Thème I. Ondes et signaux (Induction)

TD n°22 Actions d'un champ magnétique – *Corrigé*

I Exercices d'applications directes du cours

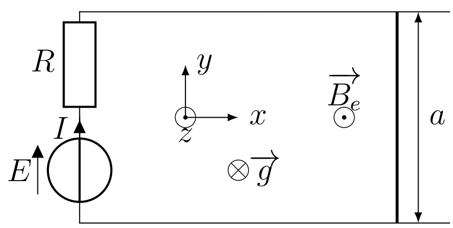
Exercice n°1 Rail de Laplace

Une tige conductrice de masse $m = 5,0$ g et de longueur $a = 5,0$ cm est posée sur des rails de Laplace alimentés par un générateur de tension continue de f.e.m. $E > 0$. La résistance électrique totale du circuit est $R = 4,0\ \Omega$.

Un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B_e} = B_e\overrightarrow{u_z}$ est appliqué, avec $B_e = 50$ mT.

À cause des frottements sur les rails, la barre ne pourra glisser que si elle subit une force dont la norme est supérieure à $f_s mg$, où $f_s = 0,15$ est le coefficient statique de frottement solide entre la barre et les rails.

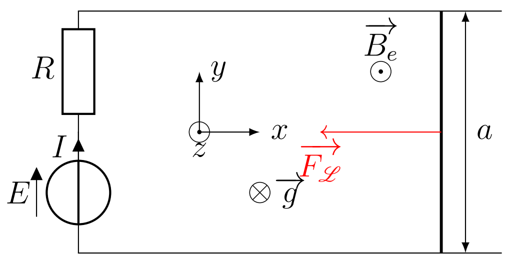
L'accélération de la pesanteur est $g = 9,8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.



R1. Déterminer la force de Laplace exercée sur la barre. Dans quel sens la barre est-elle susceptible de glisser ?

Solution:
Système : Tige
Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques :

- poids
- réaction normale
- réaction tangentielle (frottement solide)
- force de Laplace



Expression de la force de Laplace s'exerçant sur la tige :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_\mathscr{L}} &= \int_a^0 I\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \overrightarrow{B_e} \\
&= \int_a^0 I\mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} \wedge B_e\overrightarrow{u_z} \\
&= IB_e\int_a^0 \overrightarrow{u_x}\mathrm{d}y \\
&= IB_e(-a)\overrightarrow{u_x}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\overrightarrow{F_\mathscr{L}} = -IaB_e\vec{u_x}}$

La barre est susceptible de se déplacer vers la gauche si $I > 0$.

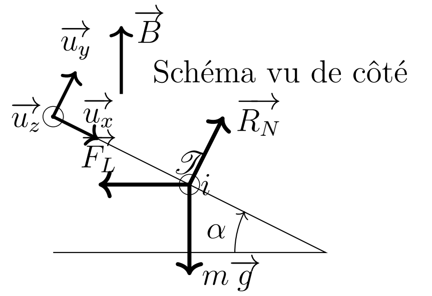
R2. Quelle est la valeur minimale de E pour laquelle la barre se met en mouvement ?

Solution: La barre ne se met en mouvement que si la force de Laplace (qui est la seule à s'exercer horizontalement) est en norme supérieure à $f_s mg$.

Il faut donc $IaB_e > f_s mg$, or avec la loi des mailles $U = RI$, donc $\boxed{U > \dfrac{f_s mg}{RaB_e} = 0,735\ \mathrm{V}}$

Lors de la mise en mouvement de la tige on peut négliger le phénomène d'induction car il n'y a pas encore de mouvement. Le courant étant de plus continu, il n'y a pas d'autoinduction.

Exercice n°2 Rails de Laplace en pente



On considère des rails de Laplace inclinés par rapport au plan horizontal d'un angle α. Une tige posée sur les deux rails perpendiculairement aux rails se translate sans frottement.
Le champ magnétique est constant et uniforme, vertical, dirigé vers le haut.
Données : $B = 150$ mT, $m = 8,0$ g, $\ell = 12$ cm (masse et longueur de la tige mobile), $\alpha = 30°$; $g = 9,8$ m $\cdot$ s^{-2}.

R1. Effectuer le bilan des actions mécaniques qui s'exercent sur la tige. Exprimer la force de Laplace dans la base cartésienne.

Solution:
Système : Tige
Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\overrightarrow{g} = mg\Big(\sin(\alpha)\overrightarrow{u_x} - \cos(\alpha)\overrightarrow{u_y}\Big)$
- réaction normale du support
- force de Laplace

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_L} &= \int_{\text{tige, dans le sens du courant}} i\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B} \\
&= \int_0^{\ell} i\mathrm{d}z\overrightarrow{u_z} \wedge B(\cos(\alpha)\overrightarrow{u_y} - \sin(\alpha)\overrightarrow{u_x}) \\
&= iB\int_0^{\ell}\Big(-\cos(\alpha)\overrightarrow{u_x} - \sin(\alpha)\overrightarrow{u_y}\Big)\mathrm{d}z \\
&= -iB\ell\Big(\cos(\alpha)\overrightarrow{u_x} + \sin(\alpha)\overrightarrow{u_y}\Big)
\end{aligned}$$

R2. Quel doit être le signe de i pour que la tige puisse monter ?

Solution: La tige monte à condition que la composante de la force de Laplace $\overrightarrow{u_x}$ soit négative. Or $B\ell\cos(\alpha) > 0$, donc pour cela il faut que l'intensité du courant soit positive.

R3. Exprimer puis calculer la valeur de i pour que la tige monte à vitesse constante s'il a une vitesse initiale ou soit à l'équilibre s'il n'a pas de vitesse initiale.

Solution: D'après le principe d'inertie, le système persévère dans un mouvement de translation rectiligne uniforme ssi la résultante des forces est nulle : $\overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{F_L} + m\overrightarrow{g} = \overrightarrow{0}$

On projette selon $\overrightarrow{u_x}$: $0 - i\ell B\cos(\alpha) + mg\sin(\alpha) = 0$, soit $\boxed{i = \dfrac{mg\tan(\alpha)}{\ell B} = 2,51 \text{ A}}$

R4. Calculer la puissance des forces de Laplace sur la tige s'il met 0, 5 s pour augmenter son altitude de 10 cm.

Solution: Puissance des forces de Laplace vaut : $\mathscr{P} = \overrightarrow{F_L} \cdot \overrightarrow{v} = -i\ell B\cos(\alpha)\dot{x}$
Le barreau se déplace à vitesse constante, et met $\tau = 0,5$ s pour augmenter son altitude de $h = 10$ cm.
Avec un tout petit peu de trigo : on a $\sin(\alpha) = \dfrac{h}{\dot{x} \times \tau}$, soit $|\dot{x}| = \dfrac{h}{\tau\sin(\alpha)}$, avec $\dot{x} < 0$

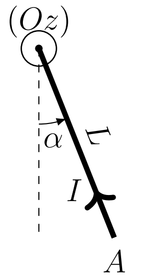
Ainsi $\boxed{\mathscr{P} = i\ell B\cos(\alpha) \times \dfrac{h}{\tau\sin(\alpha)} = \dfrac{i\ell Bh}{\tau\tan(\alpha)} = \dfrac{mgh}{\Delta t}}$

A.N. : $\underline{\mathscr{P} = 1,57.10^{-2}\ \mathrm{W}}$

II Exercices d'approfondissement

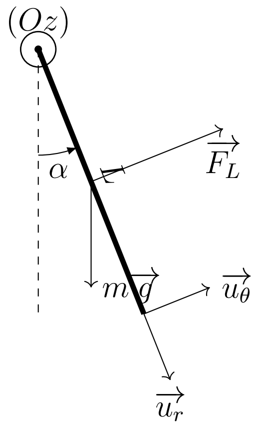
Exercice n°3 Équilibre d'une tige

Une tige conductrice OA, homogène, de masse m et de longueur L, est mobile en rotation autour d'un axe horizontal (Oz), passant par son extrémité O.
Un dispositif non représenté sur la figure permet de faire circuler un courant continu d'intensité I dans la tige qui est de plus soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$.
On négligera les frottements.



R1. Effectuer un bilan des actions mécaniques s'exerçant sur la tige. Exprimer leur moment par rapport à l'axe (Oz).

Solution:



Système : tige
Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques :

— poids

— action de la liaison pivot, considéré comme parfaite

— force de Laplace : $\overrightarrow{F_L}$

R2. Déterminer l'expression de l'angle $\alpha_{\text{éq}}$ d'équilibre de la tige en fonction de m, g, L, I et B.
Vérifier la cohérence physique.

Solution:
⚠ il faut raisonner sur les moments et non sur les forces, en effet on ignore la direction, le sens, la norme de l'action de la liaison pivot qui est de moment nul (mais pas de résultante nulle).
À l'équilibre la somme des moments des actions mécaniques extérieur est nulle.
Le moment de l'action de la liaison pivot est nul.
$\mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) = -mg\dfrac{L}{2}\sin(\alpha)$ (avec le bras de levier : la plus petite distance entre la droite d'action de la force et l'axe de rotation).
La force élémentaire de Laplace est homogène sur la tige (cf cours), car I et B_e sont identiques en tous points, on peut donc voir la force résultante de Laplace comme une unique force qui s'exerce au centre de gravité du système :
avec le bras de levier : $\mathscr{M}_{Oz}(\overrightarrow{F_{\mathscr{L}}}) = +F_{\mathscr{L}} \times \dfrac{L}{2} > 0$
Avec

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_{\mathscr{L}}} &= \int_A^O I\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B} \\
&= \int_L^0 I\mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} \wedge B\overrightarrow{u_z} \\
&= -IB\int_L^0 \mathrm{d}r\overrightarrow{u_\theta} \\
&= IBL\overrightarrow{u_\theta}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{M}_{Oz}(\overrightarrow{F_{\mathscr{L}}}) = \dfrac{IBL^2}{2}$

Ainsi à l'équilibre : $-mg\dfrac{L}{2}\sin(\alpha) + ILB \times \dfrac{L}{2} = 0$, soit $\boxed{\sin(\alpha) = \dfrac{ILB_e}{mg}}$

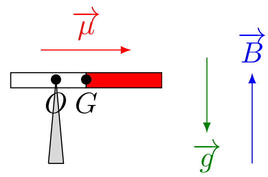
On vérifie que si $I = 0$ ou $B = 0$, on trouve $\alpha = 0$ (la position d'équilibre est dans ce cas la position verticale).
Si I ou B augmente alors α augmente, mais si m augmente, α diminue : physiquement cohérent.

R3. Que se passe-t-il si on change le sens du courant ? le sens du champ magnétique ?

Solution: si on change le sens du courant, l'action de Laplace change de sens, et $\alpha < 0$: la position d'équilibre est symétrique par rapport à l'axe vertical. De même si on change le sens du champ magnétique.

Exercice n°4 Équilibre d'un aimant

Un aimant très fin, de moment magnétique μ et de masse m, repose en équilibre au sommet O d'une pointe. Il est soumis à un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ et à la gravité.

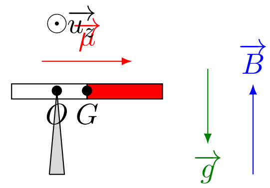


R1. Exprimer les moments des actions mécaniques s'exerçant sur l'aimant.

R2. Évaluer la distance $d = OG$ pour que l'aimant reste en équilibre.

Solution: L'aimant est soumis à :

- son poids qui s'exerce en G et de moment par rapport à O :
  $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(m\overrightarrow{g}) = \overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{g} = -mgd\overrightarrow{u_x}$
- à l'action du champ magnétique de moment $\overrightarrow{\mu} \wedge \overrightarrow{B} = \mu B\overrightarrow{u_z}$
- au moment de l'action mécanique de contact en O, dont le moment est nul par rapport à O

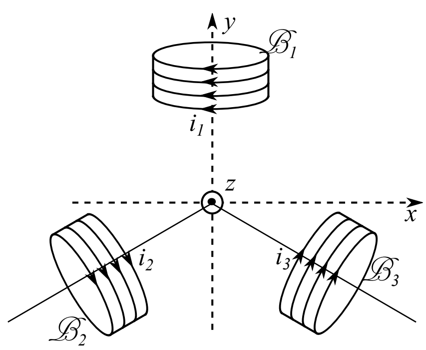


L'équilibre est réalisé si la somme des moments est nul, donc pour $\mu B = mdg$, soit $\boxed{d = \dfrac{\mu B}{mg}}$

Exercice n°5 Alimentation d'un moteur synchrone en triphasé

Les moteurs synchrones de puissance exploitent souvent trois bobines (et non deux comme présenté dans le cours), alimentées par des intensités déphasées de $\dfrac{2\pi}{3}$ que l'on peut écrire sous la forme :

$$i_1(t) = i_0\cos(\omega t) \quad i_2(t) = i_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad i_3(t) = i_0\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$



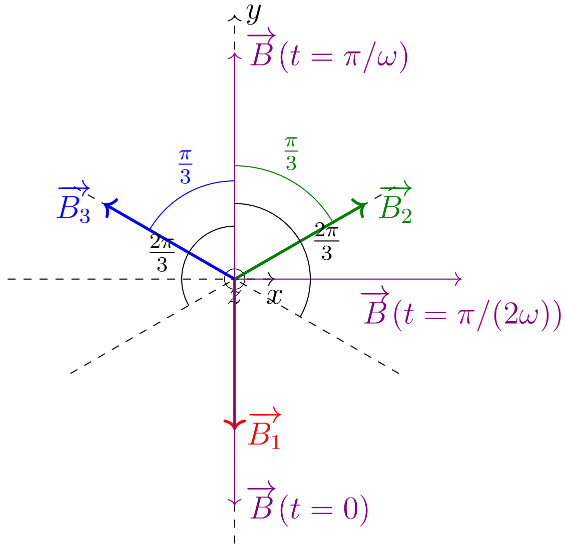
Chaque bobine est contenue dans un plan vertical, et l'angle entre les axes de deux bobines consécutives vaut $\dfrac{2\pi}{3}$.

Le champ magnétique créé par la bobine j s'écrit $\overrightarrow{B_j} = \pm Ki_j\overrightarrow{u_j}$, avec $\overrightarrow{u_j}$ est le vecteur unitaire de l'axe de la bobine. Le signe sera choisi par règle de la main droite. La constante K est identique pour les trois bobines.

R1. Montrer que le champ magnétique résultant au centre s'écrit : $\overrightarrow{B} = \dfrac{3}{2}Ki_0\Big(\sin(\omega t)\overrightarrow{u_x} - \cos(\omega t)\overrightarrow{u_y}\Big)$. Commenter.
On rappelle que $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$.
On utilisera les valeurs particulières de cos et sin en $\pi/3$, $2\pi/3$, $4\pi/3$...

Solution: Champ magnétique résultant : $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2} + \overrightarrow{B_3}$
Le sens des champs magnétiques se déterminent à l'aide de la règle de la main droite en lien avec le sens indiqué des courants.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{B_1} &= -Ki_0\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}\\
\overrightarrow{B_2} &= Ki_0\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\overrightarrow{u_y}+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\overrightarrow{u_x}\right)\\
\overrightarrow{B_2} &= \frac{1}{2}\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)\left(\overrightarrow{u_y}+\sqrt{3}\overrightarrow{u_x}\right)\\
\overrightarrow{B_3} &= Ki_0\cos\left(\omega t-\frac{4\pi}{3}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\overrightarrow{u_y}-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\overrightarrow{u_x}\right)\\
\overrightarrow{B_3} &= \frac{1}{2}\cos\left(\omega t-\frac{4\pi}{3}\right)\left(\overrightarrow{u_y}-\sqrt{3}\overrightarrow{u_x}\right)
\end{aligned}$$



Ainsi :

$$\begin{aligned}
B_x &= \frac{\sqrt{3}}{2}Ki_0\left[\cos\left(\omega t-\underbrace{\frac{2\pi}{3}}_{=\pi-\frac{\pi}{3}}\right)-\cos\left(\omega t-\underbrace{\frac{4\pi}{3}}_{=\pi+\frac{\pi}{3}}\right)\right]\\
B_x &= \frac{\sqrt{3}}{2}Ki_0\left[-\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)\right]\\
B_x &= \frac{\sqrt{3}}{2}Ki_0\times 2\sin(\omega t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
B_x &= \sqrt{3}Ki_0\sin(\omega t)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\
B_x &= \frac{3}{2}Ki_0\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
B_y &= -Ki_0\cos(\omega t)+\frac{1}{2}Ki_0\left[\cos\left(\omega t-\underbrace{\frac{2\pi}{3}}_{=\pi-\frac{\pi}{3}}\right)+\cos\left(\omega t-\underbrace{\frac{4\pi}{3}}_{=\pi+\frac{\pi}{3}}\right)\right]\\
B_y &= -Ki_0\cos(\omega t)+\frac{1}{2}Ki_0\left[-\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)\right]\\
B_y &= -Ki_0\cos(\omega t)+\frac{1}{2}Ki_0\times(-2)\cos(\omega t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
B_y &= -Ki_0\cos(\omega t)-Ki_0\cos(\omega t)\times\frac{1}{2}\\
B_y &= -\frac{3}{2}Ki_0\cos(\omega t)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{B}=\frac{3}{2}\mu_0 n i_0\Big(\sin(\omega t)\overrightarrow{u_x}-\cos(\omega t)\overrightarrow{u_y}\Big)}$

Le champ résultant est un champ tournant à la vitesse angulaire ω, dans le sens direct.
En effet :

— À $t = 0$: $\overrightarrow{B}(t=0) = -\dfrac{3}{2}\mu_0 n i_0 \overrightarrow{u_y}$

— À $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$: $\overrightarrow{B}(t=0) = \dfrac{3}{2}\mu_0 n i_0 \overrightarrow{u_x}$

— À $t = \dfrac{\pi}{\omega}$: $\overrightarrow{B}(t=0) = \dfrac{3}{2}\mu_0 n i_0 \overrightarrow{u_y}$

R2. On place un dipôle magnétique au centre du dispositif. Dans quel sens peut-il être entraîné en rotation ?

Solution: Le dipôle magnétique est soumis à l'action du champ magnétique de couple $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}$ qui tend à l'aligner sur le champ magnétique. Ainsi, le dipôle magnétique va tourner dans le plan horizontal dans le sens direct autour de l'axe (Oz).

On pourra utiliser les formules de trigonométrie : $\cos(a \pm b)$ et $\cos(a+b) \pm \cos(a-b)$.

Exercice n°6 Mesure d'un champ magnétique

On considère une boussole (de moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$, de moment d'inertie J par rapport à un axe passant par son centre de gravité G). Cette boussole est posée sur une pointe située en G l'autorisant à tourner uniquement dans un plan horizontal. Elle est soumise à l'action d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme situé dans le plan horizontal.

R1. La boussole est légèrement écartée de sa position d'équilibre tout en restant dans le plan horizontal puis elle évolue librement. Exprimer la période des petites oscillations.

Solution:
On applique le théorème du moment cinétique à la boussole par rapport à l'axe (Oz) :
$\dfrac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \Gamma$, soit $J\ddot{\theta} = -\mathcal{M}B\sin(\theta)$, soit $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{\mathcal{M}B}{J}\sin(\theta) = 0}$
Au voisinage de l'équilibre stable, $\theta \ll 1$ rad, donc $\sin(\theta) \approx \theta$
On obtient l'équation différentielle : $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{\mathcal{M}B}{J}\theta = 0}$, qui est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. La boussole oscille sinusoïdalement autour de la position d'équilibre $\theta_e = 0$, à la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\mathcal{M}B}{J}}$, et de période propre $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{\mathcal{M}B}}}$

Afin de déduire la valeur de la norme de $\overrightarrow{B}$ (notée B), sans connaître ni le moment d'inertie J ni le moment magnétique $\mathcal{M}$, on ajoute un champ magnétique $\overrightarrow{B'}$ (de norme B') crée par une bobine longue. On place d'abord la bobine telle que $\overrightarrow{B'}$ et le champ $\overrightarrow{B}$ soient parallèle et de même sens et on mesure la période T_1 des petites oscillations de la boussole. On inverse ensuite le sens du courant dans la bobine et on mesure la nouvelle valeur T_2 de la période des petites oscillations.

R2. En déduire B en fonction de B', T_1 et T_2 sachant que $B < B'$.

Solution:

— Cas 1 : $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{B'}$ sont de même sens, le champ total est $\overrightarrow{B_{\text{tot}}} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{B'}$: $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{\mathcal{M}(B+B')}}$

— Cas 2 : $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{B'}$ sont de sens opposé, le champ total est $\overrightarrow{B_{\text{tot}}} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{B'}$: $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{\mathcal{M}(B'-B)}}$

En faisant le rapport des deux :

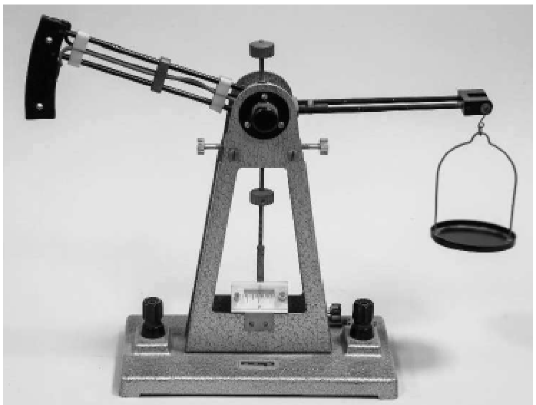
$$\begin{aligned}
\frac{T_2}{T_1} &= \frac{\sqrt{B+B'}}{\sqrt{B'-B}}\\
T_2^2(B'-B) &= T_1^2(B+B')\\
B'(T_2^2-T_1^2) &= B(T_1^2+T_2^2)\\
B &= B'\frac{T_2^2-T_1^2}{T_2^2+T_1^2}
\end{aligned}$$

La mesure des deux périodes permet donc d'accéder au champ B, connaissant le champ B' (qui est connu puisque c'est le champ créé par une bobine longue : $\mu_0 nI$) : $\boxed{B = B'\frac{T_2^2-T_1^2}{T_2^2+T_1^2}}$ (avec $T_2 > T_1$)

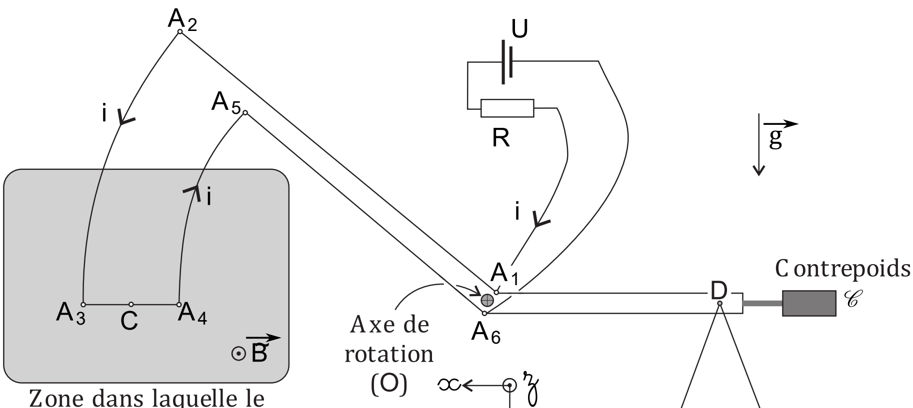
III Extrait de concours

Exercice n°7 La balance de Cotton *(D'après Mines-Pont PSI 2016)*

La photo d'un modèle de balance de Cotton est placée ci-contre. Ce type de balance, destinée à la mesure de champ magnétique, a été mis au point par Aimé Cotton en 1900. Elle est constituée de deux fléaux. L'un, à gauche, comprend sur sa périphérie, un conducteur métallique qui sera parcouru par un courant et dont une partie sera placée dans le champ magnétique, uniforme et permanent, à mesurer. Le conducteur sera soumis à des forces de Laplace et la balance penchera du côté de ce fléau. L'autre comporte un plateau sur lequel on peut déposer des masses marquées pour équilibrer la balance et déduire ainsi la norme du champ magnétique. Le schéma de principe de la balance est représenté sur la figure 1.



Sur le fléau dessiné à gauche, les conducteurs permettent le passage d'un courant d'intensité i, selon le parcours $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5 \to A_6$. Les portions de circuit A_2A_3 et A_4A_5 sont des arcs de cercle de même centre O. L'ensemble des deux fléaux constitue un système rigide, mobile sans frottement, autour d'un axe horizontal passant par le point O et noté Oz. On désigne par C le milieu du segment A_3A_4 et D le point de suspension du plateau. On note d_1 la distance OC entre les points O et C, d_2 la distance OD entre les points O et D et ℓ la longueur du segment A_3A_4.



Zone dans laquelle le champ magnétique est appliqué

La procédure de mesure est la suivante :

— Équilibrage « à vide » : en l'absence de courant i et de masses marquées dans le plateau, le contrepoids $\mathscr{C}$ est déplacé de façon à ce que la balance soit à l'équilibre, les trois points C, O et D étant alignés sur l'horizontale.

— Mesure du champ : on ferme le circuit électrique, ce qui permet au courant d'intensité i de circuler « dans la balance », le fléau de gauche penche vers le bas ; on ajoute alors des masses dans le plateau jusqu'à ce que la balance soit à l'équilibre, les trois points C, O et D étant alignés sur l'horizontale.

Lorsque l'équilibrage à vide est réalisé, le centre de masse, G, des parties mobiles de la balance est situé en O.

R1. Lorsque le courant circule « dans la balance », montrer que le moment résultant en O des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul.

Solution: La force de Laplace qui s'exerce sur un élément $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = R\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}$ est $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_l = i\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B}$ est dirigée selon $\overrightarrow{u_r}$, son moment par rapport à O est nul.

R2. À l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en O des forces de Laplace. En déduire la relation liant $B = \left\|\overrightarrow{B}\right\|$, la somme m des masses marquées posées sur le plateau, i, ℓ, d_1, d_2 et le module g du champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$.

Solution:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathscr{M}_\mathscr{L}} = \overrightarrow{OM} \wedge \left(i\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_\mathscr{L}} = \int_{d_1+\ell/2}^{d_1-\ell/2} x\overrightarrow{u_x} \wedge (i\mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_z}B)$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_\mathscr{L}} = -\overrightarrow{u_z}iB\left[\frac{x^2}{2}\right]_{d_1+\ell/2}^{d_1-\ell/2}$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_\mathscr{L}} = -\overrightarrow{u_z}\frac{iB}{2}(2d_1)(-\ell),$$

finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{M}M_\mathscr{L}} = iBd_1\ell\overrightarrow{u_z}.}$$

À l'équilibre la somme des moments est nulle, on en déduit : $iBd_1\ell = mgd_2$, soit

$$\boxed{B = \frac{mg}{i\ell}\frac{d_2}{d_1}.}$$

R3. La sensibilité de la balance étant de $\delta_m = 0,05g$, déterminer la plus petite valeur de B mesurable pour $i = 10$ A, $g = 10\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, $\ell = 5$ cm et $d_1 = d_2 = 10$ cm. En comparant cette valeur avec une ou des références connues, conclure quant à l'utilisabilité de la balance.

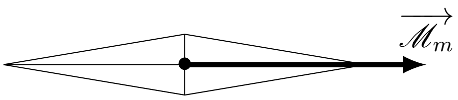
Solution: L'incertitude sur B est reliée à celle sur m par la relation :

$$\boxed{\delta B = \delta m\frac{gd_2}{i\ell d_1}}$$

Numériquement, on établit $\boxed{\delta B = 1.10^{-3}\mathrm{T},}$ cette valeur est en ordre de grandeur 10 fois plus grande que le champ magnétique terrestre, mais 1000 fois plus faible que le champ créé par un aimant permanent en fer, néodyme et cobalt.

Exercice n°8 Utilisation d'une boussole *(D'après Mines-Pont PSI 2016)*

Dans cette partie, on utilise une boussole constituée d'une aiguille aimantée mobile, présentant un axe de symétrie longitudinal. Cette aiguille peut pivoter sans frottement autour d'un axe passant par son centre de masse G et perpendiculaire à l'axe de symétrie.

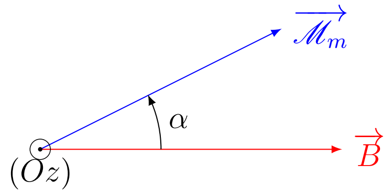


La liaison avec l'axe est du type « pivot parfait » sans frottement. Cette aiguille aimantée se comporte comme un dipôle magnétique de moment magnétique $\overrightarrow{\mathscr{M}_m}$ ayant la direction de l'axe de symétrie de celle-ci.
Cette boussole est placée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, permanent et localement uniforme (il est considéré comme uniforme tout le long de l'aiguille aimantée). Les forces magnétiques soumettent la boussole un couple

$\overrightarrow{\Gamma}$. On note J le moment d'inertie de l'aiguille aimantée par rapport à l'axe de rotation. Dans un premier temps nous allons étudier les petits mouvements de l'aiguille autour de sa position d'équilibre stable, en négligeant les frottements fluides dus à l'air. Le champ magnétique et l'axe de symétrie de l'aiguille sont dans un plan horizontal. On appelle α l'angle entre la direction de $\overrightarrow{B}$ et celle de $\overrightarrow{\mathscr{M}_m}$.

R1. Après avoir exprimé le couple des forces magnétiques s'exerçant sur l'aiguille en fonction des paramètres du problème que sont $B = \left\|\overrightarrow{B}\right\|$, $\mathscr{M}_m = \left\|\overrightarrow{\mathscr{M}_m}\right\|$ et α, établir l'équation différentielle dont α est solution. En déduire les positions d'équilibres de l'aiguille, et indiquer sans calcul l'équilibre stable. En supposant $\alpha \ll 1$, donner l'expression de $\alpha(t)$ en notant α_0 la valeur maximale de cet angle, en faisant apparaître le rapport $\kappa = \dfrac{\mathscr{M}_m}{J}$ et en supposant que $\left.\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Solution:
Système : boussole
Référentiel : terrestre supposé galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des forces :



— poids
— liaison pivot supposé parfaite
— action du champ magnétique , de moment résultant : $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mathscr{M}_m} \wedge \overrightarrow{B} = -\mathscr{M}_m B \sin(\alpha)\overrightarrow{e_z}$

TMC par rapport à (Oz) : $\dfrac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\mathscr{M}_{Oz}(\text{poids})}_{=0} + \underbrace{\mathscr{M}_{Oz}(\text{liaison pivot})}_{=0} + \Gamma$

D'où $\boxed{J\ddot{\alpha} = -\mathscr{M}_m B \sin(\alpha)}$

L'aiguille a 2 positions d'équilibres : $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$. La position d'équilibre stable est la position $\alpha = 0$.

Pour $\alpha \ll 1$ rad, l'équation différentielle devient : $\ddot{\alpha} + \dfrac{\mathscr{M}_m B}{J}\alpha = 0$ qui est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

Avec $\kappa = \dfrac{\mathscr{M}_m}{J}$, l'équation différentielle s'écrit : $\ddot{\alpha} + \kappa B \alpha = 0$

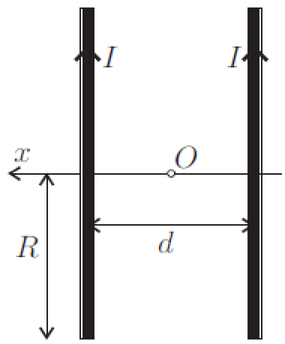
Dont la solution générale s'écrit $\alpha(t) = C\cos(\sqrt{\kappa B}t) + D\sin(\sqrt{\kappa B}t)$

$\left.\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = D\sqrt{\kappa B}$, donc $D = 0$

Donc $\alpha(t) = C\cos(\sqrt{\kappa B}t)$, avec α_0 la valeur maximale de cet angle qui est donc l'amplitude de α.

Ainsi $\boxed{\alpha(t) = \alpha_0\cos(\sqrt{\kappa B}t)}$

On cherche à mesurer le rapport κ. Pour cela on mesure la période des petites oscillations de l'aiguille aimantée placée dans un champ magnétique uniforme connu, créé par des bobines de Helmholtz. Les bobines de Helmholtz sont constituées de deux bobines plates, c'est-à-dire d'épaisseurs négligeables, identiques et équidistantes. Chacune d'entre elles comprend N spires circulaires de rayon R, parcourues par le même courant d'intensité I et dont le sens est indiqué sur la figure ci-contre. Ces deux bobines sont distantes de $d = R$. L'axe Ox de révolution des spires a pour origine le point O tel que les bobines soient équidistantes de celui-ci.



On montre qu'en un point M situé à l'abscisse x, sur l'axe Ox, le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé par les bobines s'écrit : $\overrightarrow{B}(x) = N\overrightarrow{B_0}\left\{\left[1 + \left(\dfrac{x}{R} - \dfrac{1}{2}\right)^2\right]^{-3/2} + \left[1 + \left(\dfrac{x}{R} + \dfrac{1}{2}\right)^2\right]^{-3/2}\right\}$

R2. La quantité $B_0 = \left\|\overrightarrow{B_0}\right\|$ s'exprime en fonction de μ_0, R et I. Par comparaison avec d'autres champs magnétiques, choisir en justifiant précisément ce choix, l'expression de B_0 parmi les suivantes :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \qquad B_0 = \frac{\mu_0 R}{2I} \qquad B_0 = \frac{\mu_0 I R}{2} \qquad B_0 = \frac{IR}{2\mu_0}$$

Solution: Vous ne connaissez que le champ créé par une bobine longue : $B = \mu_0 n I$, avec n le nombre de spires par unité de longueur (donc en m^{-1}).

Ainsi $[B] = \mu_0 \times L^{-1} \times I$ donc seul $\boxed{B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}}$ est homogène.

R3. Les bobines ont un rayon $R = 15$ cm. On donne le développement limité suivant, avec $X = \frac{x}{R}$:

$$\left[1 + \left(\frac{x}{R} \pm \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3/2} = \frac{8}{5\sqrt{5}}\left[1 \mp \frac{6}{5}X \pm \frac{32}{25}X^3 - \frac{144}{125}X^4 + o(X^4)\right]$$

Dans quelle zone située sur l'axe Ox, peut-on considérer que la variation relative de la norme du champ est inférieure à 2 % ? Préciser la valeur numérique de cette norme sachant que $N = 50$ spires et $I = 4$ A ?

Solution: Exprimons le développement limité du champ magnétique au voisinage de $x = 0$ ($x \ll R$), avec $X = \frac{x}{R}$:

$$\overrightarrow{B}(x) = N\overrightarrow{B_0}\left\{\left[1 + \left(\frac{x}{R} - \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3/2} + \left[1 + \left(\frac{x}{R} + \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3/2}\right\}$$

$$\overrightarrow{B}(x) = N\overrightarrow{B_0}\left\{\frac{8}{5\sqrt{5}}\left[1 + \frac{6}{5}X - \frac{32}{25}X^3 - \frac{144}{125}X^4 + o(X^4)\right] + \frac{8}{5\sqrt{5}}\left[1 - \frac{6}{5}X + \frac{32}{25}X^3 - \frac{144}{125}X^4 + o(X^4)\right]\right\}$$

$$\overrightarrow{B}(x) = N\overrightarrow{B_0}\frac{8}{5\sqrt{5}}\left\{2 - 2 \times \frac{144}{125}X^4 + o(X^4)\right\}$$

Donc $\overrightarrow{B}(x) \approx \frac{16}{5\sqrt{5}}N\overrightarrow{B_0}\left(1 - \frac{144}{125}X^4\right)$

Calculons la variation du champ magnétique entre x et $x = 0$: $\Delta\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}(x=0) - \overrightarrow{B}(x) = \frac{16}{5\sqrt{5}}N\overrightarrow{B_0} \times \frac{144}{125}X^4$

Calculons $\frac{\left\|\overrightarrow{B}(x=0) - \overrightarrow{B}(x)\right\|}{\left\|\overrightarrow{B}(x=0)\right\|} = \frac{144}{125}X^4$

On cherche X pour que $\frac{\left\|\overrightarrow{B}(x=0) - \overrightarrow{B}(x)\right\|}{\left\|\overrightarrow{B}(x=0)\right\|} = \frac{144}{125}X^4 < 0,02 \Rightarrow |X| < \left(0,02 \times \frac{125}{144}\right)^{1/4} = 0,36$

La variation relative de la norme du champ est inférieure à 2 % dans une zone d'abscisses $x \in [-0,36R; 0,36R]$, c'est-à-dire $x \in [-5,4 \text{ cm}; 5,4 \text{ cm}]$

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{B}(x=0)\right\| = \frac{16}{5\sqrt{5}}N\frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{8}{5\sqrt{5}}N\frac{\mu_0 I}{R} = 1,2.10^{-3} \text{ T}}$$

R4. La valeur mesurée de la période des petites oscillations de l'aiguille aimantée est $T = 0,30$ s. Déterminer l'unité et calculer la valeur numérique du rapport κ pour cette boussole.

Solution:

La période propre du mouvement de la boussole est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa B}} \Leftrightarrow \boxed{\kappa = \frac{4\pi^2}{BT_0^2} = 3,7.10^5 \text{ A} \cdot \text{kg}^{-1}}$

Unité de κ : $[\kappa] = \frac{[\omega_0^2]}{[B]} = \text{s}^{-2}.\text{T}^{-1}$

Ou $[\kappa] = \left[\dfrac{\mathscr{M}_m}{J}\right] = \dfrac{[IS]}{[J]} = \dfrac{\text{A.m}^2}{\text{kg.m}^2} = \text{A.kg}^{-1}$