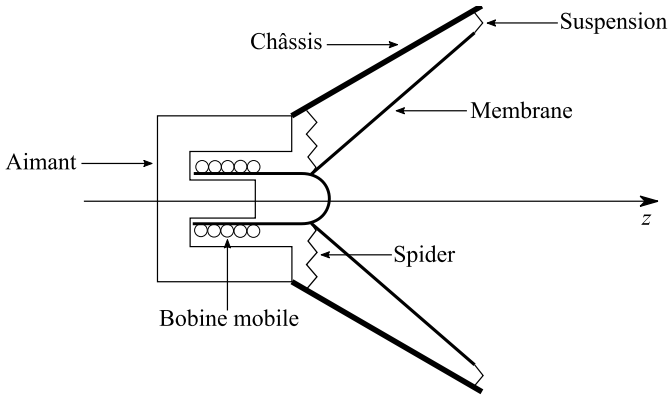


FIGURE 1 – Schéma en coupe d'un haut-parleur

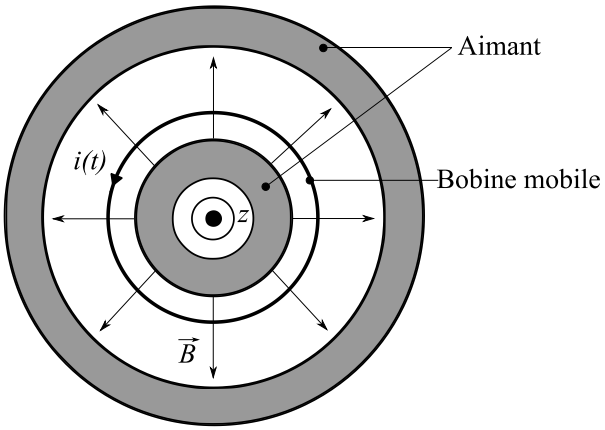


FIGURE 2 – Schéma en coupe d'un haut-parleur

Q1. Expliquer, sans calcul, le principe de fonctionnement d'un haut-parleur électrodynamique.

Q2. Déterminer l'expression vectorielle de la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur la bobine en fonction de l'intensité du courant $i(t)$, du nombre de spires N, du rayon a d'une spire et de la norme du champ magnétique B.

Q3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe (Oz) pour en déduire l'équation mécanique qui sera notée (1).

Q4. La bobine mobile étant dans un champ magnétique permanent, la puissance des forces de Laplace et celle de la force électromotrice induite se compensent exactement. En déduire que l'expression de la force électromotrice $e(t)$ induite par le mouvement de la bobine à la vitesse $v(t)$ dans le champ magnétique est donnée par la relation :

$$e(t) = 2\pi NaBv(t)$$

Q5. L'ensemble du circuit mobile possède une résistance électrique R et une inductance propre L. Représenter le schéma électrique équivalent du circuit mobile.

Q6. En déduire l'équation électrique du système notée (2).

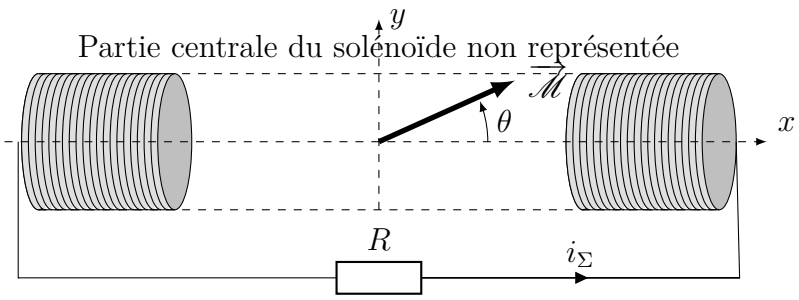
Q7. Le générateur extérieur délivre une tension $u(t) = u_0 \cos \omega t$. À partir des équations (1) et (2), à réécrire en notations complexes, montrer que l'expression de l'impédance électrique totale du circuit notée $\underline{Z}$ est donnée par la relation :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{(2\pi N a)^2 B^2}{mj\omega + \frac{k}{j\omega} + f} + R + jL\omega.$$

Q8. Pourquoi le fait d'associer plusieurs haut-parleurs permet-il de restituer toutes les plages de fréquences audibles de manière optimale dans l'enceinte de la patinoire ?

Exercice n°6 Alternateur

Un aimant de moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$, contenu dans le plan (Oxy), tourne sans frottement autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante $\overrightarrow{\omega} = \omega_0 \overrightarrow{u_z}$. Le moment d'inertie de l'aimant par rapport à l'axe (Oz) est noté J. Un opérateur extérieur applique un couple $\overrightarrow{\Gamma_{op}}$ à l'aimant. L'angle que fait l'aimant avec l'axe (Ox) est noté θ. L'axe (Oz) et l'aimant sont placés dans un solénoïde Σ contenant n spires par unité de longueur, d'axe (Ox), de résistance électrique r, d'inductance propre L. Σ est fermé sur une résistance R, très supérieure à r. L'ensemble modélise, par exemple, un alternateur de bicyclette qui débite dans une ampoule. L'opérateur est alors la personne qui pédale.



Q1. Analyser sans calcul le phénomène et expliquer pourquoi l'opérateur doit appliquer le couple supplémentaire $\overrightarrow{\Gamma_{op}}$ à l'aimant pour maintenir sa vitesse constante ω_0.

Q2. L'instant origine $t = 0$ est choisi au moment où l'aimant est suivant $\overrightarrow{u_x}$, c'est-à-dire pour $\theta = 0$. En déduire le lien entre θ et ω_0.

Q3. L'aimant, de moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\overrightarrow{n}$, peut être assimilé à une spire fictive de vecteur surface $\overrightarrow{S} = S\overrightarrow{n}$.

Établir le flux du champ magnétique du solénoïde à travers la spire fictive. En déduire le coefficient de mutuelle induction M entre le solénoïde et la spire fictive.

En déduire le flux du champ magnétique de l'aimant dans le solénoïde puis la f.é.m. induite dans le solénoïde lors de la rotation de l'aimant.

Q4. Écrire l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'intensité $i_\Sigma(t)$ du courant dans le solénoïde. On posera $\tau = \frac{L}{R}$. Établir l'expression de $i_\Sigma(t)$ en régime sinusoïdal établi sous la forme :

$i_\Sigma(t) = \frac{\mu_0 n \mathcal{M} \omega_0}{R\sqrt{1+\alpha^2}} \sin\left(\omega_0 t - \arctan(\alpha)\right)$, où α est un terme à exprimer en fonction de τ et ω_0.

Q5. Calculer le couple exercé sur l'aimant. En déduire une équation sur la vitesse angulaire de l'aimant, puis l'expression du couple moyen $\left\langle \overrightarrow{\Gamma_{op}} \right\rangle$ que doit exercer l'opérateur pour maintenir constante la vitesse angulaire de l'aimant. On utilisera : $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Q6. Mener un bilan énergétique commenté.

Q7. L'opérateur cesse son action à $t = 0$: $\overrightarrow{\Gamma_{op}}(t \geq 0) = \overrightarrow{0}$. Expliquer sans calcul ce qui se passe.

III Résolution de problème

Exercice n°7 Autoroute A43

L'autoroute A43 longe les bâtiments de l'usine de production d'aluminium de Saint-Jean-De-Maurienne. Un panneau suggère aux porteurs de stimulateurs cardiaques de modérer leur vitesse en longeant l'usine.
Proposer une explication de ce principe de précaution, sachant que les cuves d'électrolyse utilisées dans l'usine sont alimentées par des courants de grande intensité pouvant atteindre quelques centaines de kA.