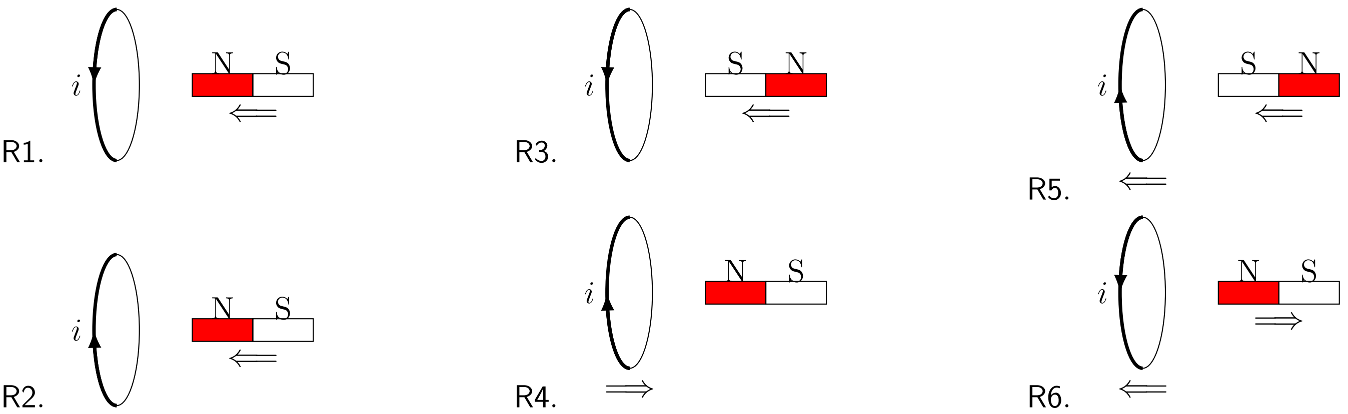
Thème I. Ondes et signaux (Induction)

TD n°23 Lois de l'induction

I Exercices d'applications directes du cours

Exercice n°1 Signe du courant induit ♪

Dans chacun des circuits ci-dessous, la spire circulaire et/ou l'aimant droit sont déplacés dans le sens indiqué par la double flèche. Indiquer le signe du courant i apparaissant dans la spire pendant le déplacement.



Exercice n°2 Rails de Laplace ♪

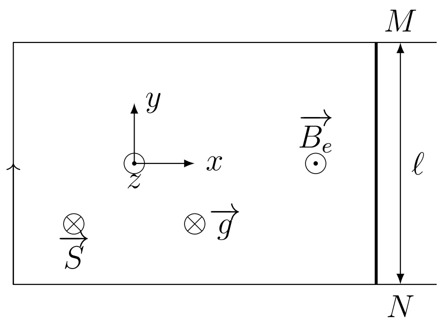
On considère le dispositif des rails de Laplace. Les 2 rails, parallèles, sont séparés d'une distance ℓ. Une barre, de longueur ℓ, parallèle à (Oy) repose sur les deux rails perpendiculairement aux deux rails et peut glisser sur les rails selon un mouvement de translation rectiligne selon $\pm\overrightarrow{u_x}$. On repère la position de la barre par son abscisse $x(t)$. Le tout est plongé dans un champ magnétique vertical perpendiculaire au plan des rails : $\overrightarrow{B_e} = B_e\overrightarrow{u_z}$, avec $B_e > 0$.

R1. Faire un schéma du dispositif avec la base cartésienne représentée dessus. Choisir une orientation pour i.

R2. Exprimer le flux du champ magnétique à travers la surface délimitée par le circuit fermé, en fonction de B_e, ℓ et $x(t)$.

Solution:

Commençons par orienter le circuit.



R3. Exprimer la force électromécanique induite dans le circuit par le déplacement de la barre.

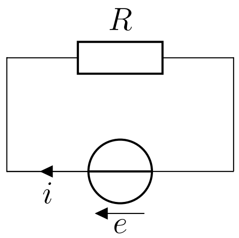
Solution: D'après la loi de Faraday :

$$\begin{aligned} e &= -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \\ &= -\frac{\mathrm{d}\big(B_e\ell x(t)\big)}{\mathrm{d}t} \\ &= -B_e\ell\dot{x} \end{aligned}$$

Soit $\boxed{e = -B_e \ell \dot{x}(t)}$

R4. On note R la résistance de la barre (on néglige les résistances du reste du circuit). En déduire l'intensité du courant induit dans le circuit.

Solution:



Loi des mailles : $e - Ri = 0$, donc $\boxed{i = \dfrac{e}{R} = -\dfrac{B_e \ell}{R}\dot{x}}$

R5. Déterminer l'expression de la force de Laplace subit par la barre.

Solution: La force de Laplace s'exprime selon : $\overrightarrow{F_{\mathscr{L}}} = i\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{B_e}$,
avec $\overrightarrow{MN}$ est le vecteur de norme la longueur de la tige, et orienté dans le sens du courant : $\overrightarrow{MN} = -\ell\overrightarrow{u_y}$
Ainsi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{\mathscr{L}}} &= i\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{B_e} \\ &= -i\ell\overrightarrow{u_y} \wedge B_e\overrightarrow{u_z} \\ &= -i\ell B_e\overrightarrow{u_x} \end{aligned}$$

Soit $\boxed{\overrightarrow{F_{\mathscr{L}}} = -i\ell B_e\overrightarrow{u_x}}$

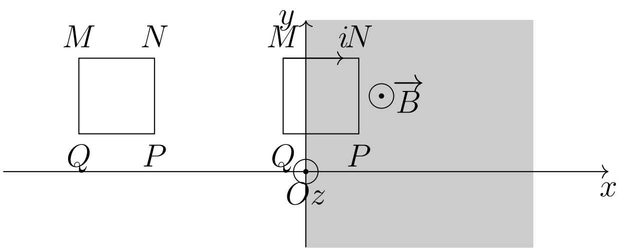
R6. L'exprimer en fonction de $\dot{x}$. Faire le lien avec la loi de modération de Lenz en reliant le sens de $\overrightarrow{F_{\mathscr{L}}}$ au signe de $\dot{x}$.

Solution: Avec $i = -\dfrac{B_e \ell}{R}\dot{x}$, on en déduit que $\boxed{\overrightarrow{F_{\mathscr{L}}} = -\dfrac{(B_e\ell)^2}{R}\dot{x}\overrightarrow{u_x} = -\dfrac{(B_e\ell)^2}{R}\overrightarrow{v}}$
La force de Laplace est opposée au vecteur vitesse : elle agit « comme une force de frottement fluide ».
Ceci est conforme à la loi de Lenz, en effet, le déplacement de la tige modifie la surface du circuit, et donc le flux du champ magnétique, il se produit alors un phénomène d'induction qui se traduit par l'apparition d'un courant électrique. La tige est alors traversée par un courant électrique et plongée dans un champ magnétique extérieur et est alors soumise à la force de Laplace qui s'oppose à la cause qui lui a donné naissance : le déplacement de la tige.

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°3 Cadre en translation ♪ ♪

Un champ constant et uniforme $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$ ($B > 0$) règne dans le demi espace $x \geq 0$.
Un cadre conducteur $MNPQ$ carré (de côté a), rigide, de résistance totale R, se translate à la vitesse $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u_x}$, $v > 0$ (cette vitesse est maintenue constante par un opérateur).
À l'instant $t = 0$, le fil NP est confondu avec l'axe Oy.



R1. À partir de quel instant t_1 le cadre est-il entièrement dans la zone avec champ ?

Solution: À l'instant $t_1 = \frac{a}{v}$, le cadre sera intégralement dans la zone où règne $\overrightarrow{B}$.

On se place à un instant $t \in [0, t_1]$ quelconque.

R2. Établir la fém d'induction e en fonction de B, v et a.

Solution: Je repère par x la position du côté NP, à $t = 0$, $x(0) = 0$.
D'après la loi de Faraday
$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$, avec $\phi = -Bax$
$\boxed{e = Ba\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$

R3. En déduire le courant i qui circule dans le cadre.

Solution: Circuit électrique équivalent + loi des mailles et d'Ohm
$\boxed{i = \frac{e}{R} = \frac{Ba}{R}v}$

R4. Exprimer la force de Laplace en fonction de B, a, R et $\overrightarrow{v}$.
Comment se manifeste ici la loi de modération de Lenz ?

Solution: D'après l'expression précédente, $i > 0$, qui crée donc un champ magnétique induit selon $-\overrightarrow{u_z}$ opposé à $\overrightarrow{B}$.
La surface de la spire plongée dans le champ magnétique augmente, donc $|\phi|$ augmente, c'est la cause de l'induction. D'après la loi de Lenz, l'effet (courant induit, champ magnétique induit) s'oppose à la cause qui lui a donné naissance.
On peut également calculer la force de Laplace :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_{\mathscr{L}}} &= \oint_{MNPQM} i\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B} \\
&= \int_N^P i\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B} \\
&= \int_a^0 i\mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} \wedge B\overrightarrow{u_z} \\
&= -iaB\overrightarrow{u_x} \\
&= -\frac{(Ba)^2}{R}v\overrightarrow{u_x} \\
&= -\frac{(Ba)^2}{R}\overrightarrow{v}
\end{aligned}$$

La force de Laplace agit comme une force de frottement fluide toujours opposée au vecteur vitesse.

R5. Que se passe-t-il pour $t > t_1$?

Solution: Pour $t > t_1$, le cadre est entièrement plongé dans $\overrightarrow{B}$, donc le flux ne varie plus et il ne se produit plus de phénomène d'induction, $i = 0$ et $\overrightarrow{F_{\mathscr{L}}} = \overrightarrow{0}$. Le système persévère dans son mouvement rectiligne uniforme.

Exercice n°4 Spire en rotation ♪ ♪

Une spire circulaire de surface S est en rotation, à la vitesse angulaire constante ω, autour d'un de ses diamètres, qui constitue l'axe Δ. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B}$, orthogonal à Δ.

On posera $\theta = \widehat{\left(\overrightarrow{B}, \overrightarrow{S}\right)}$, l'angle allant de $\overrightarrow{B}$ au vecteur surface $\overrightarrow{S}$ de la spire.

R1. Exprimer θ en fonction de ω et t.

R2. Établir l'expression de la f.é.m. induite e dans la spire en fonction de B, S, ω et t.

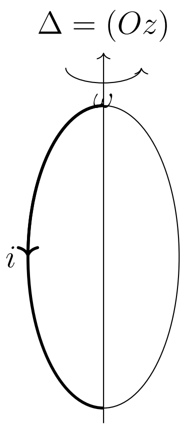
Solution:

La f.é.m. induite e dans la spire est donnée par la loi de Faraday : $e = -\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$

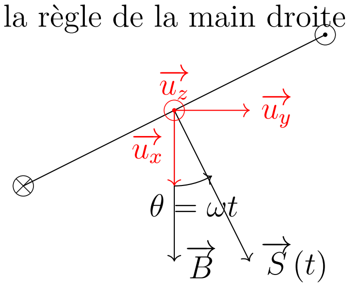
Or $\varphi = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S} = BS\cos(\omega t)$

Ainsi

$$\boxed{e = BS\omega\sin(\omega t)}$$

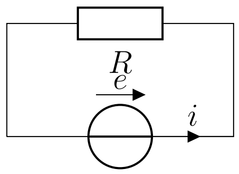


Vue de dessus : Le courant arrive du bas vers le haut à droite, et descend à gauche. $\overrightarrow{S}$ orienté par la règle de la main droite.



R3. On note R la résistance électrique de la spire, établir l'expression de l'intensité du courant induit en fonction de B, S, ω, R et t.

Solution:



Loi des mailles : $e - Ri = 0$, donc $\boxed{i = \dfrac{e}{R} = \dfrac{BS\omega\sin(\omega t)}{R}}$

R4. En déduire l'expression du moment magnétique de la spire.

Solution: Moment magnétique de la spire : $\boxed{\overrightarrow{m} = i\overrightarrow{S} = \dfrac{BS\omega\sin(\omega t)}{R}\overrightarrow{S}}$

R5. En déduire le couple de Laplace instantané puis moyen qui s'exerce sur la spire.
Dans quel sens est-il selon le sens du mouvement (c'est-à-dire le signe de ω) ? Faire le lien avec la loi de Lenz.

Solution: Couple de Laplace instantané :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma_{\mathscr{L}}} &= \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B} \\
&= \frac{BS\omega\sin(\omega t)}{R}\overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{B} \\
&= \frac{BS\omega\sin(\omega t)}{R}S\Big(\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x} + \sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}\Big) \wedge B\overrightarrow{u_x} \\
&= \frac{B^2S^2\omega}{R}\sin(\omega t)\Big(-\overrightarrow{u_z}\Big)
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{\mathscr{L}}} = -\dfrac{B^2S^2\omega}{R}\sin^2(\omega t)\overrightarrow{u_z}}$

En moyenne : $\boxed{<\overrightarrow{\Gamma_{\mathscr{L}}}>= -\dfrac{B^2S^2\omega}{2R}\overrightarrow{u_z}}$

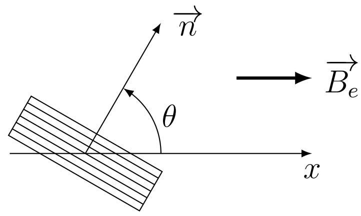
En utilisant le fait que $\boxed{\left\langle \sin^2(\omega t)\right\rangle = \dfrac{1}{2}}$

Si $\omega > 0$, alors le couple moyen est porté par $-\overrightarrow{u_\Delta}$, donc il s'oppose au mouvement qui a lieu dans le sens direct par rapport à $\overrightarrow{u_\Delta}$. Ceci est conforme à la loi de Lenz, en effet, la cause du phénomène d'induction est la rotation de la spire autour de l'axe Δ, la conséquence est l'apparition d'un courant dans la spire qui est alors soumis à un couple de Laplace qui va s'opposer à la cause qui lui a donné naissance : la rotation.

Exercice n°5 Allumer une LED ♪ ♪

Les bornes d'une bobine plate sont reliées à une LED qui s'allume dès que la tension efficace à ses bornes atteint la valeur de 1,6 V.

La bobine est constituée de $N = 14$ spires circulaires de rayon $a = 5,0$ cm, son axe étant orienté par le vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$.
Elle est plongée dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B_e} = B_e\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$, avec $B_e = 50$ mT et $\omega = 6,0.10^2$ rad · s^{-1}.
L'angle θ est réglable.



R1. Exprimer le flux de $\overrightarrow{B_e}$ à travers la bobine.

Solution: Le flux de $\overrightarrow{B_e}$ à travers la bobine est égal au flux de $\overrightarrow{B_e}$ à travers une spire de la bobine multiplié par nombre de spires dans la bobine.
Ainsi

$$\begin{aligned}\varphi &= N\times\varphi_{1\text{ spire}}\\ &= N\times\overrightarrow{B_e}\cdot\overrightarrow{S}\\ &= N\times B_e\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}\cdot\overrightarrow{S}\\ &= NB_eS\cos(\omega t)\cos(\theta)\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\varphi = NB_e\pi a^2\cos(\omega t)\cos(\theta)}$

R2. En déduire la force électromotrice induite aux bornes de la bobine.

Solution: D'après la loi de Faraday : $e = -\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, donc $\boxed{e = NB_e\pi a^2\omega\cos(\theta)\sin(\omega t)}$, avec θ une constante.

R3. Déterminer l'inégalité que doit vérifier $|\cos(\theta)|$ pour que la LED puisse s'allumer.
En déduire l'intervalle de θ qui permet à la LED de s'allumer.

Solution:
D'après l'énoncé, la LED s'allume dès que la tension efficace à ses bornes atteint la valeur de $U_a = 1,6$ V.
Il faut donc commencer par déterminer l'expression de la valeur efficace de la tension à ses bornes.
En se souvenant que la valeur efficace d'un signal sinusoïdal est égale à l'amplitude divisée par $\sqrt{2}$, on détermine la valeur efficace de la f.é.m : $\boxed{E_{\text{eff}} = \dfrac{NB_e\pi a^2\omega|\cos(\theta)|}{\sqrt{2}}}$

Déterminons θ, pour que $E_{\text{eff}} > U_a \Leftrightarrow \boxed{|\cos(\theta)| > \dfrac{\sqrt{2}U_a}{NB_e\pi a^2\omega}}$

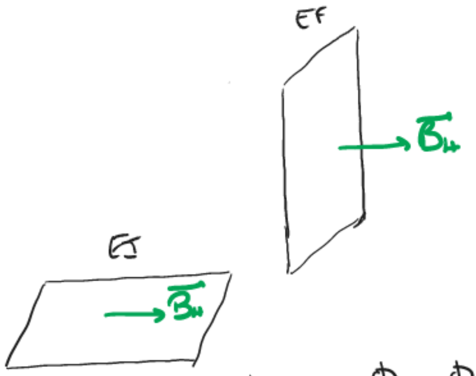
Soit $\theta\in[-47°, 47°]$ ou $\theta\in[133°, 227°]$

III Résolution de problème

Exercice n°6 Influence du champ terrestre sur un téléphone portable ♪ ♪ ♪

Un expérimentateur tient son téléphone portable dans sa main. Il fait passer son téléphone d'une position horizontale à une position verticale afin d'entrer en communication.
On tient compte de la composante horizontale du champ magnétique terrestre, d'environ 2.10^{-5} T.
Évaluer l'ordre de grandeur de la f.é.m. induite dans le téléphone lors de son déplacement. Commenter.
Pour répondre à cette question, vous êtes libre de modéliser le phénomène de manière personnelle, mais crédible.

Solution:



fem induite $e = -\frac{d\Phi}{dt} \simeq -\frac{\Phi_F - \Phi_I}{\Delta t}$

$e = -\frac{B_H S - 0}{\Delta t}$

$S \sim 1\,cm^2$ (surface du circuit élec)
$\Delta t \sim 1s$ (temps pour passer d'une position à l'autre)

$$\boxed{|e| = \frac{B_H S}{\Delta t}} = \frac{2.10^{-5} \times 10^{-4}}{1} \sim \underline{2.10^{-9}\ V}$$

ouf ! ça ne perturbe pas trop le circuit !

Exercice n°7 Autoroute A43 et stimulateur cardiaque ♪ ♪ ♪

L'autoroute A43 longe les bâtiments de l'usine de production d'aluminium de Saint-Jean-De-Maurienne. Un panneau suggère aux porteurs de stimulateurs cardiaques de modérer leur vitesse en longeant l'usine. Proposer une explication de ce principe de précaution, sachant que les cuves d'électrolyse utilisées dans l'usine sont alimentées par des courants de grande intensité pouvant atteindre quelques centaines de kA.

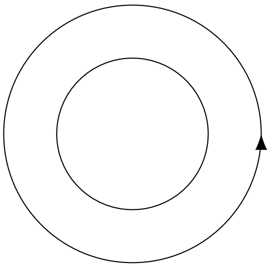
Solution:

IV Extraits du cahier d'entraînement de physique-chimie

Entraînement 17.6 — Boucles imbriquées.

Deux boucles circulaires se trouvent dans le même plan.

Si le courant $i(t)$ dans la boucle externe est dans le sens trigonométrique et augmente avec le temps, que vaut le courant induit dans la boucle interne ?



(a) Il n'y a pas de courant induit.
(b) Le courant induit est dans le sens des aiguilles d'une montre.
(c) Le courant induit est antihoraire.
(d) La direction du courant induit dépend des dimensions des boucles.

Entraînement 17.9 — Calcul de fém avec champ magnétique variable.

On plonge une spire de surface $S(t)$ dans une zone où règne un champ magnétique $B(t)$. Déterminer la force électromotrice $e = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ induite pour les flux suivants :

a) $\Phi_1 = B_0 S_0 \cos(\omega t + \varphi)$

b) $\Phi_2 = B_0 S_0 \times \left(1 + \dfrac{t}{\tau}\right) \exp^{-\frac{t}{\tau}}$

c) $\Phi_3 = B_0(1 - \cos(2\omega t)) S_0 \sin^2(\omega t)$

d) $\Phi_4 = B_0 \cos(\omega t) S_0 \sin(3\omega t)$