Thème III. L'énergie : conversions et transferts

TD n°26 Statique des fluides dans un référentiel galiléen

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Établir et utiliser l'équation locale de la statique des fluides.	✎	✎			✎	✎	✎			
Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et homogène.	✎						✎			
Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas de l'atmosphère isotherme.		✎			✎	✎				
Exploiter la loi d'Archimède.			✎		✎			✎	✎	✎
Exprimer une surface élémentaire dans un système de coordonnées adaptées.				✎						
Utiliser les symétries pour déterminer la direction d'une résultante de forces de pression.				✎						
Évaluer une résultante de forces de pression.				✎						

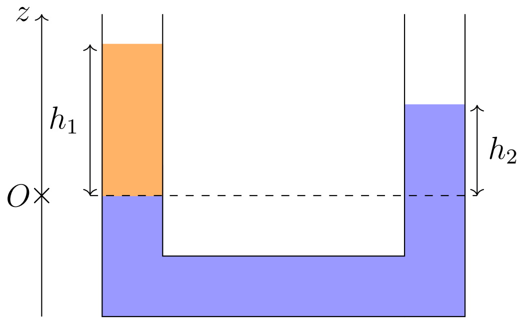
Parcours possibles

- Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : 1 et 2.
- Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : 5 puis 3
- Si vous êtes à l'aise : 5, 6, 3, 4.

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Tube en U (1)

On considère un tube en U de section S qui contient un liquide de masse volumique ρ_2. On verse d'un côté un volume V de liquide de masse volumique ρ_1.
On fait l'hypothèse que $\rho_1 < \rho_2$.
On note P_{atm} la pression atmosphérique qui règne dans l'air.



Q1. Rappeler l'équation locale de la statique des fluides.

Q2. En déduire l'expression du champ de pression dans chaque fluide.

Q3. En utilisant la continuité de la pression, déterminer une relation entre h_1, h_2, ρ_1 et ρ_2. Comparer h_1 et h_2.

Q4. Exprimer le dénivelé $h_1 - h_2$ en fonction de ρ_1, ρ_2, V et S.

Exercice n°2 Pression au sommet de l'Éverest

On considère que la température de l'air, assimilé à un gaz parfait, décroît linéairement avec l'altitude. Au niveau de la mer la température vaut $T_0 = 20$ °C et au sommet de l'Éverest (altitude $h = 8850$ m), elle vaut $T_h = -40$ °C. On note P_0 la pression au niveau de la mer.
On choisit un axe (Oz) vertical ascendant, où $z = 0$ est situé au niveau de la mer.

Q1. Déterminer la loi de variation de la température avec l'altitude.

Q2. Rappeler l'équation de la statique des fluides.

Q3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la pression et l'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{M_{\text{air}}g}{R(T_0 - az)}P(z)$, où on donnera la signification de a et T_0.

Q4. Résoudre l'équation différentielle précédente pour en déduire la loi de variation de la pression avec l'altitude. L'écrire sous la forme $P(z) = P_0 \left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^\beta$. On donnera l'expression de la constante β en fonction de M_{air}, g, a et R.

Q5. En déduire l'expression de la pression au sommet de l'Éverest en fonction de T_0, T_h, P_0, M_{air}, g, a et R. Faire l'application numérique.

Q6. Montrer que dans l'atmosphère, la masse volume ρ est reliée à la pression par : $\frac{P(z)}{\rho(z)^k} = \text{constante}$. Exprimer k, puis calculer sa valeur numérique.

Exercice n°3 Iceberg

On considère un iceberg. On note V le volume total de l'iceberg, V_i son volume immergé et V_e son volume émergé.

Q1. Donner les expressions de la poussée d'Archimède (on prendra en compte celle exercée par l'eau et par l'air) et de la force de pesanteur qui s'appliquent sur l'iceberg.

Q2. En utilisant le fait que l'iceberg est à l'équilibre, déterminer la proportion volumique de glace immergée.

Q3. Un glaçon flotte dans un verre rempli à ras bord. Faut-il vider partiellement le verre pour éviter qu'il ne déborde lorsque le glaçon fond ?

Données :

- masse volumique de la glace : $\rho_{\text{g}} = 0,92.10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- masse volumique de l'eau liquide salée : $\rho_{\text{es}} = 1,0.10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- masse volumique de l'air : $\rho_{\text{a}} = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°4 20 000 lieues sous les mers

De nouveaux hôtels grands luxes sont construits sous l'eau. Dans l'archipel des Fidji, un hôtel est ainsi constitué de 24 capsules, que l'on assimilera à des demi-sphères de rayon 4,0 m, posées sur le fond de l'océan (à 15 m de profondeur).

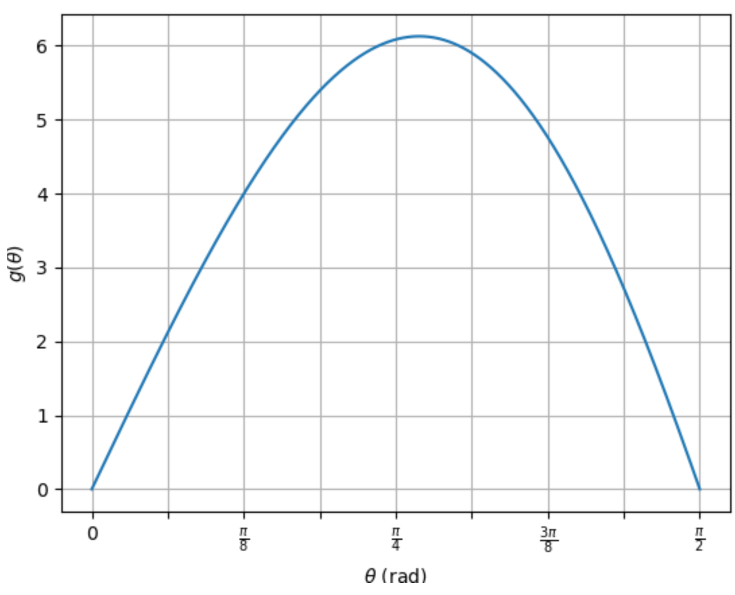
Q1. Calculer la résultante des forces de pression qui s'exerce sur la paroi de chacune des capsules.

Précédemment, vous avez dû calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(H - R\cos(\theta)\right)\sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\right)$ pour obtenir F_P telle que $F_P = -2\pi\rho g R^2 \times I$.

On se propose de la calculer en utilisant la méthode des rectangles à droite.

Q2. Définir en python la fonction `g(th)` dont on souhaite déterminer l'intégrale.

Q3. Que permet la méthode des rectangles ? Expliquer la méthode des rectangles à droite, et l'illustrer sur le graphe ci-dessous, dans le cas où l'intervalle d'intégration $[0, \pi/2]$ est découpé en $n = 8$.



Q4. Exprimer la somme R_n qui approxime la valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle $[a,b]$ découpé en n intervalles, selon la méthode des rectangles à droite. On exprimera le pas h de calcul.

Q5. Écrire la fonction `Rectangle_d(a,b,f,n)` qui renvoie la valeur de la somme exprimée précédemment.

Q6. Commenter le code et les valeurs obtenues :

```
L=[]
for n in [2,4,8,10,50,100,1000,10000]:
    L.append(rectangle_d(g,0,pi/2,n))
>>> L
[4.779765490941271, 5.829472211959247, 6.082944490055528,
   6.113128400363213, 6.164528127905089, 6.166132055315627,
   6.166661320630175, 6.166666613206313]
```

Exercice n°5 Montgolfière

On considère l'atmosphère modélisée par le modèle isotherme. On note $T_0 = 283$ K la température uniforme dans l'atmosphère. On choisit l'axe (Oz) vertical ascendant, avec l'origine au niveau de la mer où règne la pression P_0.

Q1. Établir la relation entre la masse volumique μ de l'air, sa température T, sa pression P, la masse molaire M_a et la constante des gaz parfaits R.

Q2. Établir l'expression de la pression dans l'atmosphère en fonction de z, P_0 et une hauteur caractéristique H qu'on exprimera en fonction de R, T_0, M_a et g.

Q3. Représenter l'allure de $P(z)$ et évaluer numériquement H.

Soit un aérostat de volume $V = 2500\ \mathrm{m}^3$ supposé constant et dont l'enveloppe, la nacelle et les passagers sont de masse totale $M = 500$ kg.

Le ballon étant ouvert dans sa partie inférieure, **la pression à l'intérieur du ballon reste égale, à tout instant, à la pression extérieure**.

La température de l'air à l'intérieur du ballon, supposée uniforme et notée T_C, est plus élevée que la température extérieure T_0 de l'atmosphère isotherme.

Au niveau du sol la pression est $P_0 = 1,00$ bar, la masse volumique de l'air est notée $\mu_0 = \mu(0)$. On note $m_0 = \mu_0 V$, la masse d'air présente dans le ballon lorsque celui-ci est posé au sol et que la température interne est encore égale à la température extérieure T_0.

Q4. On note T_C la température de l'air et μ_C la masse volumique de l'air situé à l'intérieur du ballon.
Déterminer la relation existant entre μ_C, T_C, T_0 et la masse volumique $\mu(z)$ de l'air à l'extérieur du ballon, situé à une altitude z quelconque.

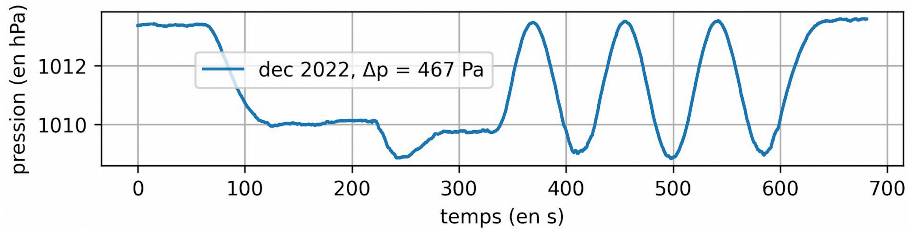
Q5. Effectuer le bilan des forces qui s'exerce sur la montgolfière.

Q6. Le ballon se trouve posé au sol ($z = 0$).
À quelle condition sur la résultante des forces, le ballon peut-il décoller ? En déduire que pour que le ballon décolle, il faut $\mu_C < \mu_0 - \dfrac{M}{V}$.
Déterminer la température minimale $T_{C_{\min}}$ devant régner dans le ballon pour que celui-ci s'élève spontanément. On pourra exprimer le résultat en fonction de T_0, m_0 et M.

Q7. L'air du ballon est chauffé jusqu'à une température $T_C > T_{C_{\min}}$.
Déterminer dans ces conditions la hauteur maximale $z_{\max}$ atteinte par le ballon. Pour cela traduire la condition sur les forces pour que le ballon redescende. Établir l'inégalité qui relie $\mu(z)$, V, T_0, T_C et M. En utilisant la loi des gaz parfaits, et l'expression de $P(z)$ dans l'atmosphère, établir une inégalité vérifiée par z.
On exprimera $z_{\max}$ en fonction de H, T_C, T_0, M et m_0.
Faire l'application numérique pour $T_C = 343$ K et $T_C = 345$ K. Commenter.

Exercice n°6 Grande roue

Lors des fêtes de Noël, une grande roue est installée dans la ville de Reims. Un physicien est monté dans une cabine de cette roue, muni d'un capteur de pression. On donne le relevé obtenu :



La différence de pression mesurée lors des oscillations est $\Delta p = 467$ Pa.

Q1. Pourquoi observe-t-on une variation de la pression quand la roue tourne ? Combien fait-elle de tours sur l'enregistrement ?

Q2. La masse molaire de l'air, considéré comme un gaz parfait, est $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. La température est de 10 °C. Estimer le diamètre de la grande roue.

Q3. Dans la phase où la roue tourne à vitesse angulaire constante, estimer la vitesse v de la cabine que l'on supposera placée sur le périmètre de la roue, ainsi que son accélération.

Exercice n°7 Océan isotherme

La masse volumique ρ de l'eau dans un océan varie avec la pression P selon la loi

$$\rho = \rho_0 \left[1 + a\left(P - P_0\right)\right]$$

où $P(z)$ et $\rho(z)$ sont la pression et la masse volumique à la surface de l'océan, en $z = 0$.

Q1. La profondeur étant notée $z > 0$, déterminer la loi $P(z)$.

Q2. Que devient cette loi pour les profondeurs « faibles» ? Préciser.

Q3. On donne $a = 10^{-10}\ \text{Pa}^{-1}$, et pour $z = 0$, $P = P_0 = 10^5$ Pa et $\rho = \rho_0 = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
Calculer P pour $z = 1$ km. Comparer en calculant l'erreur relative avec la pression obtenue en considérant l'eau comme incompressible. Commenter.

III Résolutions de problème

Exercice n°8 Cluster Ballooning

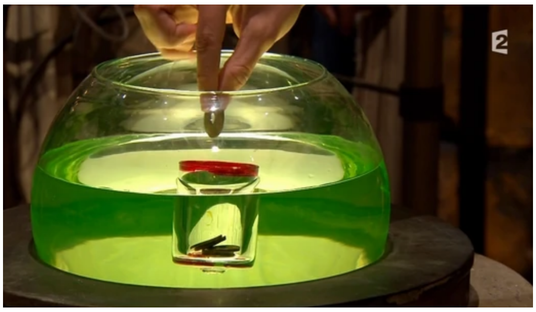
N'avez-vous jamais rêvé d'être porté dans le ciel par un énorme bouquet de ballons ? C'est le « cluster ballooning ». Le pilote porte un harnais auquel est attaché un très grand nombre de ballons de baudruche gonflés à l'hélium. Le contrôle est réalisé par le largage de lest pour monter, ou par éclatement des ballons pour descendre. Combien de ballons gonflés à l'hélium faut-il, au minimum, pour faire décoller un homme ? Et pour faire décoller une maison ?

Extrait du film "Là-Haut"

Exercice n°9 Duel de l'aquarium dans Fort-Boyard *(CCINP PSI 2024)*

Dans ce duel, le candidat et le Maître du temps ajoutent chacun à leur tour une pièce dans un verre, initialement vide, flottant dans un aquarium. Le premier à faire couler le verre a perdu.

On suppose que :



- le bocal est suffisamment profond pour que le verre puisse couler intégralement ;
- le verre reste au centre du bocal et ne touche jamais les bords ;
- le verre, de masse $M = 125$ g, est cylindrique de hauteur $h = 10$ cm et de base circulaire d'aire $S = 2,0.10^{-3}$ m^2 ;
- le fond du verre reste toujours horizontal ;
- les pièces ont une masse $m = 10$ g et font une épaisseur de $e = 2,0$ mm et sont toutes horizontales, empilées les unes sur les autres au fond du verre.

Q1. Sachant que le Maître du temps joue en premier, qui remporte le duel ?

Q2. Exprimer, puis calculer la variation d'altitude Δz du sommet de la pile de pièces par rapport à la surface de l'eau lors de l'ajout d'une pièce. Le sommet de la pile est-il monté ou descendu ?

Exercice n°10 Lanterne volante

Une lanterne volante est un très léger cylindre en papier de riz, fermé sur le dessus, dont l'air intérieur, prisonnier de la lanterne, est chauffé à la base par la combustion d'un carburant solide. La lanterne s'élève alors dans les airs.
On considère une lanterne de 100 cm de hauteur, de 60 cm de largeur, pesant 80 g.
Le très fin papier de riz est ignifugé, car la température dans la lanterne atteint les 120 °C.
Quelle est l'altitude atteinte par une lanterne volante ?