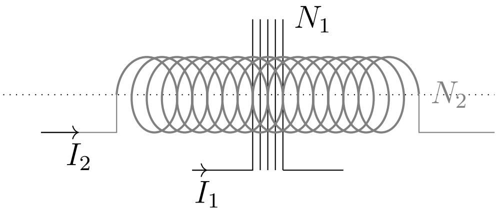
Thème I. Ondes et signaux (Induction)

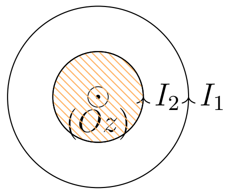
TD n°24 Induction dans un circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Induction mutuelle *(D'après Oral CCINP)*

Une bobine circulaire de rayon R_1 de N_1 spires enlace une bobine longue de N_2 spires, de longueur ℓ et de rayon R_2.





R1. Déterminer l'inductance propre L_2 de la bobine 2 (bobine longue).

Solution: Le champ magnétique créé par la bobine longue est uniforme dans la bobine longue $\overrightarrow{B_2} = \mu_0 \frac{N_2}{\ell} i_2 \overrightarrow{u_z}$ et nul à l'extérieur de la bobine longue.

Le flux propre est égal à N_2 fois le flux du champ magnétique $\overrightarrow{B_2}$ à travers une spire de la bobine 2 longue : $\varphi_2 = N_2 \times \overrightarrow{B_2} \cdot \overrightarrow{S_2}$, avec $\overrightarrow{S_2} = \pi R_2^2 \overrightarrow{u_z}$ (règle de la main droite).

Ainsi $\boxed{\varphi_{P2} = \mu_0 \frac{N_2^2}{\ell} \pi R^2 i_2}$

L'inductance propre est le coefficient de proportionnalité entre le flux propre φ_{P2} et l'intensité i_2 qui lui a donné naissance.

On en déduire : $\boxed{L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{\ell} \pi R_2^2}$

R2. Déterminer l'expression de l'inductance mutuelle M de ces deux circuits.

Solution: L'inductance mutuelle est le coefficient de proportionnalité entre le flux du champ $\overrightarrow{B_2}$ à travers la bobine 1 et l'intensité du courant i_2 : $\varphi_{2\to1} = M i_2$

C'est également le coefficient de proportionnalité entre le flux du champ $\overrightarrow{B_1}$ à travers la bobine 2 et l'intensité du courant i_1 : $\varphi_{1\to2} = M i_1$. Mais le champ magnétique de la bobine plate n'est pas connu, donc ce calcul ne pourra pas être effectué.

Calculons le flux du champ $\overrightarrow{B_2}$ créé par la bobine longue à travers la bobine plate : $\varphi_{2\to1} = N_1 \times \varphi_{2\to1 \text{ spire de } 1}$

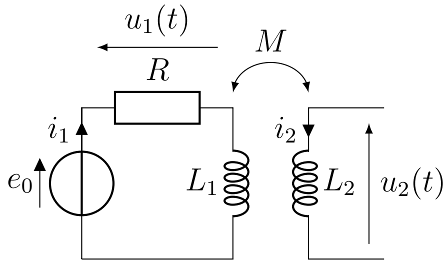
Le champ magnétique $\overrightarrow{B_2}$ est nul à l'extérieur de la bobine 2 (sur la figure, est hachurée la zone où $\overrightarrow{B_2}$ existe), ainsi : $\varphi_{2\to1 \text{ spire de } 1} = \overrightarrow{B_2} \cdot S_2 \frac{\overrightarrow{S_1}}{S_1} = \mu_0 \frac{N_2}{\ell} i_2(t) \times \pi R_2^2$

Ainsi $\boxed{\varphi_{2\to1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} \times \pi R_2^2 i_2(t)}$

On en déduit le coefficient d'inductance mutuelle : $\boxed{M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} \times \pi R_2^2}$

Exercice n°2 Mesure d'un coefficient d'inductance mutuelle

Le montage ci-contre permet de mesurer le coefficient d'inductance mutuelle entre deux bobines. Les deux bobines se font face comme sur la figure.
La première bobine est montée en série avec une résistance $R = 100\ \Omega$ et un générateur de tension e_0 harmonique de fréquence $f = 2,0$ kHz.
Les tensions u_1 et u_2 sont mesurées grâce à un oscilloscope supposé idéal, c'est-à-dire de résistance d'entrée infinie.

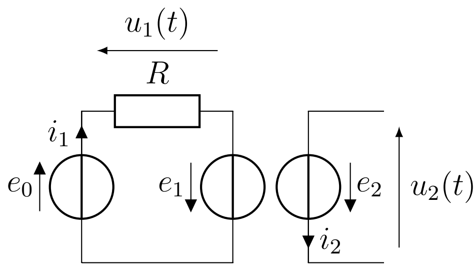


R1. Quelle est l'intensité circulant dans la bobine 2 ? D'après la loi de comportement habituelle de la bobine (celle vue en début d'année), que vaudrait alors la tension u_2 ? Pourquoi cette loi n'est elle pas applicable telle quelle ici ?

Solution: Le circuit 2 est ouvert, donc l'intensité circulant dans la bobine 2 est nulle. D'après la loi de comportement de la bobine vue en début d'année $u_2 = L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$, la tension aux bornes de la bobine serait alors nulle.
Cette loi n'est pas applicable ici car la bobine 2 est à proximité d'une autre bobine au sein de laquelle l'intensité du courant dépend du temps. Le champ magnétique créé par la bobine 1 dépend alors du temps, et le flux du champ magnétique créé par la bobine 1 à travers la bobine 2 dépend donc du temps. Par conséquent, un phénomène d'induction mutuelle se produit, et la tension aux bornes de la bobine 2 n'est pas nulle et dépend de l'intensité du courant dans la première bobine.

R2. Exprimer la tension u_2 en fonction de M et u_1.

Solution: Le flux à travers la bobine 2 s'exprime selon $\varphi_2 = L_2 i_2 + M i_1$, avec $i_2 = 0$. Ainsi $\varphi_2 = M i_1$
La loi de Faraday nous permet de déterminer la fem induite dans la bobine 2 : $\boxed{e_2 = -\dfrac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t} = -M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}}$, orientée en convention générateur avec i_2.
Ainsi $\boxed{u_2 = -e_2 = M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}}$
La loi d'Ohm appliquée à la résistance R donne : $u_1 = R i_1$.
Ainsi $\boxed{u_2 = \dfrac{M}{R}\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}}$



R3. Calculer M sachant que les tensions lues à l'oscilloscope ont des amplitudes $U_1 = 3,00$ V et $U_2 = 0,50$ V.

Solution: En RSF, utilisons la notation complexe : $\underline{u_2} = \dfrac{M}{R}\dfrac{\mathrm{d}\underline{u_1}}{\mathrm{d}t}$

Soit $\underline{u_2} = \dfrac{M}{R} j\omega \underline{u_1}$

En module, on en déduit : $U_2 = \dfrac{|M|}{R}\omega U_1$

Ainsi $\boxed{|M| = \dfrac{R}{2\pi f}\dfrac{U_2}{U_1} = 1,3.10^{-3}\ \mathrm{H}}$

R4. Comment placer les deux bobines pour obtenir le coefficient M maximal ?

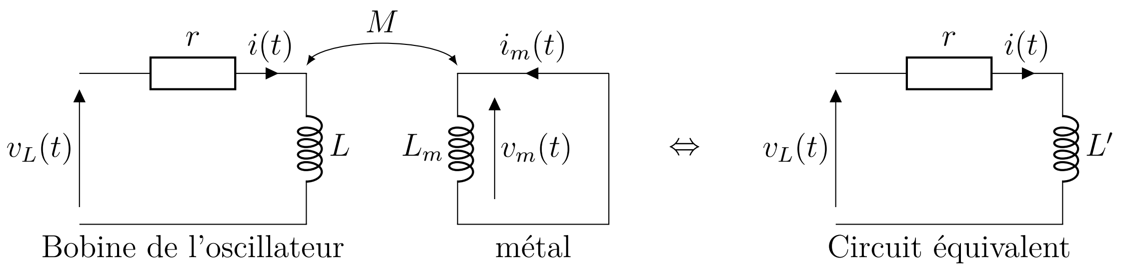
Solution:

Exercice n°3 Détecteur de métaux

Pour fabriquer le détecteur de métaux, on associe deux circuits oscillateurs. On note f_r la fréquence fixe du circuit de référence et f_d la fréquence variable du circuit de détection. En l'absence de détection, les fréquences d'oscillations des oscillateurs sont identiques :

$$f_d = f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Lorsqu'un métal est présent dans le champ de la bobine de détection, d'inductance propre L , on admet que le métal détecté se comporte comme une bobine d'inductance propre L_m. Le couplage entre les deux inductances est matérialisé par une inductance mutuelle notée M. L'inductance propre du circuit de détection se trouve alors modifiée et devient L'.

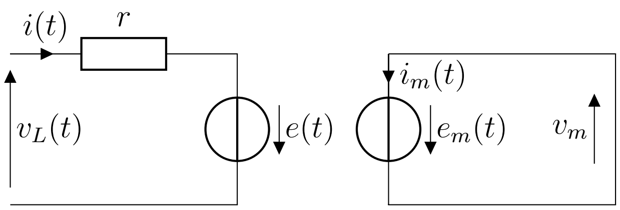


R1. Exprimer la force électromotrice induite dans le métal.

R2. Représenter le circuit électrique équivalent au métal. En déduire l'expression de v_m.

R3. Compte-tenu du court-circuit, en déduire que $\dfrac{\mathrm{d}i_m}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{M}{L_m}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

Solution: La fem induite dans le métal est donnée par la loi de Faraday : $e_m = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}$, avec $\Phi_{\text{tot}} = L_m i_m + Mi$, ainsi $e_m = -L_m\dfrac{\mathrm{d}i_m}{\mathrm{d}t} - M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$



On obtient donc $\boxed{v_m = -e_m = L_m\dfrac{\mathrm{d}i_m}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$

Or la loi des mailles donne $v_m = 0$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}i_m}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{M}{L_m}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

R4. Exprimer la force électromotrice induite dans le circuit de l'oscillateur.

R5. Représenter le circuit électrique équivalent à l'oscillateur. En déduire l'expression de v_L en fonction de r, i, L, M et i_m.

R6. En déduire alors que la tension v_L peut se mettre sous la forme $v_L(t) = ri + L'\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. On exprimera L' en fonction de L, M, L_m.

Solution: De la même façon dans la bobine : la fem induite vaut $e = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - M\dfrac{\mathrm{d}i_m}{\mathrm{d}t}$

La loi des mailles au circuit de l'oscillateur s'écrit :

$$\begin{aligned}
v_L + e &= ri \\
v_L &= ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_m}{\mathrm{d}t} \\
v_L &= ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{M^2}{L_m}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\
&= ri + L\left(1 - \frac{M^2}{LL_m}\right)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

On identifie $\boxed{L' = L\left(1 - \dfrac{M^2}{LL_m}\right)}$

R7. Sachant que $M^2 \ll LL_m$, en déduire que la détection d'un métal engendre une variation relative $\dfrac{f_d - f_r}{f_r}$ de la fréquence d'oscillation du détecteur de la quantité $\dfrac{1}{2}\dfrac{M^2}{LL_m}$

Solution: Le circuit de l'oscillateur couplé au métal est équivalent à un circuit d'inductance propre L', et la fréquence propre devient $f'_d = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L'C}}$ En l'absence de métal, il n'y a pas d'induction et l'inductance de l'oscillateur n'est pas modifiée.

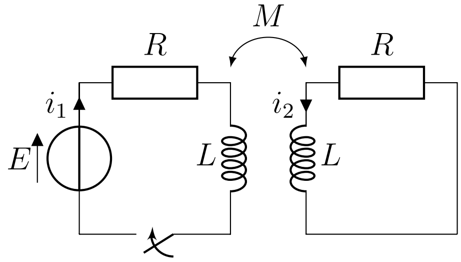
$$\begin{aligned}
\frac{f'_d - f_d}{f_d} &= \frac{\dfrac{1}{2\pi\sqrt{L'C}} - \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}{\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \\
&= \sqrt{\frac{L}{L'}} - 1 \\
&= \sqrt{\frac{L}{L\left(1 - \dfrac{M^2}{LL_m}\right)}} - 1 \\
&= \sqrt{\frac{1}{1 - \dfrac{M^2}{LL_m}}} - 1 \\
&\approx 1 + \frac{M^2}{2LL_m} - 1
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\dfrac{\Delta f_d}{f_d} = \dfrac{1}{2}\dfrac{M^2}{LL_m}}$

II Exercices d'approfondissement

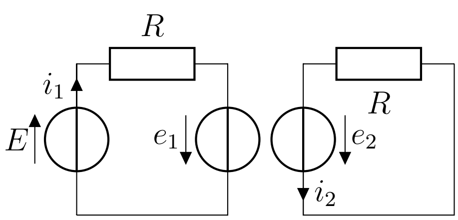
Exercice n°4 Régime transitoire dans deux circuits inductifs couplés

On étudie deux circuits électriques couplés par induction mutuelle. Le premier circuit comporte un solénoïde d'inductance L, une résistance R, un générateur de tension stabilisée de force électromotrice E constante, et un interrupteur disposés en série. Le deuxième circuit comporte un solénoïde d'inductance L, une résistance R en série. On note M le coefficient d'inductance mutuelle, qui est supposé positif (les deux bobines sont orientées pour qu'il en soit ainsi).



R1. Établir le système de deux équations différentielles vérifiées par les intensités i_1 et i_2.

Solution:



— Circuit 1 :

fem induit : $e_1 = -\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t}$, avec $\varphi_1 = Li_1 + Mi_2$

Loi des mailles : $E - Ri_1 + e_1 = 0$, soit $\boxed{E = Ri_1 + L\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}}$ (1)

— Circuit 2 :

fem induit : $e_2 = -\dfrac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}$, avec $\varphi_2 = Li_2 + Mi_1$

Loi des mailles : $-Ri_2 + e_2 = 0$, soit $\boxed{0 = Ri_2 + L\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}}$ (2)

R2. En déduire deux équations différentielles vérifiées, l'une par $I = i_1 - i_2$ et l'autre par $J = i_1 + i_2$.

Solution:

(1)+(2) : $E = RJ + L\dfrac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$, soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L+M}J = \dfrac{E}{L+M}}$

(1)-(2) : $E = RI + L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - M\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$, soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L-M}I = \dfrac{E}{L-M}}$

R3. L'interrupteur est initialement ouvert (pour $t < 0$), et il est fermé à l'instant $t = 0$.
En posant $\tau_1 = \dfrac{L+M}{R}$ et $\tau_2 = \dfrac{L-M}{R}$, déterminer les expressions des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ pour $t > 0$, dans le cas où $M < L$. Donner l'allure des représentations graphiques de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction du temps.

Solution:

En introduisant les constantes de temps τ_1 et τ_2, on résout les deux équations différentielles précédentes :
$J(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau_1}} + \dfrac{E}{R}$ et $I(t) = K'e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \dfrac{E}{R}$

Le flux du champ magnétique à travers une bobine est une fonction continue du temps, donc $\varphi_1(0^+) = \varphi_1(0^-) = 0$ et de même $\varphi_2(0^+) = \varphi_2(0^-) = 0$

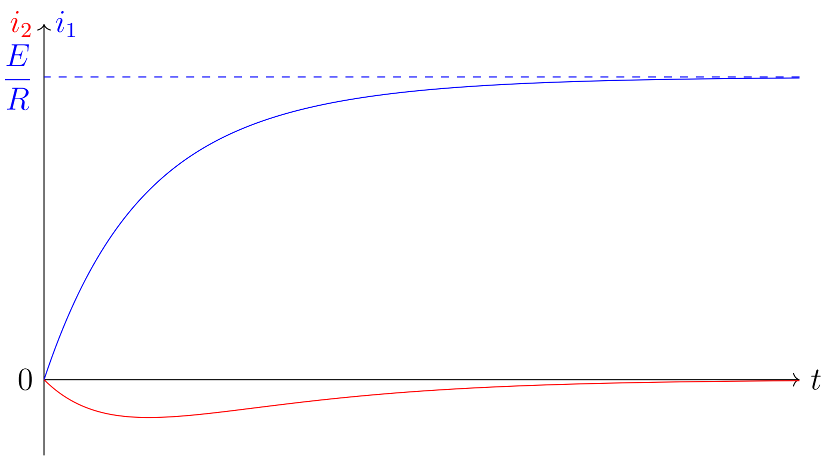
De la même façon que dans l'exercice précédent, sachant que $M < L$, alors $i_1(0^+) = 0 = i_2(0^+)$.

Ainsi $I(0^+) = 0 = J(0^+)$, donc $K = -\dfrac{E}{R} = K'$.

On en déduit $\boxed{J(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)}$ et $\boxed{I(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)}$

On en déduit i_1 et i_2 :

$\boxed{i_1(t) = \dfrac{I+J}{2} = \dfrac{E}{R}\left(1 - \dfrac{e^{-\frac{t}{\tau_1}} + e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{2}\right)}$ et $\boxed{i_2(t) = \dfrac{J-I}{2} = \dfrac{E}{R}\dfrac{e^{-\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{2}}$



R4. Effectuer une bilan de puissance.

Solution: On multiplie les lois des mailles (1) par i_1 et (2) par i_2, puis on les sommes :
$\boxed{Ei_1 = Ri_1^2 + Ri_2^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li_1^2 + \frac{1}{2}Li_2^2 + Mi_1i_2\right)}$, avec

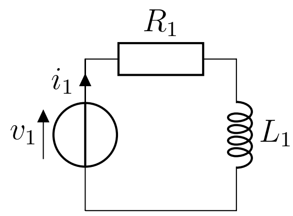
- La puissance fournie par le générateur : $\mathscr{P}_g = E \times i_1$
- La puissance reçue par les résistances et dissipée par effet Joule : $\mathscr{P}_J = Ri_1^2 + Ri_2^2$
- La puissance reçue et emmagasinée sous forme magnétique : $\mathscr{P}_{\text{mag}} = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t}$, avec $\mathscr{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2}Li_1^2 + \frac{1}{2}Li_2^2 + Mi_1i_2$

Exercice n°5 Chauffage par induction

Le chauffage du fond métallique des récipients de cuisson peut être réalisé directement au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable. Logé dans une table en céramique, un bobinage, nommé inducteur, alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire assimilable à une spire unique fermée sur elle même, située au fond de la casserole.
L'inducteur, de rayon 5 cm, possède 20 spires de cuivre de résistance $R_1 = 1,8 \times 10^{-2}\ \Omega$ et d'auto-inductance L_1. L'inducteur est alimenté par une tension $v_1(t)$.
La plaque de résistance $R_2 = 8,3\ \mathrm{m}\Omega$ et d'auto-inductance $L_2 = 0,24\ \mu\mathrm{H}$, nommée induit, est assimilable à une spire refermée sur elle même.
Le coefficient de mutuelle inductance est estimé à $M = 2,0\ \mu\mathrm{H}$.

R1. L'inducteur, alimenté en l'absence d'induit, sous une tension efficace de $V_{1\text{eff}} = 24$ V, à la fréquence de $f = 25$ kHz, est traversé par un courant de valeur efficace égale à $I_{1\text{eff}} = 5,1$ A.
Faire le circuit électrique de l'inducteur. Établir la relation, en complexe entre $\underline{v_1}$, $\underline{i_1}$, R_1, L_1 et ω.
En passant astucieusement au module, exprimer littéralement son auto-inductance L_1 en fonction de $V_{1,\text{eff}}$, $I_{1,\text{eff}}$ et f. Puis en donner la valeur numérique.

Solution:
L'inducteur étant alimenté par une tension sinusoïdale, on peut utiliser la notation complexe : $\underline{v_1} = (L_1 j\omega + R_1)\underline{i_1}$
En module : $V_{1m} = \sqrt{R_1^2 + (L_1\omega)^2} I_{1m}$
Les valeurs efficaces sont reliées aux amplitudes par : $V_{1,\text{eff}} = \frac{V_{1,m}}{\sqrt{2}}$ et $I_{1,\text{eff}} = \frac{I_{1,m}}{\sqrt{2}}$



Ainsi $V_{1,\text{eff}} = \sqrt{R_1^2 + (L_1\omega)^2} I_{1,\text{eff}} \Leftrightarrow \left(\frac{V_{1,\text{eff}}}{I_{1,\text{eff}}}\right)^2 = R_1^2 + (L_1\omega)^2$

Ainsi : $\boxed{L_1 = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{V_{1,\text{eff}}}{I_{1,\text{eff}}}\right)^2 - R_1^2} = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{\left(\frac{V_{1,\text{eff}}}{I_{1,\text{eff}}}\right)^2 - R_1^2} = 3,0.10^{-5}\ \mathrm{H} = 30\ \mu\mathrm{H}}$

R2. Vérifier numériquement (en faisant les applications numériques) que $L_1\omega \gg R_1$ et $L_2\omega \gg R_2$. On se placera dans ce cas dans la suite.

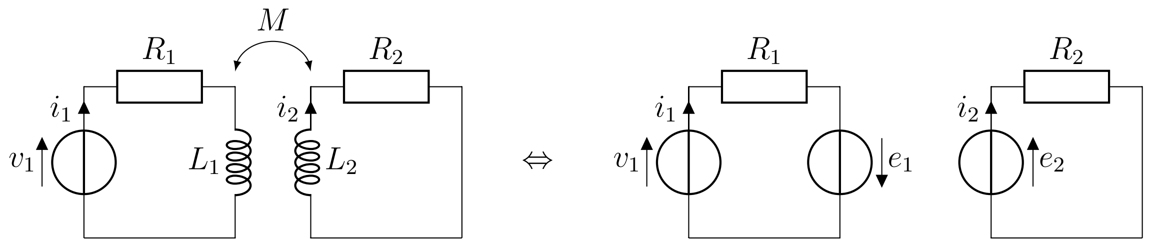
Solution: Numériquement : $L_1 \times 2\pi f = 4,7\ \Omega \gg R_1$
De même : $L_2 \times 2\pi f = 3,8.10^{-2}\ \Omega \gg R_2$ (approximation un peu forte)

R3. Faire un schéma électrique qui retranscrit la situation, sur lequel apparaît le circuit de l'inducteur (générateur, résistance, inductance L_1) et le circuit de l'induit (résistance R_2, inductance L_2), les deux circuits étant couplés par la mutuelle M.

Faire ensuite un schéma électrique équivalent.

R4. Établir les équations (différentielles) électriques relatives aux deux circuits.

Solution:



— Fem induite dans le premier circuit : $e_1 = -\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t}$, avec $\varphi_1 = L_1 i_1 + M i_2$, donc $e_1 = -L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$

Loi des mailles dans le premier circuit : $v_1 - R_1 i_1 + e_1 = 0$, soit $\boxed{v_1 = R_1 i_1 + L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}}$

— Fem induite dans le deuxième circuit : $e_2 = -\dfrac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}$, avec $\varphi_2 = L_2 i_2 + M i_1$, donc $e_2 = -L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$

Loi des mailles dans le deuxième circuit : $e_2 - R_2 i_2 = 0$, soit $\boxed{0 = R_2 i_2 + L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}}$

R5. En déduire l'expression de $\dfrac{\underline{i_2}}{\underline{i_1}}$, puis celle du rapport des amplitudes $\left|\dfrac{I_{2m}}{I_{1m}}\right|$, que l'on simplifiera compte tenu de l'approximation $R_2 \ll L_2\omega$.
Faire l'application numérique

Solution: En RSF, on utilise la notation complexe : $\begin{cases} \underline{v_1} & = & (R_1 + L_1 j\omega)\underline{i_1} + Mj\omega\underline{i_2} \\ 0 & = & (R_2 + L_2 j\omega)\underline{i_2} + Mj\omega\underline{i_1} \end{cases}$

D'après la question précédente, on néglige les résistances, et on obtient : $\begin{cases} \underline{v_1} & = & L_1 j\omega\underline{i_1} + Mj\omega\underline{i_2} \\ 0 & = & L_2 j\omega\underline{i_2} + Mj\omega\underline{i_1} \end{cases}$

Ainsi $\boxed{\dfrac{\underline{i_2}}{\underline{i_1}} = -\dfrac{M}{L_2}}$ et $\boxed{\left|\dfrac{\underline{i_2}}{\underline{i_1}}\right| = \dfrac{|M|}{L_2} = 6,7.10^{-2}}$

R6. Établir l'expression de $\underline{v_1}$ en fonction de $\underline{i_1}$ et de R_1, R_2, L_1, L_2, M, ω. Simplifier compte tenu des approximations précédentes.

R7. En déduire que $I_{2,m} = V_{1,m} \times \dfrac{|M|}{(L_1L_2 - M^2)\omega}$.
Faire l'application numérique de I_2.
En déduire la puissance moyenne dissipée dans la casserole donnée par $\mathscr{P}_2 = \dfrac{1}{2}R_2 I_{2m}^2$.

R8. On soulève la casserole. Comment varie l'amplitude du courant i_2 circulant dans l'induit, et donc la puissance dissipée dans l'induit ?

R9. Pour des raisons de sécurité, on se fixe comme objectif de limiter les pertes par effet Joule dans l'inducteur à 50 W (en moyenne). Quelle est alors la valeur efficace du courant maximal admissible dans l'inducteur ? En déduire la valeur efficace maximale de la tension d'alimentation, l'intensité efficace du courant dans la plaque et la puissance (moyenne) de chauffe développée dans celle-ci.

Solution:
La puissance dissipée par effet Joule dans l'inducteur s'écrit : $\mathscr{P}_{J1} = R_1 i_1^2$

En moyenne : $\left\langle \mathscr{P}_{J1} \right\rangle = R_1 \underbrace{\left\langle i_1^2 \right\rangle}_{=I_{1,\text{eff}}^2}$

On impose $\left\langle \mathscr{P}_{J1} \right\rangle \leq \mathscr{P}_{\max} = 50 \text{ W} \Leftrightarrow R_1 I_{1,\text{eff}}^2 \leq \mathscr{P}_{\max} \Leftrightarrow \boxed{I_{1,\text{eff}} \leq \sqrt{\dfrac{\mathscr{P}_{\max}}{R_1}} = 53 \text{ A}}$

D'après la loi des mailles en complexe dans le circuit 1 : $\underline{v_1} = L_1 j\omega \underline{i_1} + Mj\omega \underline{i_2}$

Or $\underline{i_2} = -\dfrac{M}{L_2}\underline{i_1}$

$$\begin{aligned}
\underline{v_1} &= L_1 j\omega\omega \underline{i_1} - \frac{M^2}{L_2} j\omega \underline{i_1} \\
\underline{v_1} &= \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right) j\omega \underline{i_1} \\
|\underline{v_1}| &= \left|L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right| \omega |\underline{i_1}| \\
V_{1m} &= \left|L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right| \omega I_{1m} \\
V_{1,\text{eff}} &= \left|L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right| \omega I_{1,\text{eff}}
\end{aligned}$$

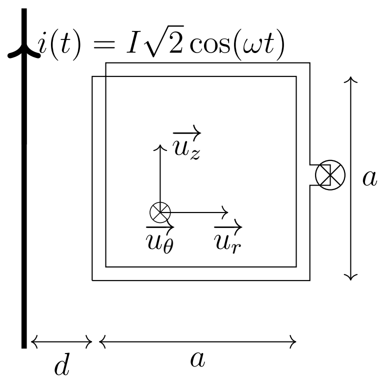
Ainsi pour être dans les conditions de sécurité demandées, il faut que : $\boxed{V_{1,\text{eff}} < \left|L_1 - \dfrac{M^2}{L_2}\right| \omega I_{1,\text{eff}} = 110 \text{ V}}$

Enfin, la puissance électrique moyenne reçue par le fond de la casserole modélisée par le deuxième circuit et dissipée par effet Joule s'écrit :

$$\begin{aligned}
< \mathscr{P}_{J2} > &= R_2 < i_2^2 > \\
&= R_2 I_{2,eff}^2 \\
&= R_2 \times \frac{M^2}{L_2^2} I_{1,\text{eff}}^2
\end{aligned}$$

Ainsi au maximum : $\boxed{< \mathscr{P}_{J2} > = R_2 \times \dfrac{M^2}{L_2^2} I_{1,\text{eff,max}}^2 = 3,6.10^5 \text{ W}}$

Exercice n°6 Ligne haute tension *(D'après Oral CCINP)*



Une ligne haute tension transporte un courant sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz et de valeur efficace $I = 1$ kA.
On approche une bobine plate de N spires carrées de côte $a = 30$ cm à une distance $d = 2$ cm comme indiqué sur le schéma.
Cette bobine, d'inductance et de résistance négligeables, est fermée sur une ampoule qui éclaire si la tension efficace à ses bornes est supérieure à 1,5 V.

R1. Déterminer l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.

Solution: L'énoncé nous fournit l'expression du champ magnétique créé par le fil infini dont on peut calculer le flux à travers les N spires carrées.
Attention, ici le champ magnétique créé par le fil n'est pas uniforme :

$\varphi = N \times \iint_{1 \text{ spire}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = N \times a \times \int_d^{d+a} \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r} \mathrm{d}r$

Soit $\varphi = N\dfrac{\mu_0 a i}{2\pi}\ln\left(\dfrac{d+a}{d}\right) = Mi$

On identifie l'inductance mutuelle : $\boxed{M = \dfrac{N\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{a}{d}\right)}$

R2. En déduire le nombre de spires nécessaire pour la bobine.

Solution: Pour éclairer l'ampoule, il faut que la valeur efficace de la tension u aux bornes de l'ampoule soit supérieure à 1,5V.

L'existence d'une tension aux bornes de l'ampoule est due au phénomène d'induction provoqué par le courant variable qui circule dans le fil. Le phénomène d'autoinduction étant ici négligé.

Fem induite : $e = -\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, avec $i = I\sqrt{2}\cos(\omega t)$, on en déduit $\boxed{e = MI\sqrt{2}\omega\sin(\omega t)}$.

La fem est de valeur efficace $E = MI\omega = \dfrac{N\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{d}{a}\right)I\omega > U_{\min} = 1,5\text{ V}$

$N > \dfrac{2\pi U_{\min}}{\mu_0 a I\omega\ln\left(1+\frac{a}{d}\right)} \Leftrightarrow N > \dfrac{2\pi U_{\min}}{\mu_0 a I\times 2\pi f\ln\left(1+\frac{a}{d}\right)} \Leftrightarrow \boxed{N > \dfrac{U_{\min}}{\mu_0 a I\times f\ln\left(1+\frac{a}{d}\right)}}$

A.N. : Il faut $N > 29$ pour que l'ampoule s'allume.

On donne le champ magnétique créé par le fil infini à la distance r en coordonnées polaires : $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\overrightarrow{u_\theta}$.

III Résolution de problème

Exercice n°7 Dimensionnement d'un transformateur

On cherche à dimensionner le transformateur utilisé pour recharger un portable. La chaîne d'énergie, logée dans un boîtier placé sur le cordon d'alimentation du portable, se compose successivement :

- de l'alimentation EDF du secteur qui délivre la tension $v_1(t) = V_{0,1}\sin(2\pi f_0 t)$, où $f_0 = 50$ Hz et $V_{0,1} = 240$ V,
- d'un transformateur, dont la sortie est $v_2(t) = V_{0,2}\sin(2\pi f_0 t)$, et dont le rapport de transformation est noté m,
- d'un redresseur, montage qui délivre la valeur absolue v_3 de la tension d'entrée v_2,
- d'un filtre moyenneur, dont la sotie v_4 est la valeur moyenne de la tension d'entrée v_3. La batterie de portable est branchée à la sortie, elle requiert une tension de charge constante $v_4 = 12$ V.

Déterminer le rapport m du transformateur à utiliser.

Solution:

— En sortie du transformateur : $v_2(t) = mv_1(t)$

— En sortie du redresseur : $v_3 = |v_2| = m|v_1|$

— En sortie du moyenneur : $v_4 = \left\langle v_3\right\rangle = \left\langle |v_2|\right\rangle = m\left\langle |v_1|\right\rangle$

Calculons la valeur moyenne de v_1, avec $T = \dfrac{1}{f_0}$, en notant que $\sin(2\pi f_0 t)$ est positive sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{T}{2}\right]$

et négative sur l'intervalle $\left[\frac{T}{2}, T\right]$.

$$\begin{aligned}
\left\langle |v_1| \right\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T V_{0,1}|\sin(2\pi f_0 t)|\mathrm{d}t \\
&= \frac{V_{0,1}}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(2\pi f_0 t)\mathrm{d}t + \int_{\frac{T}{2}}^{T} -\sin(2\pi f_0 t)\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{V_{0,1}}{T}\left(-\frac{\cos(2\pi f_0 T/2) - 1}{2\pi f_0} + \frac{\cos(2\pi f_0 T) - \cos(2\pi f_0 T/2)}{2\pi f_0}\right) \\
&= V_{0,1}\frac{1+1+1+1}{2\pi} \\
&= \frac{2V_{0,1}}{\pi}
\end{aligned}$$

Ainsi on a : $\boxed{v_4 = \frac{2mV_{0,1}}{\pi}}$, soit $\boxed{m = \frac{\pi v_4}{2V_{0,1}} = 7,9.10^{-3}}$

Il faut environ 13 fois plus de spires au primaire qu'au secondaire.