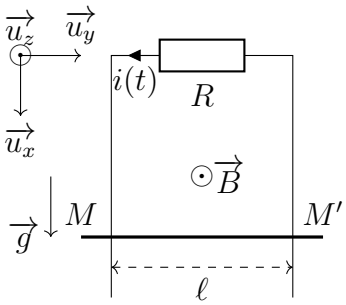
Thème I. Ondes et signaux (Induction)

TD n°25 Induction dans un circuit mobile dans un champ magnétique constant

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Rails de Laplace verticaux

Sur deux rails conducteurs fixes, constitués de deux tiges verticales et parallèles distantes de ℓ, glisse sans frottement une tige horizontale MM', de masse m, grâce à deux contacts glissants M et M'. On considère que l'axe Ox du repère est parallèle aux tiges verticales et l'axe Oy est parallèle à la tige MM'.
On négligera les résistances de la tige MM' et des rails, ainsi que le champ propre produit par les courants induits.
On produit un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$ uniforme et permanent, normal au plan du circuit formé par la tige MM' et les rails.
On note $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{u_x}$ l'accélération de la pesanteur.



Les extrémités supérieures des rails sont reliées à un résistor de résistance R. La tige MM' est abandonnée sans vitesse à l'instant $t = 0$. On désignera par $v(t)$ la norme de la vitesse de la tige et $i(t)$ l'intensité du courant dans le circuit à l'instant t.

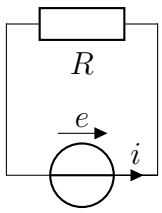
R1. Étudier qualitativement l'évolution du système.

Solution:
La tige, abandonnée sans vitesse va tomber sous l'effet de la pesanteur.
La surface du circuit augmente, donc le flux de $\overrightarrow{B}$ augmente ($\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{S}$ colinéaire de même sens).
Il se produit alors un phénomène d'induction qui se traduit par l'apparition d'une fem induite et d'un courant induit puisque le circuit est fermé.
La tige, traversée par un courant électrique et plongée dans un champ magnétique va être soumise à la force de Laplace.
D'après la loi de Lenz, la force de Laplace s'oppose à la cause du phénomène d'induction, c'est-à-dire la mise en mouvement due à la gravité. La force de Laplace sera donc dirigée selon $-\overrightarrow{u_x}$ et va tendre à ralentir la chute. Elle tend à limiter l'augmentation de la surface du circuit, cause du phénomène d'induction.
La vitesse de chute de la tige va augmenter jusqu'à ce que la force de Laplace compense le poids, la chute se fera alors à vitesse constante, la force de Laplace agissant comme une force de frottement fluide.

R2. Déterminer la force électromotrice e induite dans la tige MM'. En déduire l'équation électrique du montage.

Solution:
Flux de $\overrightarrow{B}$: $\varphi = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S} = B\ell x(t)$
D'après la loi de Faraday : $\boxed{e = -\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -B\ell v}$

On représente le circuit électrique équivalent.
D'après la loi des mailles : $e = Ri$
Ainsi : $\boxed{Ri = -B\ell v}$ (EE)



R3. Établir l'équation mécanique du système.

Solution:
Système : Tige MM'
Référentiel : référentiel terrestre considéré galiléen
Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\overrightarrow{g} = mg\overrightarrow{u_x}$
- réaction du support, perpendiculaire au support
- force de Laplace :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{\mathscr{L}}} &= \int_M^{M'} i\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B} \\ &= \int_M^{M'} i\mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} \wedge B\overrightarrow{u_z} \\ &= iB\int_0^{\ell} \mathrm{d}y\overrightarrow{u_x} \\ &= i\ell B\overrightarrow{u_x}\end{aligned}$$

On applique le PFD à la tige : $m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{F_{\mathscr{L}}}$
Selon $\overrightarrow{u_x}$: $\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg + i\ell B}$ (EM)

R4. En déduire l'équation différentielle en $i(t)$ puis celle en $v(t)$. Montrer que i et v tendent vers une valeur limite que l'on précisera.

Solution:
D'après (EE) : $i = -\dfrac{B\ell}{R}v$, que l'on injecte dans (EM)
$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \dfrac{(B\ell)^2}{R}v$, soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(B\ell)^2}{Rm}v = g}$
La vitesse va tendre vers la valeur constante v_f, telle que $\dfrac{(B\ell)^2}{Rm}v_f = g$, soit $\boxed{v_f = \dfrac{Rmg}{(B\ell)^2}}$
Or $v = -\dfrac{Ri}{B\ell}$, donc l'équation vérifiée par i s'écrit : $-\dfrac{R}{B\ell}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(B\ell)^2}{Rm} \times -\dfrac{Ri}{B\ell} = g$
Soit : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(B\ell)^2}{Rm}i = -\dfrac{B\ell g}{R}}$
L'intensité tend vers la valeur finale : $\boxed{i_f = -\dfrac{mg}{B\ell} = -\dfrac{B\ell}{R}v_f}$

R5. Déterminer complètement les expressions de $i(t)$ et de $v(t)$.

Solution:
On pose $\tau = \dfrac{Rm}{(B\ell)^2}$
On résout l'équation en v : $v(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + v_f$
Or, à $t = 0$, $v(0) = 0$, donc $\boxed{v(t) = v_f\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$
ainsi $\boxed{i(t) = i_f\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) < 0}$: le courant induit étant négatif dans le sens indiqué, le champ magnétique induit est selon $-\overrightarrow{u_z}$ et donc de sens opposé à $\overrightarrow{B}$. Le champ induit s'oppose donc à l'augmentation du flux du champ magnétique dû à l'augmentation de la surface du circuit.

R6. Établir le bilan de puissance. Comparer la puissance de la force de Laplace et la puissance électrique de la fem induite. Conclure sur la conversion électromagnétique.

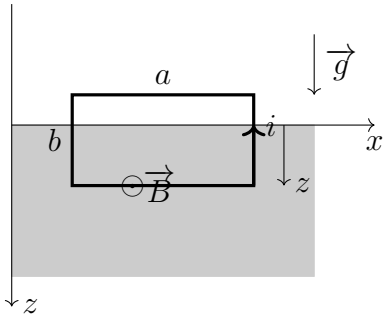
Solution:

$$\begin{aligned}
(\text{EM}) : m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= mg + i\ell B \\
(\text{EM}) \times v \ : \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v &= mgv + i\ell Bv \\
(\text{EE}) : Ri &= -B\ell v \\
(\text{EE}) \times i \ : \quad Ri^2 &= -B\ell vi \\
\text{EM} \times v + (\text{EE}) \times i \ : \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v + Ri^2 &= mgv \\
\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} + Ri^2 &= mg\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} &= -Ri^2 - \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{pp}}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{pp}}{\mathrm{d}t} &= -Ri^2 \\
\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t} &= -Ri^2
\end{aligned}$$

L'énergie mécanique du système diminue.
La conversion électromagnétique est parfaite : $\mathscr{P}_{\mathscr{L}} + \mathscr{P}(fem) = 0$

Exercice n°2 Freinage par induction

La plupart des manèges des parcs d'attraction utilisent des dispositifs de freinage inductif en plus du freinage par friction. On modélise dans cet exercice une attraction proposant aux passagers d'une cabine d'ascenseur de tomber en chute quasi-libre pendant quelques secondes avant d'être brutalement freinés. La première étape du freinage est magnétique.



Dans le châssis de la cabine d'ascenseur est placée un bobinage conducteur modélisé par une unique spire rectangulaire de côtés a et b, de masse m et de résistance R. Sa position est repérée par la cote z du bas de la spire. Dans le demi-espace $z > 0$ règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et permanent.
À l'instant $t = 0$, la cabine se trouve dans la situation représentée sur la figure ci-contre où $z = 0$, sa vitesse valant alors $\vec{v} = v_0\vec{u_x}$.
Pour simplifier, les frottements de l'air seront négligés dans tout l'exercice.

R1. Montrer que le mouvement ultérieur de la cabine reste une translation verticale selon l'axe (Oz).

Solution: La cabine est soumise à deux forces : son poids, porté par Oz et la force de Laplace portée également par Oz, par conséquent le mouvement ultérieur reste une translation selon (Oz).

R2. Établir une équation différentielle portant sur la vitesse v de la cabine.

Solution: La résultante de Laplace s'exerçant sur les deux côtés verticaux se compensent.
Le côté supérieur n'est pas plongé dans le champ magnétique tant que $z < b$, donc n'est pas soumis à la force de Laplace.
La force de Laplace s'exerçant sur le côté inférieur vaut donc :

$$\begin{aligned}
\vec{F_{\mathscr{L}}} &= \int_0^a i\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} \\
&= aiB\vec{u_z}
\end{aligned}$$

Le PFD sur le cadre donne :

$$\begin{aligned} m\overrightarrow{a} &= \overrightarrow{F_{\mathscr{L}}} + m\overrightarrow{g} \\ m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= aiB + mg \quad (EM) \end{aligned}$$

Il nous faut également une équation électrique qui relie $\dot{x}$ à i.
Fem induite :

$$\begin{aligned} e &= -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \\ e &= -\frac{\mathrm{d}(az)}{\mathrm{d}t} \\ &= -Ba\dot{z} \\ &= -Bav \end{aligned}$$

Le circuit électrique équivalent, avec la loi des mailles donne $e = Ri$, soit $\boxed{-Ba\dot{x} = Ri}$ (EE)
On peut alors combiner les deux équations pour obtenir :

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\frac{B^2a^2v}{R} + mg \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2a^2}{mR}v &= g \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} &= g \end{aligned}$$

avec $\tau = \dfrac{mR}{B^2a^2}$

R3. Résoudre cette équation. Que se passe-t-il lorsque $z = b$?

Solution: $v(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + g\tau$
or $v(0) = v_0 = K + g\tau$
Ainsi $\boxed{v(t) = (v_0 - g\tau)e^{-\frac{t}{\tau}} + g\tau}$
Quand $z = b$, le cadre est entièrement plongé dans $\overrightarrow{B}$ et le flux ne varie plus. Il n'y a plus d'induction, le courant devient nul, et la force de Laplace également.
Il n'y a plus de freinage, et le mouvement devient accéléré (par le poids !).

R4. Justifier qu'un freinage magnétique ne peut pas suffire à arrêter la cabine d'ascenseur.

Solution: v peut devenir faible mais pas rigoureusement s'annuler, et le freinage est de moins en moins efficace au fur et à mesure du ralentissement.

II Exercices d'approfondissement

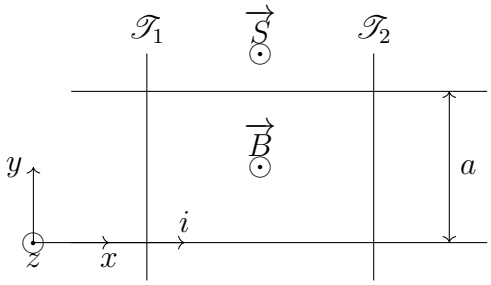
Exercice n°3 Rails de Laplace couplés *(D'après Oral Banque PT 2018)*

On considère deux barreaux $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ de résistance R et de masse m posés sur un rail et plongés dans un champ magnétique uniforme B.

À $t = 0$, on applique à $\mathscr{T}_1$ une vitesse v_0.

R1. Mener une analyse physique de l'évolution du système.

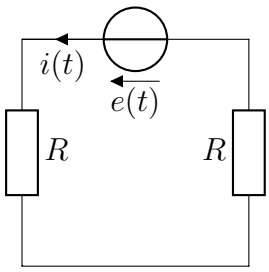
Solution: Commençons par une analyse qualitative !
La tige $\mathscr{T}_1$ est mise en mouvement, ce qui provoque une variation du flux du champ magnétique à travers le circuit (par variation de la surface du circuit). Il se produit un phénomène d'induction qui se traduit par l'apparition d'un courant électrique à travers le circuit. $\mathscr{T}_2$ et $\mathscr{T}_1$ sont alors soumises à la force de Laplace, qui s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance, c'est-à-dire à la diminution de la surface. $\overrightarrow{F_{\mathscr{L},1}}$ est dirigée dans le sens opposé à $\overrightarrow{v_0}$ (elle tend à freiner la barre qui a été mise en mouvement) et $\overrightarrow{F_{\mathscr{L},2}}$ dans le sens de $\overrightarrow{v_0}$ (elle met en mouvement la barre $\mathscr{T}_2$).



R2. Établir les équations couplées vérifiées par $v_1(t)$ et $v_2(t)$, on fera apparaître la grandeur $\dfrac{mR}{(aB)^2}$.

Solution: On négligera le phénomène d'auto-induction car le circuit est constitué d'une unique spire.

— **Équation électrique**
Fem induite : $e = -\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, avec $\varphi = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S} = Ba(x_2(t) - x_1(t))$, ainsi $\boxed{e = -Ba(v_2(t) - v_1(t))}$
Circuit équivalent :



Loi des mailles : $e = 2Ri$, soit $\boxed{-Ba(v_2(t) - v_1(t)) = 2Ri}$

— **Équations mécaniques** : il en faut 2 !
On se place dans le référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Système : $\mathscr{T}_1$ de masse m
Bilan des actions mécaniques : poids, réactions normales, force de Laplace $\overrightarrow{F_{\mathscr{L},1}} = -iaB\overrightarrow{e_x}$
PFD à $\mathscr{T}_1$ dans le référentiel terrestre : $m\overrightarrow{a_1} = m\vec{g} + \overrightarrow{R_{N1}} + \overrightarrow{F_{\mathscr{L},1}}$
En projection selon $\overrightarrow{e_x}$: $m\ddot{x}_1 = -iaB$, soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{aB}{m}i}$ (EM1)

— Système : $\mathscr{T}_2$ de masse m
Bilan des actions mécaniques : poids, réactions normales, force de Laplace $\overrightarrow{F_{\mathscr{L},2}} = +iaB\overrightarrow{e_x}$
PFD à $\mathscr{T}_2$ dans le référentiel terrestre : $m\overrightarrow{a_2} = m\vec{g} + \overrightarrow{R_{N1}} + \overrightarrow{F_{\mathscr{L},2}}$
En projection selon $\overrightarrow{e_x}$: $m\ddot{x}_2 = +iaB$, soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{aB}{m}i}$ (EM2)

Nous avons trois équations différentielles couplées vérifiées par v_1, v_2 et i.
On peut exprimer i à partir de l'équation électrique et l'injecter dans les deux équations mécaniques pour obtenir deux équations couplées vérifiées par v_1 et v_2.
(EE) : $i = \dfrac{-Ba}{2R}(v_2 - v_1)$
Ainsi dans (EM1) : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{(aB)^2}{2Rm}(v_2 - v_1)}$ et dans (EM2) : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{(aB)^2}{2Rm}(v_2 - v_1)}$

R3. Établir les expressions de $v_1(t)$ et de $v_2(t)$.

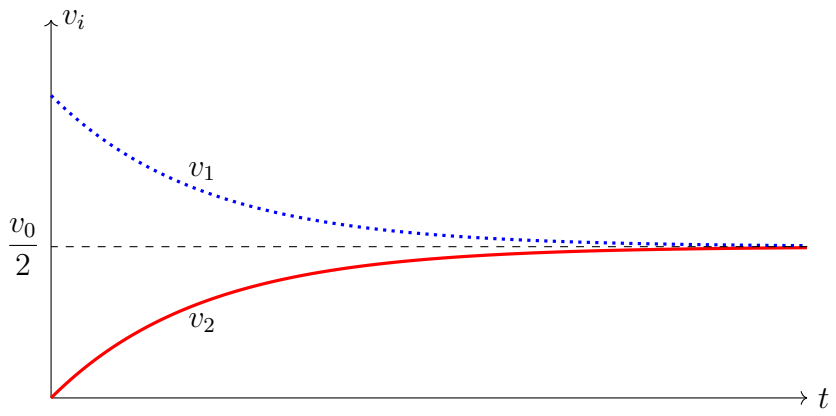
Solution:

D'après les PFD on remarque que $\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}$,
donc $v_1(t) = -v_2(t) + K$,
où K est une constante que l'on détermine à l'aide des conditions initiales : $v_1(0) = v_0$ et $v_2(0) = 0$.
ainsi $\boxed{v_1 = v_0 - v_2}$ (*), que l'on injecte dans (EM1) (par exemple).
$-\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{(aB)^2}{2Rm}(2v_2 - v_0)$, soit $\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(aB)^2}{Rm}v_2 = \dfrac{(aB)^2}{2Rm}v_0$
On pose $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{(aB)^2}{Rm}$, soit $\boxed{\tau = \dfrac{mR}{(aB)^2}}$

que l'on résout : $v_2(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \dfrac{v_0}{2}$, avec $v_2(0) = 0$, on trouve $\boxed{v_2(t) = \dfrac{v_0}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$, qui est donc bien positive si $v_0 > 0$ (cf analyse physique).

Pour v_1 on trouve immédiatement en utilisant (*) $\boxed{v_1(t) = \dfrac{v_0}{2}\left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$: la vitesse de $\mathscr{T}_1$ diminue bien au cours du temps (cf analyse physique : la force de Laplace la freine).

Au bout d'un temps supérieur à quelques τ, les deux tiges se déplacent avec un vecteur vitesse $\dfrac{v_0}{2}\overrightarrow{u_x}$. Il ne se produira plus de phénomène d'induction, car le flux du champ magnétique à travers le circuit sera constant, les deux barreaux se déplaçant à la même vitesse.



R4. Vérifier que la conversion d'énergie est parfaite.

Solution:
Bilan de puissance :

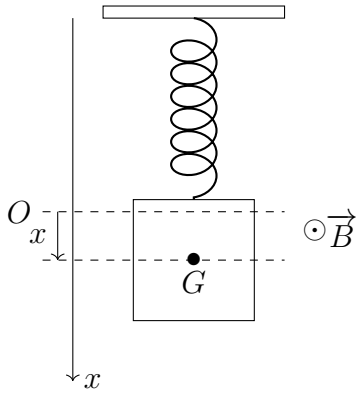
- (EE)$\times i$: $-Ba(v_2(t) - v_1(t))i = 2Ri^2$
- (EM1)$\times v_1$: $m\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} \times v_1 = -\dfrac{aB}{m}i \times v_1$
- (EM2)$\times v_2$: $m\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} \times v_2 = \dfrac{aB}{m}i \times v_2$

En sommant les deux bilans de puissance mécanique : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}mv_1^2 + \dfrac{1}{2}mv_2^2\right) = \dfrac{aB}{m}i(v_2 - v_1)$
Le terme de droite correspond à la puissance des deux forces de Laplace et il est égal à l'opposé de la puissance de la fem induite : $\boxed{\mathscr{P}_{\mathscr{L}} = -\mathscr{P}_{\text{élec}}(fem)\text{, la conversion d'énergie est donc parfaite.}}$

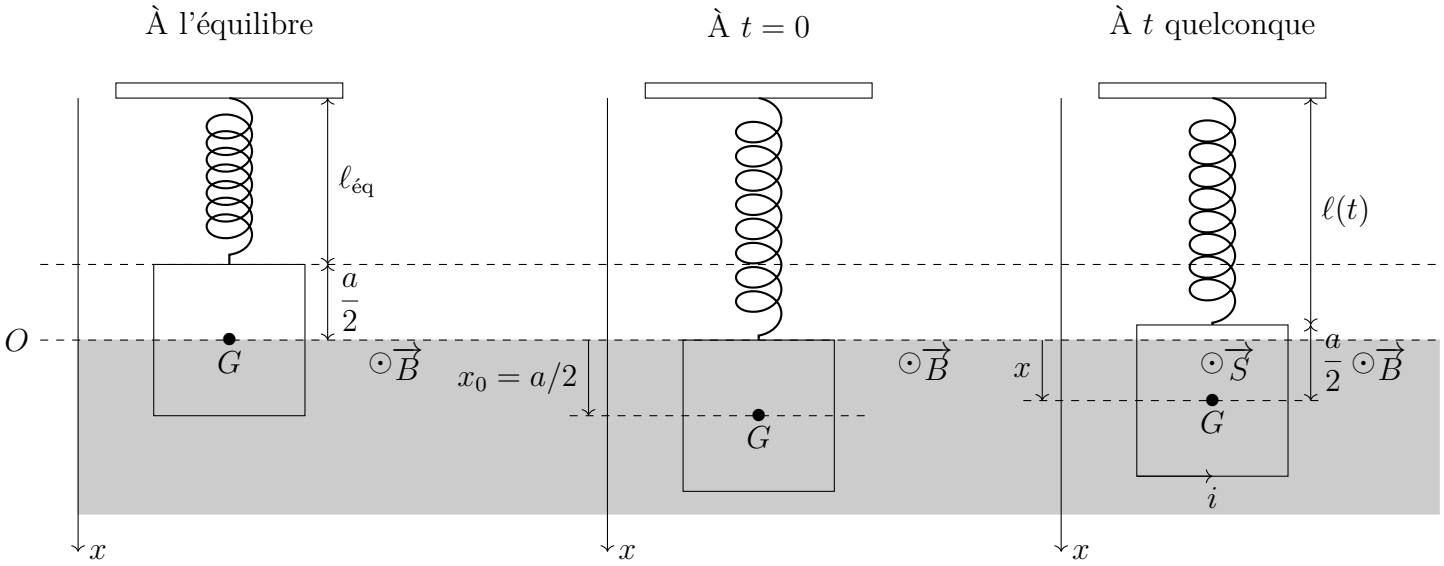
Le bilan final donne : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}mv_1^2 + \dfrac{1}{2}mv_2^2\right) + 2Ri^2 = 0}$

Exercice n°4 Cadre *(D'après Oral Mines-Pont 2018)*

On considère un cadre de cuivre filiforme suspendu à un ressort de raideur k. Le cadre est carré de coté a, de centre G, de masse m et de résistance R. À l'équilibre, la moitié inférieure du cadre est plongée dans un champ $\overrightarrow{B}$ uniforme stationnaire de norme B. On n'étudie que le mouvement vertical du cadre.
L'origine O de l'axe (Ox) vertical descendant est prise à la position d'équilibre du cadre.
À l'instant initial , on descend le cadre vers le bas d'une distance $a/2$.
Mener l'analyse physique de l'évolution du système, puis établir l'équation différentielle du mouvement.

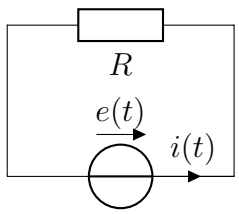


Solution: Analyse physique :
À $t = 0$ on étire le ressort à partir de sa position d'équilibre. Le cadre se met donc à osciller, le champ magnétique n'est présent que pour $x > 0$, donc lors des oscillations, la surface traversée par les lignes de champ magnétique varie, donc le flux du champ magnétique varie. Par conséquent, il se produit un phénomène d'induction qui se traduit par l'apparition d'un courant induit dans le cadre.
Le cadre, parcouru par un courant électrique et plongé dans un champ magnétique est alors soumis à la force de Laplace, qui s'oppose à la cause qui lui a donné naissance : le mouvement. Par conséquent, la force de Laplace sera opposée au vecteur vitesse, elle se comportera comme une force de frottement fluide.



$\forall t \;\; x(t) \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$

Équation électrique :
Fem induite donnée par la loi de Faraday : $e = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, avec φ le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers la surface du cadre plongée dans le champ magnétique. On négligera le phénomène d'auto-induction car le cadre n'est composé que d'une seule spire.
ATTENTION le champ magnétique est nul pour $x < 0$ et non nul pour $x > 0$.
La surface du cadre plongé dans le champ magnétique s'écrit : $S = a \times \left(\frac{a}{2} + x\right)$
Ainsi $\varphi = B \times a \times \left(\frac{a}{2} + x\right)$, soit $\boxed{e = -Ba\dot{x}}$
Circuit équivalent :



Loi des mailles : $e = Ri$, soit $\boxed{Ri = -Ba\dot{x}}$ (EE)

Équation mécanique :
Système : cadre de masse m et de centre d'inertie G
Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques :

— poids $m\overrightarrow{g}$

— force de rappel élastique : $\overrightarrow{f_{\text{él}}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{e_x}$, avec $\ell(t) + \dfrac{a}{2} = \ell_{\text{éq}} + x(t) + \dfrac{a}{2}$, soit $\ell(t) = \ell_{\text{éq}} + x(t)$

— force de Laplace : $\overrightarrow{F_{\mathscr{L}}} = \oint_{\text{cadre}} i\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B}$

ATTENTION : il ne faut intégrer que sur les segments où $\overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0}$, et il faut bien intégrer dans le sens du courant sur le segment.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_{\mathscr{L}}} &= \underbrace{\int_0^a i\mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} \wedge B\overrightarrow{u_z}}_{\text{segment inférieur}} + \underbrace{\int_{x+\frac{a}{2}}^0 i\mathrm{d}x\overrightarrow{u_y} \wedge B\overrightarrow{u_z}}_{\text{segment droit pour } x>0} + \underbrace{\int_a^0 i\mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} \wedge \overrightarrow{0}}_{\text{segment supérieur}} + \underbrace{\int_0^{x+\frac{a}{2}} i\mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} \wedge B\overrightarrow{u_z}}_{\text{segment gauche pour } x>0} \\
&= iBa\overrightarrow{u_x} - iB\left(a + \frac{x}{2}\right)\overrightarrow{u_y} + 0 + iB\left(a + \frac{x}{2}\right)\overrightarrow{u_y} \\
\overrightarrow{F_{\mathscr{L}}} &= iaB\overrightarrow{u_x}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\overrightarrow{F_{\mathscr{L}}} = iaB\overrightarrow{u_x}}$

PFD au cadre : $m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f_{\text{él}}} + \overrightarrow{F_{\mathscr{L}}}$
En projection selon $\overrightarrow{u_x}$: $m\ddot{x} = mg - k\left(x(t) + \ell_{\text{éq}} - \ell_0\right) + iaB$
À l'équilibre (donc en l'absence de courant, car si le cadre est immobile, il n'y a pas de phénomène d'induction) : $mg - k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0$, soit $\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}$ (à l'équilibre $x = 0$ vu sa définition).
Ainsi $\boxed{m\ddot{x} + kx = iaB}$ (EM)

En combinant les deux équations (EE) et (EM) : $m\ddot{x} + kx = (aB) \times \dfrac{-Ba}{R}\dot{x}$,

On obtient l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur amorti $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{(aB)^2}{mR}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0}$
Le terme d'amortissement provient de la force de Laplace, qui joue bien ici de rôle de force de frottement.

Exercice n°5 Haut-parleur *(E3A 2021 ; CCINP 2019&2020 ; Mines-Pont 2018 = LE classique)*

Les enceintes acoustiques d'une patinoire comportent chacune plusieurs haut-parleurs pour restituer toutes les plages de fréquences audibles de manière optimale.

Le schéma d'un haut-parleur est donné en figure 1. Il est constitué :

— d'un aimant fixe d'axe (Oz) créant un champ magnétique radial permanent $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_r}$ (figure 2) où B est la norme du champ magnétique supposée constante en tous points de l'entrefer et $\overrightarrow{u_r}$ est un vecteur unitaire dirigé selon le rayon de la bobine mobile et perpendiculaire à l'axe (Oz) ;

— d'une bobine d'axe (Oz) comportant N spires de rayon a et située dans l'entrefer de l'aimant. La longueur totale du bobinage est notée ℓ ;

— d'une membrane solidaire de la bobine.

L'ensemble { bobine + membrane } est un solide de masse m, mobile en translation selon l'axe (Oz). Le spider et la suspension exercent sur cet ensemble une force de rappel élastique vers la position d'équilibre $z = 0$:

$$\overrightarrow{F_e} = -kz\overrightarrow{u_z}$$

Cet ensemble est également soumis à une force de frottement visqueux de la part de l'air de la forme :

$$\overrightarrow{F} = -f\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_z}$$

où f et k sont des constantes.
Le vecteur $\overrightarrow{u_z}$ est un vecteur unitaire dirigé selon l'axe z et orienté dans le sens des z positifs.
La bobine est alimentée par un générateur extérieur délivrant la tension $u(t)$. Il apparaît un courant $i(t)$ dans la bobine orienté dans le sens indiqué sur la figure 2.

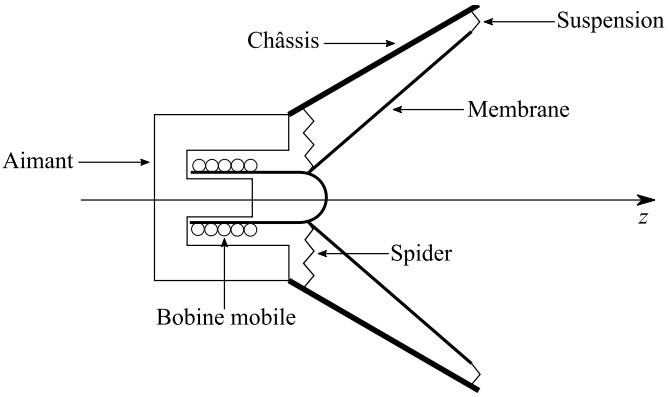


FIGURE 1 – Schéma en coupe d'un haut-parleur

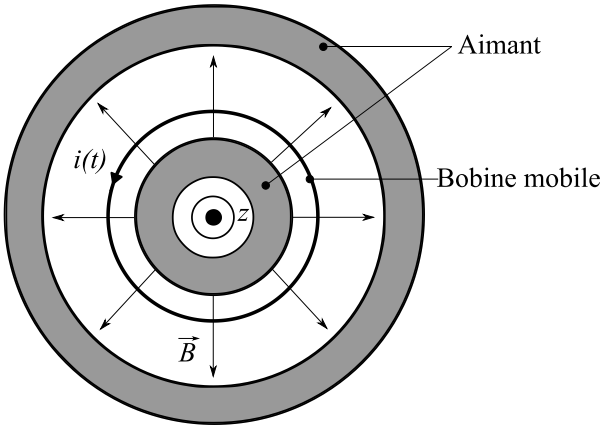


FIGURE 2 – Schéma en coupe d'un haut-parleur

R1. Expliquer, sans calcul, le principe de fonctionnement d'un haut-parleur électrodynamique.

R2. Déterminer l'expression vectorielle de la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur la bobine en fonction de l'intensité du courant $i(t)$, du nombre de spires N, du rayon a d'une spire et de la norme du champ magnétique B.

R3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe (Oz) pour en déduire l'équation mécanique qui sera notée (1).

R4. La bobine mobile étant dans un champ magnétique permanent, la puissance des forces de Laplace et celle de la force électromotrice induite se compensent exactement. En déduire que l'expression de la force électromotrice $e(t)$ induite par le mouvement de la bobine à la vitesse $v(t)$ dans le champ magnétique est donnée par la relation :

$$e(t) = 2\pi NaBv(t)$$

R5. L'ensemble du circuit mobile possède une résistance électrique R et une inductance propre L. Représenter le schéma électrique équivalent du circuit mobile.

R6. En déduire l'équation électrique du système notée (2).

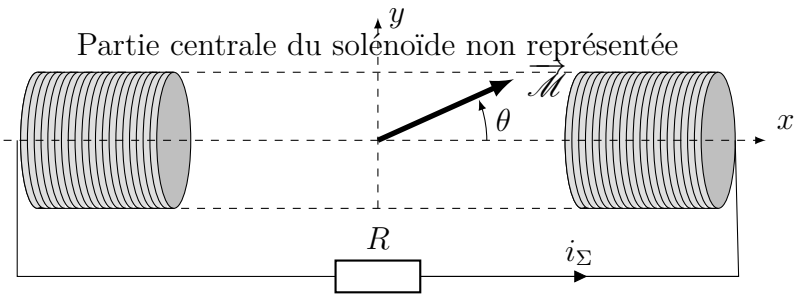
R7. Le générateur extérieur délivre une tension $u(t) = u_0 \cos \omega t$. À partir des équations (1) et (2), à réécrire en notations complexes, montrer que l'expression de l'impédance électrique totale du circuit notée $\underline{Z}$ est donnée par la relation :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{(2\pi Na)^2 B^2}{mj\omega + \frac{k}{j\omega} + f} + R + jL\omega.$$

R8. Pourquoi le fait d'associer plusieurs haut-parleurs permet-il de restituer toutes les plages de fréquences audibles de manière optimale dans l'enceinte de la patinoire ?

Exercice n°6 Alternateur

Un aimant de moment magnétique $\overrightarrow{\mathscr{M}}$, contenu dans le plan (Oxy), tourne sans frottement autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante $\overrightarrow{\omega} = \omega_0 \overrightarrow{u_z}$. Le moment d'inertie de l'aimant par rapport à l'axe (Oz) est noté J. Un opérateur extérieur applique un couple $\overrightarrow{\Gamma_{\text{op}}}$ à l'aimant. L'angle que fait l'aimant avec l'axe (Ox) est noté θ. L'axe (Oz) et l'aimant sont placés dans un solénoïde Σ contenant n spires par unité de longueur, d'axe (Ox), de résistance électrique r, d'inductance propre L. Σ est fermé sur une résistance R, très supérieure à r. L'ensemble modélise, par exemple, un alternateur de bicyclette qui débite dans une ampoule. L'opérateur est alors la personne qui pédale.



R1. Analyser sans calcul le phénomène et expliquer pourquoi l'opérateur doit appliquer le couple supplémentaire $\overrightarrow{\Gamma_{\text{op}}}$ à l'aimant pour maintenir sa vitesse constante ω_0.

Solution: L'aimant, qui crée un champ magnétique permanent, est en mouvement dans la bobine. Le flux du champ magnétique de l'aimant $\overrightarrow{B_a}$ à travers la bobine est donc variable. Il se produit un phénomène d'induction qui se traduit par l'apparition d'un courant électrique au sein de la bobine. Il y a donc bien conversion d'énergie mécanique en énergie électrique.

La bobine crée donc un champ magnétique (proportionnel au courant induit qui circule dedans), qui va exercer une action mécanique sur l'aimant qui va s'opposer, d'après la loi de Lenz, à la cause qui lui a donné naissance, c'est-à-dire le mouvement de l'aimant. L'opérateur doit donc exercer une action mécanique supplémentaire pour maintenir la vitesse de rotation constante.

R2. L'instant origine $t = 0$ est choisi au moment où l'aimant est suivant $\overrightarrow{u_x}$, c'est-à-dire pour $\theta = 0$. En déduire le lien entre θ et ω_0.

Solution: Immédiatement, on trouve $\boxed{\theta(t) = \omega_0 t}$

R3. L'aimant, de moment magnétique $\overrightarrow{\mathscr{M}} = \mathscr{M}\overrightarrow{n}$, peut être assimilé à une spire fictive de vecteur surface $\overrightarrow{S} = S\overrightarrow{n}$.

Établir le flux du champ magnétique du solénoïde à travers la spire fictive. En déduire le coefficient de mutuelle induction M entre le solénoïde et la spire fictive.

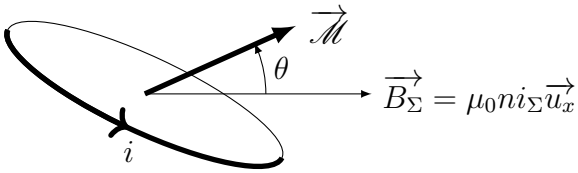
En déduire le flux du champ magnétique de l'aimant dans le solénoïde puis la f.é.m. induite dans le solénoïde lors de la rotation de l'aimant.

Solution:

REMARQUES

Cette question introduit la spire de courant plane comme « artifice de calcul » permettant de déterminer le flux du champ magnétique créé par l'aimant à travers la bobine. Le champ magnétique créé par l'aimant est inconnu, et non uniforme, son flux à travers la bobine n'est pas calculable.
L'idée est donc de :

- Remplacer l'aimant par une spire plane $\mathscr{S}$ de même moment magnétique.
- Utiliser le fait que $\varphi_{\mathscr{S}\to\Sigma} = Mi$, où i est le courant qui circule dans la spire, tel que $\overrightarrow{\mathscr{M}} = i\overrightarrow{S} = iS\overrightarrow{n}$ et $\varphi_{\Sigma\to\mathscr{S}} = Mi_\Sigma$
- Déterminer M en exprimant le flux du champ magnétique créé par la bobine à travers la spire, $\varphi_{\Sigma\to\mathscr{S}}$



Flux du champ créé par la bobine à travers la spire :
$\varphi_{\Sigma\to\mathscr{S}} = \overrightarrow{B_\Sigma} \cdot \overrightarrow{S} = \mu_0 n i_\Sigma \overrightarrow{u_x} \cdot S\overrightarrow{n}$,
soit $\boxed{\varphi_{\Sigma\to\mathscr{S}} = \mu_0 n i_\Sigma \cos(\theta) S}$
On identifie le coefficient d'inductance mutuelle : $\boxed{M = \mu_0 n \cos(\theta) S}$

Ainsi on en déduit le flux du champ magnétique créé par la spire à travers la bobine :

$\varphi_{\mathscr{S}\to\Sigma} = Mi = \mu_0 n\cos(\theta)Si$, soit $\boxed{\varphi_{\mathscr{S}\to\Sigma} = \mu_0 n\cos(\theta)\mathscr{M}}$

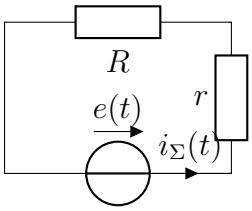
Fem induite dans le solénoïde due à la rotation de l'aimant $\boxed{e_{\text{ext}} = -\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathscr{S}\to\Sigma}}{\mathrm{d}t} = \mu_0 n\mathscr{M}\dot{\theta}\sin(\theta)}$, avec $\dot{\theta} = \omega_0$ et $\theta = \omega_0 t$

Le courant circulant dans la bobine dépend du temps, il se produit donc un phénomène d'auto-induction. Il faut donc également prendre en compte le flux propre $\varphi_P = Li_\Sigma$

Ainsi $\boxed{e = \mu_0 n\mathscr{M}\omega_0\sin(\omega_0 t) - L\dfrac{\mathrm{d}i_\Sigma}{\mathrm{d}t}}$

R4. Écrire l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'intensité $i_\Sigma(t)$ du courant dans le solénoïde. On posera $\tau = \dfrac{L}{R}$. Établir l'expression de $i_\Sigma(t)$ en régime sinusoïdal établi sous la forme :
$i_\Sigma(t) = \dfrac{\mu_0 n\mathscr{M}\omega_0}{R\sqrt{1+\alpha^2}}\sin\big(\omega_0 t - \arctan(\alpha)\big)$, où α est un terme à exprimer en fonction de τ et ω_0.

Solution:
Circuit équivalent :



Loi des mailles : $e = (R+r)i_\Sigma$, soit $\mu_0 n\mathscr{M}\omega_0\sin(\theta) - L\dfrac{\mathrm{d}i_\Sigma}{\mathrm{d}t} = (R+r)i_\Sigma$

Soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i_\Sigma}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R+r}{L}i_\Sigma = \dfrac{\mu_0 n\mathscr{M}\omega_0}{L}\sin(\omega_0 t)}$

On peut poser $\tau = \dfrac{L}{R+r} \approx \dfrac{L}{R}$, avec $R \gg r$.

Le second membre est sinusoïdal, donc une fois le régime sinusoïdal établi $i_\Sigma(t) = I_\Sigma\sin(\omega_0 t + \Phi)$

On utilise la notation complexe (à la pulsation ω_0), : $j\omega_0\underline{i_\Sigma} + \dfrac{\underline{i_\Sigma}}{\tau} = \dfrac{\mu_0 n\mathscr{M}\omega_0}{L}e^{j\omega_0 t}$

Soit $\underline{i_\Sigma} = \dfrac{\dfrac{\mu_0 n\mathscr{M}\omega_0\tau}{L}}{1+j\omega_0\tau}e^{j\omega_0 t}$, avec $\dfrac{\tau}{L} = \dfrac{1}{R}$

Amplitude : $I_\Sigma = |\underline{\underline{i_\Sigma}}| = \dfrac{\mu_0 n\mathscr{M}\omega_0}{R\sqrt{1+(\omega_0\tau)^2}}$

Phase à l'origine des temps : $\Phi = \arg\left(\dfrac{\dfrac{\mu_0 n\mathscr{M}\omega_0\tau}{L}}{1+j\omega_0\tau}\right)$

Soit $\Phi = -\arctan(\omega_0\tau)$

Ainsi en posant $\boxed{\alpha = \omega_0\tau}$, on obtient bien la forme demandée : $\boxed{i_\Sigma(t) = \dfrac{\mu_0 n\mathscr{M}\omega_0}{R\sqrt{1+\alpha^2}}\sin\big(\omega_0 t - \arctan(\alpha)\big)}$

R5. Calculer le couple exercé sur l'aimant. En déduire une équation sur la vitesse angulaire de l'aimant, puis l'expression du couple moyen $\langle\overrightarrow{\Gamma_{\text{op}}}\rangle$ que doit exercer l'opérateur pour maintenir constante la vitesse angulaire de l'aimant. On utilisera : $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Solution: Couple exercé sur l'aimant : $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mathscr{M}} \wedge \overrightarrow{B_\Sigma} = -\mathscr{M}B_\Sigma\sin(\theta)\overrightarrow{u_z}$

Soit $\boxed{\overrightarrow{\Gamma} = -\dfrac{\mu_0 n\mathscr{M}^2\omega_0}{R\sqrt{1+\alpha^2}}\sin\big(\omega_0 t - \arctan(\alpha)\big)\sin(\omega_0 t)\overrightarrow{u_z}}$

L'aimant est soumis aux actions mécaniques :

- poids, donc le moment par rapport à l'axe (Oz) est nul ;
- action de la liaison pivot, que l'on va considérer comme parfaite, donc de moment nul par rapport à (Oz) ;

— action de l'opérateur $\overrightarrow{\Gamma_{\text{op}}}$

— action $\overrightarrow{\Gamma}$

Pour maintenir la vitesse de rotation constante, il est nécessaire que : $\overrightarrow{\Gamma_{\text{op}}} + \overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{0}$

Ainsi $\left\langle \overrightarrow{\Gamma_{\text{op}}} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{\Gamma} \right\rangle = \left\langle \dfrac{\mu_0 n \mathscr{M}^2 \omega_0}{R\sqrt{1+\alpha^2}} \sin\left(\omega_0 t - \arctan(\alpha)\right) \sin(\omega_0 t) \right\rangle$

Avec $\sin\left(a\right)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)$

Soit $\left\langle \overrightarrow{\Gamma_{\text{op}}} \right\rangle = \dfrac{\mu_0 n \mathscr{M}^2 \omega_0}{2R\sqrt{1+\alpha^2}} \Big\langle \cos(-\arctan(\alpha)) - \cos(2\omega_0 t - \arctan(\alpha)) \Big\rangle \overrightarrow{u_z}$

Ainsi $\left\langle \overrightarrow{\Gamma_{\text{op}}} \right\rangle = \dfrac{\mu_0 n \mathscr{M}^2 \omega_0}{2R\sqrt{1+\alpha^2}} \cos(\arctan(\alpha)) \overrightarrow{u_z}$

Avec la formule fournie par l'énoncé, on trouve : $\boxed{\left\langle \overrightarrow{\Gamma_{\text{op}}} \right\rangle = \dfrac{\mu_0 n \mathscr{M}^2 \omega_0}{2R(1+\alpha^2)} \overrightarrow{u_z}}$

R6. Mener un bilan énergétique commenté.

Solution:

Équation électrique $\times i_\Sigma$: $R i_\Sigma^2 + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2} L i_\Sigma^2\right) = \mu_0 n \mathscr{M} \omega_0 \sin(\omega_0 t) i_\Sigma$

Équation mécanique $\times \omega_0$: $\Gamma_{\text{op}} \times \omega_0 + \Gamma \times \omega_0 = 0$, soit $\Gamma_{\text{op}} \times \omega_0 - \mathscr{M}(\mu_0 n i_\Sigma)\sin(\theta) \times \omega_0 = 0$

On retrouve le fait que la puissance de l'action mécanique du champ magnétique $-\mathscr{M}(\mu_0 n i_\Sigma)\sin(\theta) \times \omega_0$ est l'opposée de la puissance de la fem extérieur $\mu_0 n \mathscr{M} \omega_0 \sin(\omega_0 t) i_\Sigma$: la conversion est donc parfaite.

Le bilan complet devient : $\Gamma_{\text{op}} \times \omega_0 - R i_\Sigma^2 - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2} L i_\Sigma^2\right) = 0$

Soit $\boxed{\Gamma_{\text{op}} \times \omega_0 = R i_\Sigma^2 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2} L i_\Sigma^2\right)}$

La puissance mécanique fournie par l'opérateur extérieur est convertie en puissance électrique reçue par l'ampoule et en puissance stockée sous forme magnétique dans la bobine.

R7. L'opérateur cesse son action à $t = 0$: $\overrightarrow{\Gamma_{\text{op}}}(t \geq 0) = \overrightarrow{0}$. Expliquer sans calcul ce qui se passe.

Solution:

Une fois que l'opérateur cesse son opération, le seul moment non nul est l'action mécanique exercée par le champ magnétique créé par la bobine, qui d'après la loi de Lenz, s'oppose à la cause qui lui a donné naissance, c'est-à-dire le mouvement. La vitesse de rotation de l'aimant va alors diminuer au cours du temps jusqu'à s'annuler.

III Résolution de problème

Exercice n°7 Autoroute A43

L'autoroute A43 longe les bâtiments de l'usine de production d'aluminium de Saint-Jean-De-Maurienne. Un panneau suggère aux porteurs de stimulateurs cardiaques de modérer leur vitesse en longeant l'usine.
Proposer une explication de ce principe de précaution, sachant que les cuves d'électrolyse utilisées dans l'usine sont alimentées par des courants de grande intensité pouvant atteindre quelques centaines de kA.