Thème I. Ondes et signaux (Induction)

TD n°21 Champ magnétique — *Corrigé*

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5	6
Exploiter une représentation graphique d'un champ vectoriel, identifier les zones de champ uniforme, de champ faible et l'emplacement des sources.	✎					
Tracer l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, une spire circulaire et une bobine longue		✎				✎
Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi uniforme.		✎				✎
Exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources pour prévoir des propriétés du champ créé.			✎			
Évaluer l'ordre de grandeur d'un champ magnétique à partir d'expressions fournies.		✎				✎
Définir le moment magnétique associé à une boucle de courant plane.				✎		
Associer à un aimant un moment magnétique, par analogie avec une boucle de courant.					✎	

Parcours possibles

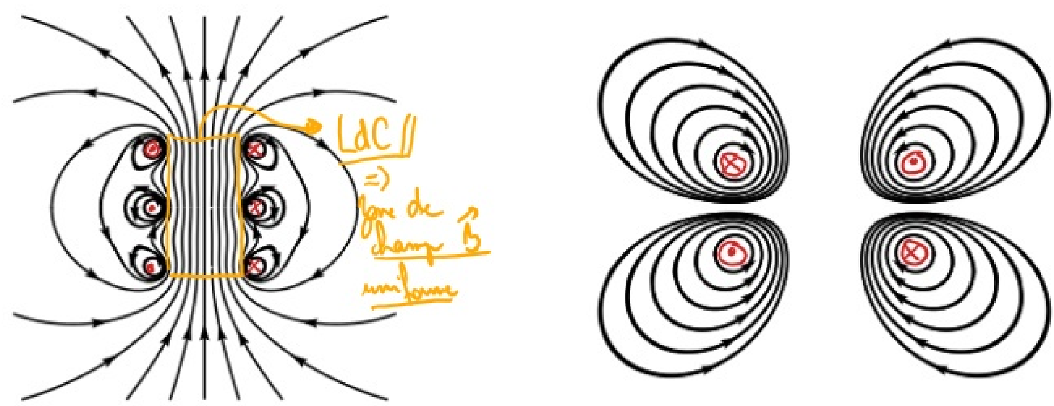
- Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : n°1, n°2, n°3 (Q1 et Q2), n°4.
- Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : n°3, n°4.
- Si vous êtes à l'aise : n°3, n°4, n°5 et n°6.

I Exercices d'applications directes du cours

Exercice n°1 Cartes de champ

Dans les cartes de champ magnétique suivantes, où le champ est-il le plus intense ? Où sont placées les sources ? Le courant (d'intensité positive) sort-il ou rentre-t-il du plan de la figure ? Où sont les zones de champ uniforme ?

Solution:



Exercice n°2 Champ créé par une bobine longue

On considère une bobine de longueur $L = 60$ cm, de rayon $R = 4$ cm, parcourue par un courant d'intensité $I = 0,60$ A. La norme du champ magnétique créé par une bobine longue est $B = \mu_0 n I$, où $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H · m^{-1} est la perméabilité absolue du vide, et n est le nombre de spires par unité de longueur.

R1. Déterminer le nombre de spires nécessaires pour obtenir un champ magnétique de $0,10.10^{-2}$ T.

Solution: Le champ magnétique créé par une bobine longue s'écrit $B = \mu_0 n I$, où n est le nombre de spires par unité de longueur, soit $n = \dfrac{N}{L}$.

Ainsi : $\boxed{N = \dfrac{BL}{\mu_0 I} = 8,0.10^2}$

R2. La bobine est réalisée en enroulant un fil de $1,5$ mm de diamètre autour d'un cylindre en carton. Combien de couches faut-il bobiner pour obtenir le champ précédent ?

Solution: On doit réaliser 800 spires avec un fil de $d = 1,5$ mm de diamètre sur une longueur $L = 60$ cm.

Sur une longueur de L on peut placer : $N_{1\text{ couche}} = \dfrac{L}{d} = 400$ spires.

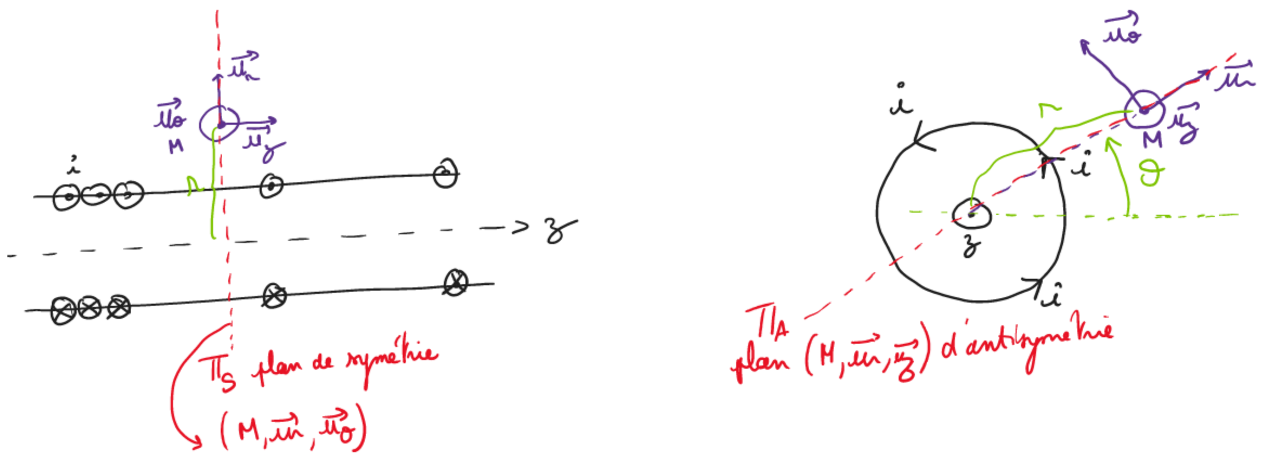
Il faut donc 2 couches pour réaliser les 800 spires.

Exercice n°3 Symétries et invariances *(Fondamental ! !)*

Dans chacune des situations suivantes, on vous demande de déterminer la forme générale du champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ en un point M quelconque de l'espace (ce point peut se trouver partout). Pour cela, on suivra scrupuleusement la méthode vue en cours.

R1. Un bobine longue infinie.

Solution:



1. On utilise les coordonnées cylindriques.
2. $\overrightarrow{B}(M) = B_r(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r} + B_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{u_\theta} + B_z(r,\theta,z)\overrightarrow{u_z}$
3. a) Le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z})$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique appartient à ce plan, donc la composante selon $\overrightarrow{u_\theta}$ est nulle : $\overrightarrow{B}(M) = B_r(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r} + \cancel{B_\theta(r,\theta,z)}\overrightarrow{u_\theta} + B_z(r,\theta,z)\overrightarrow{u_z}$

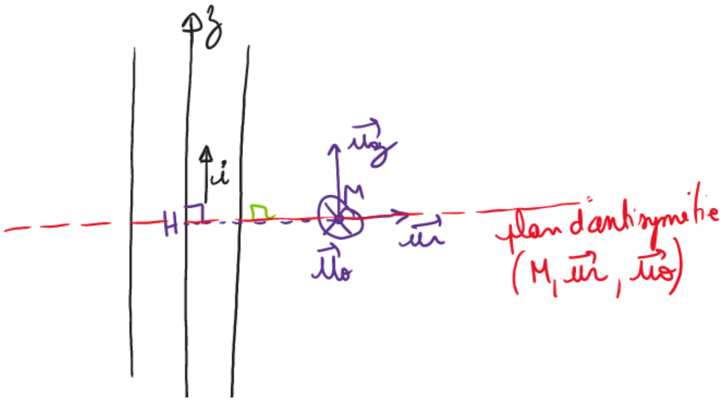
   b) Le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan, donc les composantes selon $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ sont nulles : $\overrightarrow{B}(M) = \cancel{B_r(r,\theta,z)}\overrightarrow{u_r} + B_z(r,\theta,z)\overrightarrow{u_z}$

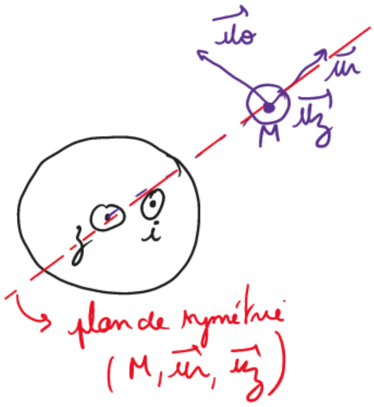
   c) Le champ magnétique est porté uniquement par $\overrightarrow{u_z}$: $\overrightarrow{B}(M) = B_z(r,\theta,z)\overrightarrow{u_z}$
4. a) La distribution de courant est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz), donc B_z ne dépend pas de θ : $\overrightarrow{B}(M) = B_z(r,\cancel{\theta},z)\overrightarrow{u_z}$

   b) La bobine est infinie, la distribution de courant est invariante par toute translation le long de l'axe (Oz), donc B_z ne dépend pas de z : $\overrightarrow{B}(M) = B_z(r,\cancel{z})\overrightarrow{u_z}$
5. Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{B}(M) = B_z(r)\overrightarrow{u_z}}$

R2. Un câble cylindrique rectiligne de rayon R parcouru uniformément en volume par des courants colinéaires à l'axe du câble.

Solution:

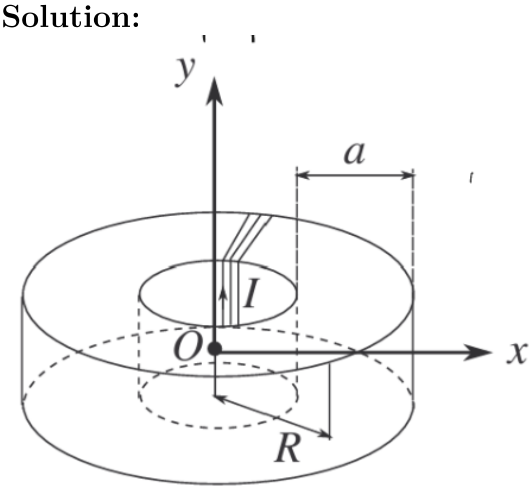


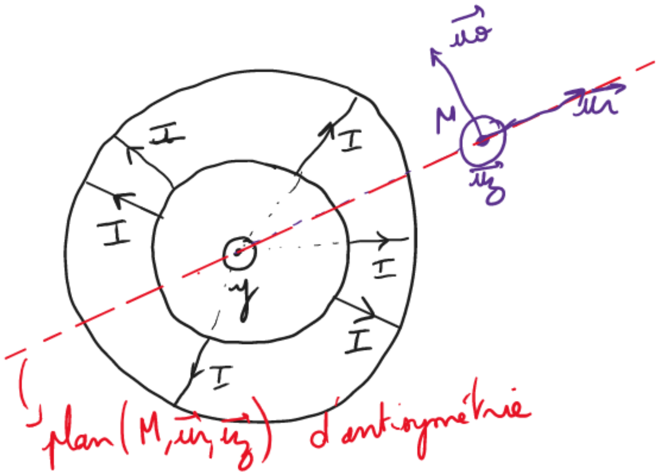


1. On utilise les coordonnées cylindriques.
2. $\overrightarrow{B}(M) = B_r(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r} + B_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{u_\theta} + B_z(r,\theta,z)\overrightarrow{u_z}$
3. a) Le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique appartient à ce plan, donc la composante selon $\overrightarrow{u_z}$ est nulle : $\overrightarrow{B}(M) = B_r(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r} + B_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{u_\theta} + \cancel{B_z(r,\theta,z)\overrightarrow{u_z}}$
   b) Le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z})$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan, donc les composantes selon $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_z}$ sont nulles : $\overrightarrow{B}(M) = \cancel{B_r(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r}} + B_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{u_\theta}$
   c) Le champ magnétique est porté uniquement par $\overrightarrow{u_\theta}$: $\overrightarrow{B}(M) = B_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{u_\theta}$
4. a) La distribution de courant est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz), donc B_θ ne dépend pas de θ : $\overrightarrow{B}(M) = B_\theta(r,\cancel{\theta},z)\overrightarrow{u_\theta}$
   b) Le câble est infini, la distribution de courant est invariante par toute translation le long de l'axe (Oz), donc B_z ne dépend pas de z : $\overrightarrow{B}(M) = B_\theta(r,\cancel{z})\overrightarrow{u_\theta}$
5. Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{B}(M) = B_\theta(r)\overrightarrow{u_\theta}}$

R3. Une bobine torique (cf ci-contre).

Solution:





1. On utilise les coordonnées cylindriques.
2. $\overrightarrow{B}(M) = B_r(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r} + B_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{u_\theta} + B_z(r,\theta,z)\overrightarrow{u_z}$

3. a) Le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z})$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan, donc les composantes selon $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_z}$ sont nulles : $\overrightarrow{B}(M) = \cancel{B_r(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r}} + B_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{u_\theta} + \cancel{B_z(r,\theta,z)\overrightarrow{u_z}}$

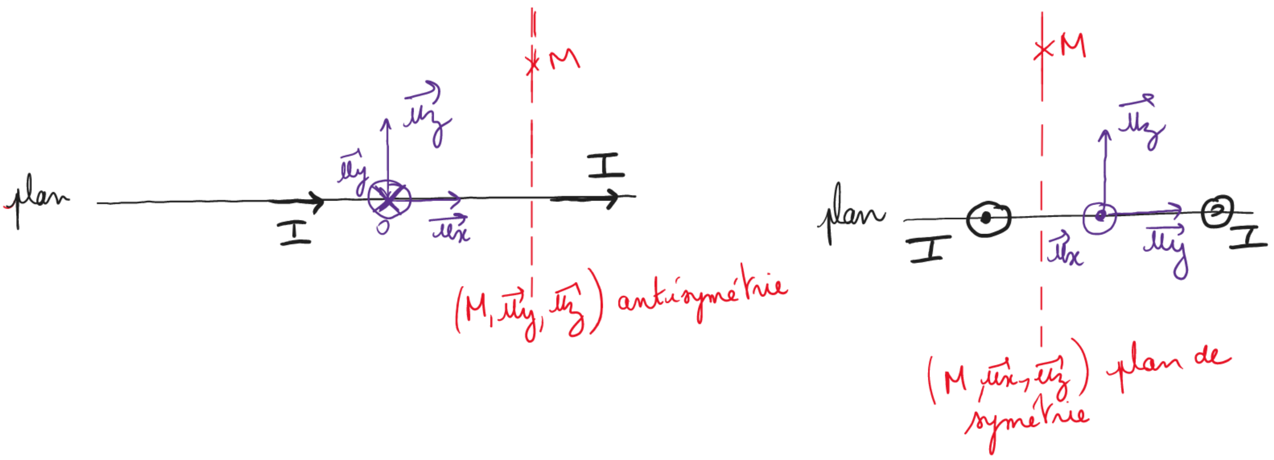
   b) Le champ magnétique est porté uniquement par $\overrightarrow{u_\theta}$: $\overrightarrow{B}(M) = B_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{u_\theta}$

4. a) La distribution de courant est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz), donc B_θ ne dépend pas de θ : $\overrightarrow{B}(M) = B_\theta(r,\cancel{\theta},z)\overrightarrow{u_\theta}$

5. Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{B}(M) = B_\theta(r,z)\overrightarrow{u_\theta}}$

R4. Un plan infini (Oxy) parcouru par des courants de surfaces uniformes, portés par $+\overrightarrow{u_x}$. Comment sont les champs magnétiques en deux points symétriques par rapport au plan (Oxy) ?

Solution:



1. On utilise les coordonnées cartésiennes.
2. $\overrightarrow{B}(M) = B_x(x,y,z)\overrightarrow{u_x} + B_y(x,y,z)\overrightarrow{u_y} + B_z(x,y,z)\overrightarrow{u_z}$
3. a) Le plan $(M, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique appartient à ce plan, donc la composante selon $\overrightarrow{u_x}$ est nulle : $\overrightarrow{B}(M) = \cancel{B_x(x,y,z)\overrightarrow{u_x}} + B_y(x,y,z)\overrightarrow{u_y} + B_z(x,y,z)\overrightarrow{u_z}$

   b) Le plan $(M, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan, donc les composantes selon $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_z}$ sont nulles : $\overrightarrow{B}(M) = B_y(x,y,z)\overrightarrow{u_y} + \cancel{B_y(x,y,z)\overrightarrow{u_y}}$

   c) Le champ magnétique est porté uniquement par $\overrightarrow{u_y}$: $\overrightarrow{B}(M) = B_y(x,y,z)\overrightarrow{u_y}$

4. a) La distribution de courant est invariante par toute translation le long de l'axe (Ox), donc B_y ne dépend pas de x : $\overrightarrow{B}(M) = B_y(\cancel{x},y,z)\overrightarrow{u_y}$

   b) La distribution de courant est invariante par toute translation le long de l'axe (Oy), donc B_y ne dépend pas de y : $\overrightarrow{B}(M) = B_y(\cancel{x},\cancel{y},z)\overrightarrow{u_y}$

5. Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{B}(M) = B_y(z)\overrightarrow{u_y}}$

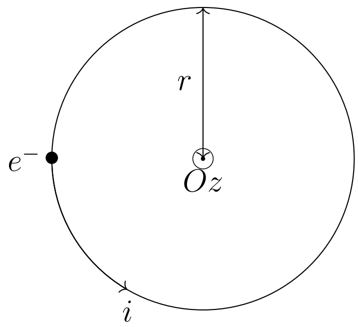
II Exercices d'approfondissement

Exercice n°4 Moment magnétique atomique *(Grand classique !)*

On considère, dans une représentation de mécanique classique, qu'un électron de valence décrit une orbite circulaire centrée sur le noyau atomique. L'orbite est dans le plan $z = 0$ et le noyau est à l'origine O du repère. L'électron a une masse m_e et une charge électrique $q_e = -e$, l'orbite a pour rayon r et la période de révolution vaut T. On choisira l'axe (Oz) perpendiculaire au plan du mouvement, et dans le sens direct par rapport au sens du mouvement de l'électron.

R1. En considérant que l'électron définit une boucle de courant circulaire (une spire), déterminer l'intensité i correspondante en fonction de e et T. L'intensité i est choisie dans le sens du mouvement de l'électron.

Solution:
On choisit le sens de l'axe (Oz) de sorte que l'électron décrit le cercle dans le sens direct par rapport à l'axe (Oz).
L'électron, de charge $-e$, effectue un tour en une durée T, ainsi, l'intensité du courant, orienté dans le sens direct également, qui est la charge traversant une section par unité de temps : $\boxed{i = -\frac{e}{T} < 0}$, car le courant a été orienté dans le sens du déplacement des charges négatives.



R2. En déduire le moment magnétique en fonction de e, T et r.

Solution:
Le moment dipolaire est défini par : $\overrightarrow{m} = iS\overrightarrow{u_z}$, avec $S = \pi r^2$, ainsi $\boxed{\overrightarrow{m} = -\frac{e}{T}\pi r^2 \overrightarrow{u_z}}$

R3. Exprimer le moment cinétique L_{Oz} de l'électron associé à son mouvement orbital autour du noyau par rapport à l'axe de rotation, en fonction de m_e, r et T.

Solution: L'électron décrit un mouvement circulaire de rayon, en utilisant les coordonnées polaires : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$
Ainsi

$$\begin{aligned} L_{Oz}(M) &= \left(\overrightarrow{OM} \wedge m_e \overrightarrow{v}(M)\right) \cdot \overrightarrow{u_z} \\ &= \left(r\overrightarrow{u_r} \wedge m_e r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right) \cdot \overrightarrow{u_z} \\ &= m_e r^2 \dot{\theta} \end{aligned}$$

Avec, $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$, on obtient : $\boxed{L_{Oz} = m_e r^2 \times \frac{2\pi}{T}}$

R4. Exprimer le rapport gyromagnétique γ qui est, par définition, le quotient du moment magnétique sur le moment cinétique par rapport à l'axe Oz. Faire l'application numérique.

Solution: Rapport gyromagnétique :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{u_z}}{L_{Oz}} \\ &= \frac{\frac{-e\pi r^2}{T}}{\frac{m_e r^2 \times 2\pi}{T}} \\ &= -\frac{e}{2m_e} \end{aligned}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{-e}{2m_e} = -8,793.10^{10}\ \mathrm{C \cdot kg^{-1}}}$$

R5. On admet que le moment cinétique orbital L_{Oz} ne peut prendre pour valeur que des multiples entiers de la constante de Planck réduite $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05.10^{-34}$ J · s. Quelles sont les valeurs prises par le moment magnétique correspondant en considérant que le facteur gyromagnétique conserve la même expression ?

Solution: $L_{Oz} = n\hbar$, or $L_{Oz} = \dfrac{m}{\gamma}$, donc $\dfrac{m}{\gamma} = n\hbar$, donc $\boxed{m = n\hbar\gamma}$

Le moment magnétique de l'électron peut prendre les valeurs multiples de $\boxed{\hbar\gamma = 9,28.10^{-24}\ \mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2}$

Exercice n°5 Aimantation

On trouve sur un site commercial les ordres de grandeur suivants pour des aimantations d'aimants permanents. L'« aimantation » correspond à un moment magnétique par unité de volume.

AlNiCo 200	600 kA $\cdot$ m^{-1}
Ferrite 1000	1700 kA $\cdot$ m^{-1}
NdFeB	2000 kA $\cdot$ m^{-1} à 4000 kA $\cdot$ m^{-1}
$SlCo_5$	2000 kA $\cdot$ m^{-1} à 3000 kA $\cdot$ m^{-1}
$SmCo_{17}$	3500 kA $\cdot$ m^{-1} à 5000 kA $\cdot$ m^{-1}

R1. Rappeler la dimension d'un moment magnétique et vérifier si les unités proposées dans le tableau sont cohérentes avec la définition donnée de la grandeur aimantation.

Solution: Un moment magnétique est homogène à une intensité multipliée par une surface. L'aimantation est un moment magnétique par unité de volume, et est donc une intensité par unité de longueur, l'unité SI est donc l'ampère par mètre A $\cdot$ m^{-1}. Les unités proposées dans le tableau sont cohérentes.

Considérons un aimant en forme de disque d'épaisseur $e = 1,0$ mm et de rayon $R = 5,0$ mm.

R2. Calculer l'ordre de grandeur du moment magnétique d'un tel aimant en NdFeB (Néodyme-Fer-Bore).

Solution: Aimant Néodyme-Fer-Bore en forme de disque
Le moment magnétique est égale à l'aimantation multipliée par le volume de l'aimant :
$\boxed{\mathscr{M} = \mathscr{A} \times \mathscr{V} = \mathscr{A} \times \pi R^2 \times e}$, ainsi $\mathscr{M} = 3000.10^3\ \mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^{-1} \times \pi \times (5.10^{-2})^2 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3 = 0,2\ \mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$

R3. Combien de spires de rayon R parcourues par une intensité 0,1 A faudrait-il bobiner pour obtenir le même moment magnétique ?

Solution: Le moment magnétique de N spires circulaires de rayon R parcourues par un courant i est donné par $\mathscr{M} = N \times i \times \pi R^2$. Ainsi il faut $\boxed{N = \dfrac{\mathscr{M}}{i\pi R^2} = \dfrac{0,2}{0,1 \times \pi \times \pi(5.10^{-2})^2} = 25000}$! !

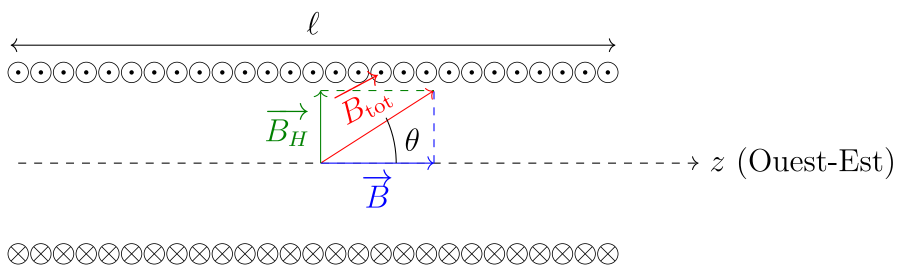
Les aimants NdFeB sont des aimants très puissants qui créent un champ magnétique élevé, il est en général très difficile de décoller deux aimants NdFeB.

Exercice n°6 Mesure du champ magnétique terrestre

On dispose d'un solénoïde comportant $n = 100$ spires/mètre, parcouru par un courant d'intensité $I = 100$ mA, qui crée le champ $B = \mu_0 n I$. On le place sur un support horizontal et on oriente son axe dans la direction Est-Ouest. On introduit à l'intérieur une aiguille aimantée mobile en rotation autour d'un axe vertical. Cette aiguille s'oriente parallèlement à la composante horizontale du champ existant à l'endroit où elle se trouve.

R1. Calculer l'intensité du champ magnétique créé par le solénoïde.

Solution:



Vecteur champ magnétique : $\boxed{\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u_z}}$ de norme $\boxed{B = \mu_0 n I = 4\pi.10^{-6}\ \mathrm{T}}$

R2. Sachant que l'aiguille aimantée fait un angle $\theta = 58°$ avec l'axe du solénoïde, déterminer la valeur de la composante horizontale $\overrightarrow{B_H}$ du champ magnétique terrestre.

Solution: La composante horizontale du champ magnétique terrestre est dirigé vers le nord, et est donc orthogonale au champ magnétique $\vec{B}$ créé par la bobine.

$\tan(\theta) = \dfrac{B_H}{B}$, donc $\boxed{B_H = B\tan(\theta) = 2,0.10^{-5}\ \mathrm{T}}$