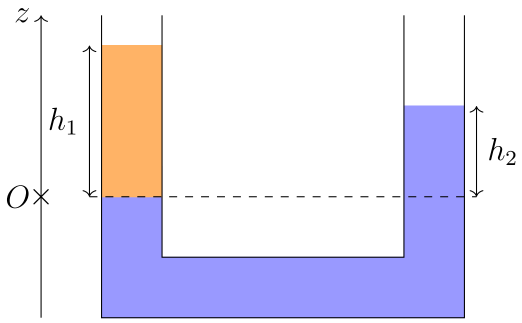
Thème III. L'énergie : conversions et transferts

# TD n°26 Statique des fluides dans un référentiel galiléen

## I Exercices d'application directe du cours

### Exercice n°1 Tube en U ♪

On considère un tube en U de section $S$ qui contient un liquide de masse volumique $\rho_2$. On verse d'un côté un volume $V$ de liquide de masse volumique $\rho_1$.
On fait l'hypothèse que $\rho_1 < \rho_2$.
On note $P_{\text{atm}}$ la pression atmosphérique qui règne dans l'air.




R1. Rappeler l'équation locale de la statique des fluides.

**Solution:** Dans le champ de pesanteur, l'équation locale de la statique des fluides s'écrit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}\,(P) &= \rho\vec{g}\\ \overrightarrow{\text{grad}}\,(P) &= -\rho g\overrightarrow{u_z}\\ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} &= -\rho g\end{aligned}$$

R2. Exprimer le champ de pression dans le fluide de masse volumique $\rho_1$ en fonction de $\rho_1$, $h_1$, $g$ et $z$.
R3. Exprimer le champ de pression dans le fluide de masse volumique $\rho_2$ en fonction de $\rho_2$, $h_2$, $g$ et $z$.

**Solution:** Les deux fluides sont des liquides incompressibles et homogènes, donc de masses volumiques constantes.

$$\begin{aligned}\text{Dans le fluide 1 : } P_1(z) &= -\rho_1 g z + A_1\\ P_1(h_1) &= P_{\text{atm}}\\ -\rho_1 g h_1 + A_1 &= P_{\text{atm}}\\ A_1 &= P_{\text{atm}} + \rho_1 g h_1\\ P_1(z) &= P_{\text{atm}} + \rho_1 g(h_1 - z)\\ \text{De même, dans le fluide 2 : } P_2(z) &= P_{\text{atm}} + \rho_2 g(h_2 - z)\end{aligned}$$

R4. En utilisant la continuité de la pression, déterminer une relation entre $h_1$, $h_2$, $\rho_1$ et $\rho_2$. Comparer $h_1$ et $h_2$.

**Solution:** En $z = 0$ :

$$\begin{aligned}P_2(z=0) &= P_1(z=0)\\ P_{\text{atm}} + \rho_1 g(h_1 - z) &= P_{\text{atm}} + \rho_2 g(h_2 - z)\\ \rho_1 g h_1 &= \rho_2 g h_2\end{aligned}$$

Soit $\boxed{h_2 = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} h_1 < h_1}$

R5. Exprimer le dénivelé $h_1 - h_2$ en fonction de $\rho_1$, $\rho_2$, $V$ et $S$.

**Solution:** Le volume de fluide 1 ajouté s'écrit $V = h_1 S$, donc $h_1 = \dfrac{V}{S}$

Soit $\boxed{h_1 - h_2 = \dfrac{V}{S}\left(1 - \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)}$

## Exercice n°2 Pression au sommet de l'Éverest ♪

On considère que la température de l'air, assimilé à un gaz parfait, décroît linéairement avec l'altitude. Au niveau de la mer la température vaut $T_0 = 20$ °C et au sommet de l'Éverest (altitude $h = 8850$ m), elle vaut $T_h = -40$ °C. On note $P_0$ la pression au niveau de la mer.
On choisit un axe $(Oz)$ vertical ascendant, où $z = 0$ est situé au niveau de la mer.

R1. Déterminer la loi de variation de la température avec l'altitude.

**Solution:** Prenons l'axe $(Oz)$ ascendant, avec l'origine au niveau du sol.
Température : $T(z) = az + b$, avec $\boxed{T(0) = T_0 = 20\ °\mathrm{C} = b}$
et au sommet de l'Éverest ($h = 8850$ m) : $T(h) = T_h = -40\ °\mathrm{C} = ah + T_0$,
soit $\boxed{a = \dfrac{T_h - T_0}{h} = -6,8.10^{-3}\ \mathrm{K} \cdot \mathrm{m}^{-1}}$

R2. Rappeler l'équation de la statique des fluides.

**Solution:** Équation de la statique des fluides : $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$

R3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la pression et l'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{M_{\mathrm{air}} g}{R(T_0 - az)} P(z)$, où on donnera la signification de $a$ et $T_0$.

**Solution:** **Attention** : $\rho$ dépend de l'altitude.
Loi des gaz parfaits à une particule de fluide de masse $m$ et de volume $V$ en $z$ : $P(z)V = nRT(z)$, soit $\dfrac{P(z)}{\rho(z)} = \dfrac{RT(z)}{M_{\mathrm{air}}}$, avec $M_{\mathrm{air}} = 28,8\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$ la masse molaire de l'air.
Ainsi : $\rho(z) = \dfrac{M_{\mathrm{air}} P(z)}{RT(z)}$

L'équation de la statique des fluides : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{M_{\mathrm{air}} g}{R} \dfrac{P(z)}{T_0 - az}}$

R4. Résoudre l'équation différentielle précédente pour en déduire la loi de variation de la pression avec l'altitude. L'écrire sous la forme $P(z) = P_0 \left(\dfrac{T(z)}{T_0}\right)^{\beta}$. On donnera l'expression de la constante $\beta$ en fonction de $M_{\mathrm{air}}$, $g$, $a$ et $R$.

**Solution:** Soit :

$$\begin{aligned} P(z) &= K\exp\left(-\frac{M_{\text{air}}g}{R}\int\frac{\mathrm{d}z}{T_0-az}\right) \\ &= K\exp\left(-\frac{M_{\text{air}}g}{R}\frac{\ln(T_0-az)}{-a}\right) \end{aligned}$$

En $z=0$ : $P(z=0)=P_0=K\exp\left(\frac{M_{\text{air}}g}{R}\frac{\ln(T_0)}{a}\right)$, soit $K=P_0\exp\left(-\frac{M_{\text{air}}g}{R}\frac{\ln(T_0)}{a}\right)$

$$\begin{aligned} P(z) &= P_0\exp\left(-\frac{M_{\text{air}}g}{R}\frac{\ln(T_0)}{a}\right)\times\exp\left(\frac{M_{\text{air}}g}{R}\frac{\ln(T_0-az)}{a}\right) \\ &= P_0\exp\left(-\frac{M_{\text{air}}g}{R}\frac{\ln(T_0)}{a}+\frac{M_{\text{air}}g}{R}\frac{\ln(T_0-az)}{a}\right) \\ &= P_0\exp\left(\frac{M_{\text{air}}g}{Ra}\times\ln\left(\frac{T_0-az}{T_0}\right)\right) \\ &= P_0\left(\frac{T_0-az}{T_0}\right)^{\frac{M_{\text{air}}g}{Ra}} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(z)=P_0\left(\frac{T_0-az}{T_0}\right)^{\frac{M_{\text{air}}g}{Ra}}=P_0\left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^{\frac{M_{\text{air}}g}{Ra}}}$$

R5. En déduire l'expression de la pression au sommet de l'Éverest en fonction de $T_0$, $T_h$, $P_0$, $M_{\text{air}}$, $g$, $a$ et $R$. Faire l'application numérique.

**Solution:** Au sommet de l'Éverest : $P(h)=P_0\left(\frac{T_0-ah}{T_0}\right)^{\frac{M_{\text{air}}g}{Ra}}$, soit $\boxed{P(h)=P_0\left(\frac{T_h}{T_0}\right)^{\frac{M_{\text{air}}g}{Ra}}=0,31\text{ bar}}$

R6. ♪ ♪ Montrer que dans l'atmosphère, la masse volume $\rho$ est reliée à la pression par : $\frac{P(z)}{\rho(z)^k}=$ constante. Exprimer $k$, puis calculer sa valeur numérique.

**Solution:** $P(z)=P_0\left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^{\beta}$, avec $\beta=\frac{M_{\text{air}}g}{Ra}$ et $\frac{P}{\rho}=\frac{RT}{M_{\text{air}}}$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(z) &= P_0\left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^{\beta} \\ P(z) &= P_0\left(\frac{\frac{P(z)}{\rho(z)}}{\frac{P_0}{\rho_0}}\right)^{\beta} \\ P(z)^{1-\beta}\rho(z)^{\beta} &= P_0^{1-\beta}\rho_0^{\beta} \\ P(z)\rho(z)^{\frac{\beta}{1-\beta}} &= P_0\rho_0^{\frac{\beta}{1-\beta}} \\ \frac{P(z)}{\rho(z)^{\frac{\beta}{\beta-1}}} &= \frac{P_0}{\rho_0^{\frac{\beta}{\beta-1}}} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\frac{P}{\rho^k}=\text{cst}}$, avec $\boxed{k=\frac{\beta}{\beta-1}=\frac{M_{\text{air}}g}{M_{\text{air}}g-Ra}=0,83}$

## Exercice n°3 Iceberg ♪

On considère un iceberg de volume total $V$, de volume immergé dans l'eau $V_i$ et de volume dans l'air $V_e$.

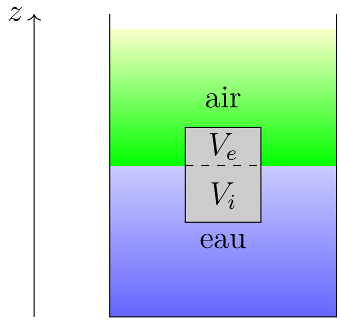
R1. Donner les expressions de la poussée d'Archimède (on prendra en compte celle exercée par l'eau et par l'air) et de la force de pesanteur qui s'appliquent sur l'iceberg.

**Solution:**
Système : Iceberg
Référentiel : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des forces :

— poids : $m\vec{g} = -mg\vec{u_z} = -\rho_g V g\vec{u_z} = -\rho_g(V_e + V_i)g\vec{u_z}$ ;

— poussée d'Archimède de l'air : $\vec{\Pi_A^a} = -\rho_a V_e \vec{g} = \rho_a V_e g\vec{u_z}$ ;

— poussée d'Archimède de l'eau : $\vec{\Pi_A^e} = -\rho_{es} V_i \vec{g} = \rho_{es} V_i g\vec{u_z}$ ;




R2. En utilisant le fait que l'iceberg est à l'équilibre, déterminer la proportion volumique $V_i/V$ de glace immergée.

**Solution:** À l'équilibre :

$$\begin{aligned}
m\vec{g} + \vec{\Pi_A^a} + \vec{\Pi_A^e} &= \vec{0} \\
-\rho_g V g\vec{u_z} + \rho_a V_e g\vec{u_z} + \rho_{es} V_i g\vec{u_z} &= \vec{0} \\
-\rho_g V + \rho_a V_e + \rho_{es} V_i &= 0 \\
-\rho_g V + \rho_a (V - V_i) + \rho_{es} V_i &= 0 \\
V(\rho_a - \rho_g) + V_i(\rho_{es} - \rho_a) &= 0 \\
(\rho_{es} - \rho_a)V_i &= (\rho_g - \rho_a)V
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{V_i = \frac{\rho_g - \rho_a}{\rho_{es} - \rho_a} V \approx \frac{\rho_{es}}{\rho_g} V = 0,90V}$

90% du volume de l'iceberg est donc immergé, et 10% du volume de l'icerberg est donc émergé.

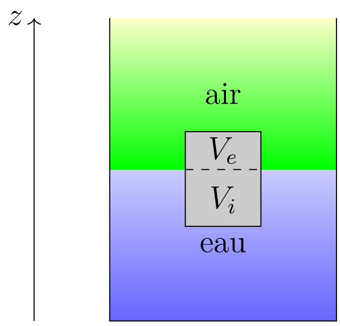
R3. Un glaçon flotte dans un verre rempli à ras bord. Faut-il vider partiellement le verre pour éviter qu'il ne déborde lorsque le glaçon fond ?

**Solution:**
**Idée :** Il faut comparer le volume immergé du glaçon ($V_i$), avec le volume total du glaçon une fois qu'il aura fondu.
Commençons par déterminer le volume immergé du glaçon : cf raisonnement de l'exercice sur l'iceberg.
Système : glaçon
Référentiel : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des forces :

— poids : $m\vec{g} = -mg\vec{u_z} = -\rho_g V g\vec{u_z} = -\rho_g(V_e + V_i)g\vec{u_z}$ ;

— poussée d'Archimède de l'air : $\vec{\Pi_A^a} = -\rho_a V_e \vec{g} = \rho_a V_e g\vec{u_z}$ ;

— poussée d'Archimède de l'eau : $\vec{\Pi_A^e} = -\rho_{es} V_i \vec{g} = \rho_{es} V_i g\vec{u_z}$ ;



À l'équilibre :

$$\begin{aligned} m\vec{g} + \overrightarrow{\Pi_A^d} + \overrightarrow{\Pi_A^e} &= \vec{0} \\ -\rho_g V g\vec{u_z} + \rho_a V_e g\vec{u_z} + \rho_{es} V_i g\vec{u_z} &= \vec{0} \\ -\rho_g V + \rho_a V_e + \rho_{es} V_i &= 0 \\ -\rho_g V + \rho_a (V - V_i) + \rho_{es} V_i &= 0 \\ V(\rho_a - \rho_g) + V_i(\rho_{es} - \rho_a) &= 0 \\ (\rho_{es} - \rho_a) V_i &= (\rho_g - \rho_a) V \end{aligned}$$

Ainsi le volume immergé du glaçon vaut : $\boxed{V_i = \dfrac{\rho_g - \rho_a}{\rho_{es} - \rho_a} V \approx \dfrac{\rho_{es}}{\rho_g} V}$

Le volume occupé par le glaçon une fois fondu s'écrit : $V_{\text{gl fondu}} = \dfrac{m}{\rho_e} = \dfrac{\rho_g V}{\rho_{es}}$

On constate donc que $V_i \approx V_{\text{gl fondu}}$ (en négligeant la masse volumique de l'air, 900 fois plus faible que celle de la glace).

Le verre ne débordera donc pas.

Sans négliger la poussée d'Archimède due à l'air : $\dfrac{V_{\text{gl fondu}}}{V_i} = \dfrac{\rho_g}{\rho_{es}} \times \dfrac{\rho_{es} - \rho_a}{\rho_g - \rho_a} = \dfrac{1 - \frac{\rho_a}{\rho_{es}}}{1 - \frac{\rho_a}{\rho_g}} \gtrsim 1$, car $\rho_{es} \gtrsim \rho_g$, le verre débordera très légèrement.

*Données :*

— masse volumique de la glace : $\rho_g = 0,92.10^3$ kg · m$^{-3}$

— masse volumique de l'eau liquide salée : $\rho_{es} = 1,0.10^3$ kg · m$^{-3}$

— masse volumique de l'air : $\rho_a = 1,2$ kg · m$^{-3}$

# II Exercices d'approfondissement

## Exercice n°4 Décollage d'une montgolfière ♪ ♪

R1. Dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme à la température $_0$, montrer que la pression varie avec l'altitude $z$ selon la loi $P(z) = P_0 \exp\left(-\dfrac{z}{H}\right)$ où $H$ désigne une hauteur caractéristique et $P_0$ la pression au sol.

On exprimera $H$ en fonction de la masse molaire $M$ de l'air, de la constante des gaz parfaits, de l'accélération de pesanteur $g$ et de la température $T_0$. Donner sa valeur sachant que $M = 29,0$ g · mol$^{-1}$, $R = 8,31$ J · K$^{-1}$ · mol$^{-1}$, $g = 9,81$ m · s$^{-2}$, $P_0 = 1,01$ bar et $T_0 = 15,0$ °C.

Une montgolfière est constituée d'une nacelle, des instruments (bruleur, bouteille de propane...) et de l'équipage à bord, d'une enveloppe qui contient l'air chauffé à une température $T_i > T_0$. On note $m_1 = 750$ kg la masse de tous ces constituants solides et $m_i$ la masse de l'air chauffé emprisonné par l'enveloppe de volume constant $V_0 = 2600$ m$^3$. La montgolfière de masse $m_1 + m_i$ étant ouverte à sa base, l'équilibre des pressions est supposé réalisé entre l'intérieur et l'extérieur.

R2. Montrer que la force ascensionnelle résultant du poids de la montgolfière et de la poussée d'Archimède s'exprime sous la forme $F(z) = \dfrac{P(z)V_0 \mathrm{M}g}{R}\left(\dfrac{1}{T_0} - \dfrac{1}{T_i}\right) - m_1 g$.

R3. En déduire la valeur minimale de la température $T_{i,\text{min}}$ pour que la montgolfière décolle du sol.

R4. On chauffe l'air à une température $T_1 = 110$ °C. En déduire l'altitude maximale atteinte par la montgolfière.

## Exercice n°5 20 000 lieues sous les mers ♪ ♪

De nouveaux hôtels grands luxes sont construits sous l'eau. Dans l'archipel des Fidji, un hôtel est ainsi constitué de 24 capsules, que l'on assimilera à des demi-sphères de rayon $R = 4,0$ m, posées sur le fond de l'océan (à $H = 15$ m de profondeur).

On note $(Oz)$ l'axe vertical ascendant dont l'origine est au fond de l'eau.

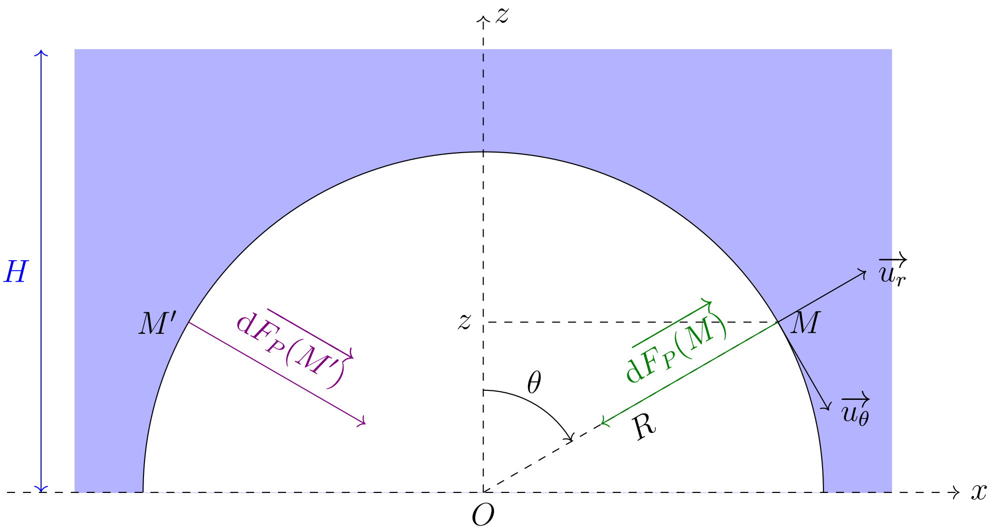
R1. Exprimer la pression $P(z)$ en un point quelconque de l'eau.

R2. Exprimer la force élémentaire de pression en un point de la surface des capsules dans le système de coordonnées adapté.

R3. Étudier les symétries pour identifier la direction cartésienne de la résultante des forces de pression

R4. Exprimer la résultante des forces de pression qui s'exerce sur la paroi de chacune des capsules en fonction de $\rho$ (la masse volumique de l'eau liquide), $g$, $H$ et $R$, et en faire l'application numérique.

**Solution:**




Au sein de l'eau, $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$, soit $P(z) = -\rho g z + K$

Or $P(H) = P_0 = K - \rho g H$, soit $\boxed{P(z) = P_0 + \rho g (H - z)}$

On utilise les coordonnées sphériques pour se repérer à la surface de la sphère : $M(R, \theta, \varphi)$.

À la surface de la demie-sphère : $z = R\cos(\theta)$

La pression de l'eau sur la surface de la demie-sphère : $\boxed{P(\theta) = P_0 + \rho g\Big(H - R\cos(\theta)\Big)}$

Dans la demie-sphère la pression peut être supposée uniforme et égale à $P_0$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_P} &= \iint_{\text{demie-sphère}} \left(\mathrm{d}\overrightarrow{F_P^{\text{eau}}} + \mathrm{d}\overrightarrow{F_P^{\text{air}}}\right) \\
&= \iint_{\text{demie-sphère}} \left(P_{\text{eau}}\mathrm{d}S(-\overrightarrow{u_r}) + P_{\text{air}}\mathrm{d}S\overrightarrow{u_r}\right) \\
&= \iint_{\text{demie-sphère}} \left(\Big( - P_0 - \rho g\Big(H - R\cos(\theta)\Big) + P_0\Big)\mathrm{d}S\overrightarrow{u_r}\right) \\
&= \iint_{\text{demie-sphère}} \left( - \rho g\Big(H - R\cos(\theta)\Big)R^2 \mathrm{d}\theta \sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u_r}\right) \\
&= -\rho g R^2 \iint_{\text{demie-sphère}} \left(\Big(H - R\cos(\theta)\Big)\mathrm{d}\theta \sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u_r}\right)
\end{aligned}$$

**Attention**, la direction de la force élémentaire de pression dépend du lieu où on se trouve : $\overrightarrow{u_r}(\theta)$ n'est pas un vecteur constant et ne peut pas être sorti de l'intégrale.

Il faut commencer par **étudier les symétries du problème**, afin de déterminer la direction de la résultante des forces de pression.

Le plan contenant l'axe $(Oz)$ est un plan de symétrie du problème, en deux points $M$ et $M'$ symétriques par rapport à ce plan : $P(M) = P(M')$.

D'après le schéma : $\mathrm{d}\overrightarrow{F_P(M)} + \mathrm{d}\overrightarrow{F_P(M')}$ est porté par l'axe $(Oz)$. Cela est le cas pour tous les couples de points $M$ et $M'$ symétriques par rapport à l'axe $(Oz)$, donc la résultante des forces de pression est selon l'axe $(Oz)$. On peut également déterminer que la composante selon $\overrightarrow{u_z}$ est négative.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_P}\cdot\overrightarrow{u_z} &= -\rho g R^2 \iint_{\text{demie-sphère}} \left(\Big(H - R\cos(\theta)\Big)\mathrm{d}\theta\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u_r}\right)\cdot\overrightarrow{u_z}\\
&= -\rho g R^2 \iint_{\text{demie-sphère}} \left(\Big(H - R\cos(\theta)\Big)\mathrm{d}\theta\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_z}\right)\\
&= -\rho g R^2 \iint_{\text{demie-sphère}} \left(\Big(H - R\cos(\theta)\Big)\mathrm{d}\theta\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\cos(\theta)\right)\\
&= -\rho g R^2 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\Big(H - R\cos(\theta)\Big)\sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\right)\\
&= -\rho g R^2 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\Big(H - R\cos(\theta)\Big)\sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\int_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\\
&= -2\pi\rho g R^2\left(H\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta - R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\\
&= -2\pi\rho g R^2\left(H\left[\frac{1}{2}\sin^2(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + R\left[\frac{1}{3}\cos^3(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\\
&= -2\pi\rho g R^2\left(\frac{H}{2}-\frac{R}{3}\right) < 0
\end{aligned}$$

En effet $H > R > \dfrac{2}{3}R$

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{F_P} = -\pi\rho g R^2\left(H - 2\dfrac{R}{3}\right)\overrightarrow{u_z}}$

A.N. $\|\overrightarrow{F_0}\| = 6,1.10^6$ N

Précédemment, vous avez dû calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\Big(H - R\cos(\theta)\Big)\sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\right)$ pour obtenir $F_P$ telle que $F_P = -2\pi\rho g R^2 \times I$.

On se propose de la calculer en utilisant la méthode des rectangles à droite.

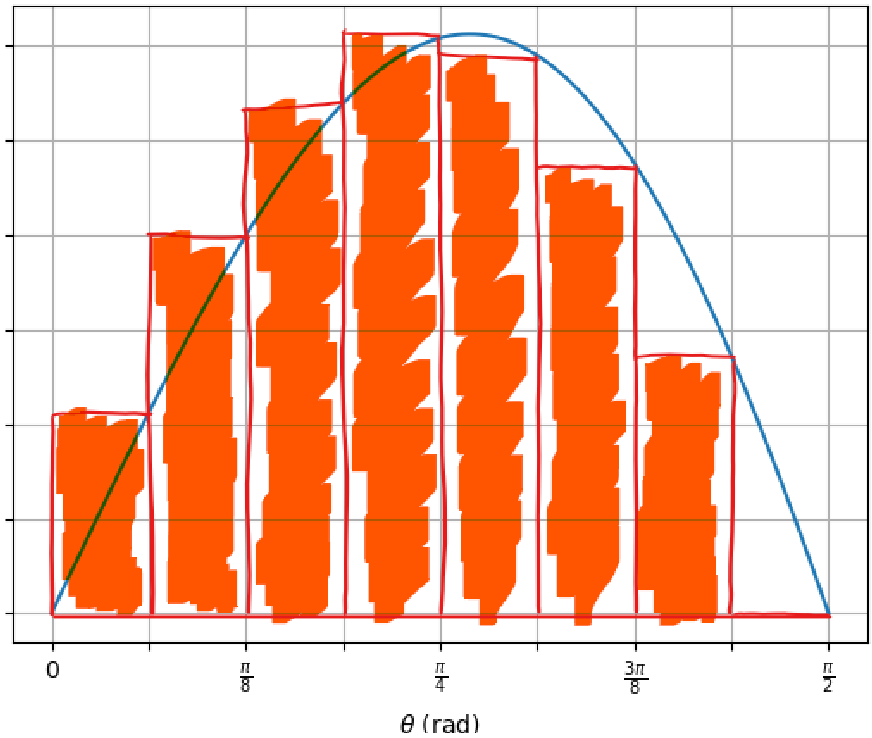
R5. Définir en python la fonction `g(th)` dont on souhaite déterminer l'intégrale.

**Solution:**

```python
from math import *
def g(th):
    return (H-R*cos(th))*sin(th)*cos(th)
```

R6. Que permet la méthode des rectangles ? Expliquer la méthode des rectangles à droite, et l'illustrer sur le graphe ci-dessous, dans le cas où l'intervalle d'intégration $[0, \pi/2]$ est découpé en $n = 8$.

**Solution:** La méthode des rectangles permet le calcul approché d'une intégrale. Pour cela, on découpe l'intervalle d'intégration en $n$ intervalles sur lesquels on approxime la fonction par une fonction constante. La valeur de l'intégrale est alors la somme des aires des $n$ rectangles.




R7. Exprimer la somme $R_n$ qui approxime la valeur de l'intégrale de $f$ sur l'intervalle $[a, b]$ découpé en $n$ intervalles, selon la méthode des rectangles à droite. On exprimera le pas $h$ de calcul.

**Solution:** On calcule la somme des aires des $n$ rectangles entre $[x_i, x_{i+1}]_{i\in[0,n-1]}$, sur lesquels on approxime $f$ par $f(x) \approx f(x_{i+1})$
On note $x_i = a + i \times h$, pour $i \in [0, n]$.
$$R_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(a + (i+1) \times h) \times h = \sum_{i=1}^{n} f(a + i \times h) \times h$$

R8. Écrire la fonction `Rectangle_d(a,b,f,n)` qui renvoie la valeur de la somme exprimée précédemment.

**Solution:**

```
def Rectangle_d(a,b,f,n):
    Rn=0
    h=(b-a)/n
    for i in range(1,n+1):
        Rn=Rn+f(a+i*h)
    return Rn*h
```

R9. Commenter le code et les valeurs obtenues :

**Solution:**

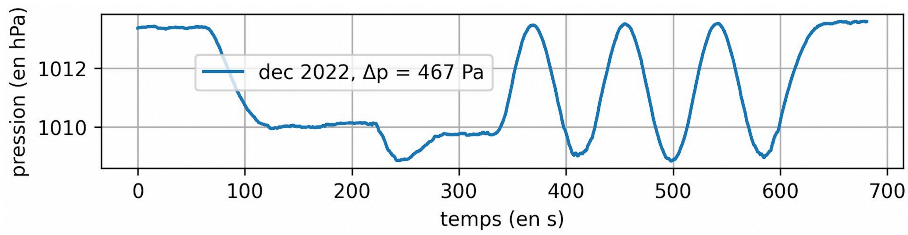
```
L=[] # liste des résultats du calcul approché de l'intégrale pour
   différentes valeurs de n
for n in [2,4,8,10,50,100,1000,10000]:
    L.append(rectangle_d(g,0,pi/2,n)) # calcule de la valeur approchée
   de l'intégrale
>>> L
```

```
[4.779765490941271, 5.829472211959247, 6.082944490055528,
   6.113128400363213, 6.164528127905089, 6.166132055315627,
   6.166661320630175, 6.166666613206313]
```

Les valeurs approchées de de l'intégrale convergent vers 6,166 quand le nombre d'intervalle augmente.

## Exercice n°6 Grande roue

Lors des fêtes de Noël, une grande roue est installée dans la ville de Reims. Un physicien est monté dans une cabine de cette roue, muni d'un capteur de pression. On donne le relevé obtenu :




La différence de pression mesurée lors des oscillations est $\Delta p = 467$ Pa.

R1. Pourquoi observe-t-on une variation de la pression quand la roue tourne ? Combien fait-elle de tours sur l'enregistrement ?

**Solution:** L'altitude varie !

R2. La masse molaire de l'air, considéré comme un gaz parfait, est $M = 29\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$. La température est de 10 °C. Estimer le diamètre de la grande roue.

**Solution:** Dans l'hypothèse de l'atmosphère isotherme, on établit que $P(z) = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$ (à redémontrer à chaque fois ! cf cours pour la démo complète à faire).
La pression est la plus élevée quand la nacelle est en bas. Elle varie très peu par rapport à la pression moyenne de 1 bar. Variation d'altitude :

$$\begin{aligned}
\Delta z &= z_H - z_B \\
&= -\frac{RT}{Mg}\ln\frac{P_H}{P_0} + \frac{RT}{Mg}\ln\frac{P_B}{P_0} \\
&= \frac{RT}{Mg}\ln\frac{P_B}{P_H} \\
&= \frac{RT}{Mg}\ln\frac{P_H+\Delta p}{P_H} \\
&= \frac{RT}{Mg}\ln\left(1+\frac{\Delta p}{P_H}\right) \\
&\approx \frac{RT}{Mg}\times\frac{\Delta p}{P_H} \\
&\approx \frac{8,314\times 283}{29.10^{-3}\times 9,81}\times\frac{467}{1008.10^2} \\
D &= 38,3\ \text{m}
\end{aligned}$$

qui est une évaluation du diamètre de la grande roue.

R3. Dans la phase où la roue tourne à vitesse angulaire constante, estimer la vitesse $v$ de la cabine que l'on supposera placée sur le périmètre de la roue, ainsi que son accélération.

**Solution:** La période de rotation de la roue est de $T$ =80 s environ. La vitesse de la cabine est donnée par $v = \frac{2\pi}{T} \times \frac{D}{2} = 1,5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Sur un mouvement circulaire uniforme : $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u_r}$, avec $\frac{v^2}{R} = 0,12\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

## Exercice n°7 Océan isotherme ♪ ♪ ♪

La masse volumique $\rho$ de l'eau dans un océan varie avec la pression $P$ selon la loi

$$\rho = \rho_0 \left[1 + a\left(P - P_0\right)\right]$$

où $P(z)$ et $\rho(z)$ sont la pression et la masse volumique à la surface de l'océan, en $z = 0$.

R1. La profondeur étant notée $z > 0$, déterminer la loi $P(z)$.

**Solution:** D'après l'équation de la statique des fluides, avec axe $(Oz)$ descendant :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} &= +\rho(z)g \\
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} &= \rho_0 \left[1 + a\left(P(z) - P_0\right)\right] g \\
\frac{\mathrm{d}P}{\left[1 + a\left(P - P_0\right)\right]} &= \rho_0 g \mathrm{d}z \\
\frac{1}{a}\left[\ln\left(1 + a(P - P_0)\right) - \ln\left(1 + a(P_0 - P_0)\right)\right] &= \rho_0 g z \\
\frac{1}{a}\ln\left(1 + a(P - P_0)\right) &= \rho_0 g z \\
1 + a(P(z) - P_0) &= e^{a\rho_0 g z} \\
P(z) &= P_0 + \frac{e^{a\rho_0 g z} - 1}{a}
\end{aligned}$$

R2. Que devient cette loi pour les profondeurs « faibles» ? Préciser.

**Solution:** Pour les profondeurs faibles, $a\rho_0 g z \ll 1$, $e^{a\rho_0 g z} = 1 + a\rho_0 g z + o(a\rho_0 g z)$

Et on retrouve : $P(z) = \underbrace{P_0 + \rho_0 g z}_{\text{champ de pression dans l'hyp incompressible}} + o(\rho_0 g z)$

R3. On donne $a = 10^{-10}\ \mathrm{Pa^{-1}}$, et pour $z = 0$, $P = P_0 = 10^5$ Pa et $\rho = \rho_0 = 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.
Calculer $P$ pour $z = 1$ km. Comparer en calculant l'erreur relative avec la pression obtenue en considérant l'eau comme incompressible. Commenter.

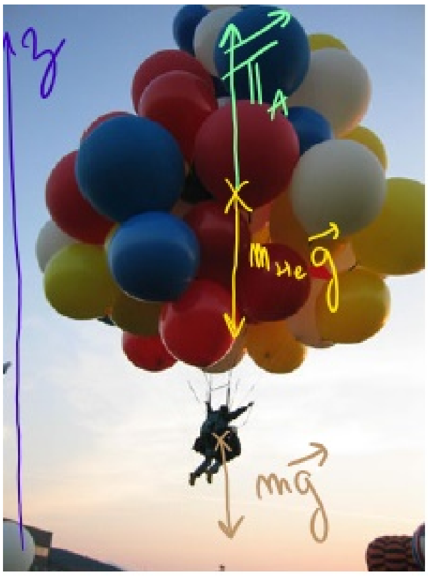
**Solution:** A.N. : $P = 99$ bar

Erreur relative en considérant l'eau incompressible, où $P_i = P_0 + \rho_0 g z$ : $\frac{|P - P_i|}{P} = 0,000485 = 0,485‰$ !

# III Résolutions de problème

## Exercice n°8 Cluster Ballooning ♪ ♪ ♪

N'avez-vous jamais rêvé d'être porté dans le ciel par un énorme bouquet de ballons ? C'est le « cluster ballooning ». Le pilote porte un harnais auquel est attaché un très grand nombre de ballons de baudruche gonflés à l'hélium. Le contrôle est réalisé par le largage de lest pour monter, ou par éclatement des ballons pour descendre. Combien de ballons gonflés à l'hélium faut-il, au minimum, pour faire décoller un homme ? Et pour faire décoller une maison ?





Extrait du film "Là-Haut"

**Solution:** Notons $m$ la masse de l'homme (resp. de la maison)

Système : { homme + ballons gonflés l'hélium }

Référentiel : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des forces extérieures :

— poids total : poids de l'homme + poids de l'hélium (on néglige le poids de l'enveloppe des ballons) ; $m\overrightarrow{g} + m_{\text{He}}\overrightarrow{g} = (m + \rho_{\text{He}}V)\overrightarrow{g}$, avec $V$ le volume des ballons.

— poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_{\text{air}}V\overrightarrow{g}$, avec $V$ le volume total occupé par l'homme et les ballons. On peut raisonnablement considérer que le volume occupé par l'homme est négligeable devant le volume occupé par les ballons.

Le système décolle si $\left((m + \rho_{\text{He}}V)\overrightarrow{g} - \rho_{\text{air}}V\overrightarrow{g}\right) \cdot \overrightarrow{u_z} > 0$

Utilisons la loi des gaz parfaits pour exprimer les masses volumiques : $PV = nRT$, soit $\dfrac{P}{\rho} = \dfrac{RT}{M}$

Ainsi $\boxed{\rho_{\text{He}} = \dfrac{M_{\text{He}}P}{RT}}$ et $\boxed{\rho_{\text{air}} = \dfrac{M_{\text{air}}P}{RT}}$. $P$ et $T$ sont identiques dans l'air et dans les ballons.

Ainsi, la condition se traduit : $-\left(m + \dfrac{M_{\text{He}}P}{RT}V\right) + \dfrac{M_{\text{air}}P}{RT}V > 0$

Soit $\dfrac{PV}{RT}(M_{\text{air}} - M_{\text{He}}) > m$

Les ballons doivent être de volume total $\boxed{V > \dfrac{mRT}{P(M_{\text{air}} - M_{\text{He}})}}$

A.N. : $\underline{V > 69 \text{ m}^3}$, pour $m = 70$ kg ; $T = 293$ K ; $P = 10^5$ Pa

Pour des ballons sphériques de rayons $R = 20$ cm, donc de volume $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 3,35.10^{-2}$ m$^3$, il faut $N > \dfrac{V}{V_1} = 2,1.10^3$ ballons pour décoller un homme de 70 kg.

Pour des ballons sphériques de rayon $R = 1$ m, il faut $N > 16$ ballons pour décoller un homme de 70 kg.

## Exercice n°9 Duel de l'aquarium dans Fort-Boyard *(CCINP PSI 2024)* ♪ ♪ ♪

Dans ce duel, le candidat et le Maître du temps ajoutent chacun à leur tour une pièce dans un verre, initialement vide, flottant dans un aquarium. Le premier à faire couler le verre a perdu.

On suppose que :

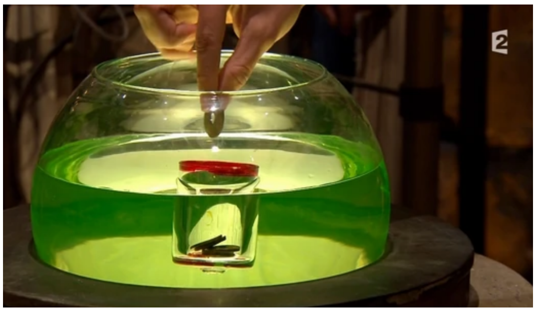
— le bocal est suffisamment profond pour que le verre puisse couler intégralement ;

— le verre reste au centre du bocal et ne touche jamais les bords ;

— le verre, de masse $M = 125$ g, est cylindrique de hauteur $h = 10$ cm et de base circulaire d'aire $S = 2,0.10^{-3}$ m$^2$ ;

— le fond du verre reste toujours horizontal ;

— les pièces ont une masse $m = 10$ g et font une épaisseur de $e = 2,0$ mm et sont toutes horizontales, empilées les unes sur les autres au fond du verre.



R1. Sachant que le Maître du temps joue en premier, qui remporte le duel ?

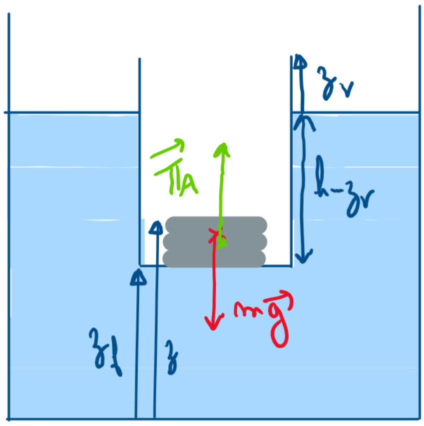
**Solution:** Pour répondre à cette question il faut déterminer le nombre de pièces qui amène le bord supérieur du verre au ras de l'eau. L'ajout d'une pièce fera tomber le verre au fond du bocal.

Système : { verre+ $N$ pièces dedans }, de masse $M + N \times m$.
Référentiel : le Fort de Fort-Boyard, supposé galiléen à l'échelle du temps du duel
Bilan des forces :

— poids de l'ensemble : $\left(M + N \times m\right)\vec{g}$

— poussée d'Archimède de l'eau : $\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho V \vec{g}$, avec $V = (h - z_v)S$, où $z_v$ est l'altitude du haut du verre prise à partir du niveau de l'eau.

Le verre ne coule pas tant que $z_v \geq 0$.



Plaçons-nous à la limite : $z_v = 0$ et déterminons le nombre de pièces correspondant :
À l'équilibre :

$$\left(M + N \times m\right)\vec{g} - \rho h S \vec{g} = \vec{0}$$
$$M + Nm = \rho h S$$
$$N = \frac{\rho h S - M}{m}$$
$$N = 7,5$$

Pour 7 pièces, $z_v > 0$, et pour 8 pièces, $z_v < 0$.
Or le joueur qui va mettre la 8$^{e}$pièce c'est le candidat, donc c'est le Maître du temps qui va gagner.

R2. Exprimer, puis calculer la variation d'altitude $\Delta z$ du sommet de la pile de pièces par rapport à la surface de l'eau lors de l'ajout d'une pièce. Le sommet de la pile est-il monté ou descendu ?

**Solution:** Calculons la variation de la hauteur du haut du verre par rapport à la surface, ce qui donnera également la variation de la hauteur du fond du verre. La hauteur des pièces permettra d'obtenir la variation de la hauteur du sommet de la pile.

À l'équilibre pour $N$ pièces : $M + Nm = \rho(h - z_v)S$, donc $z_v = h - \dfrac{M + Nm}{\rho S}$

À l'équilibre pour $N + 1$ pièces : $z'_v = h - \dfrac{M + (N+1)m}{\rho S}$

L'altitude du sommet du verre (et donc du fond du verre) a donc varié de : $z'_v - z_v = -\dfrac{m}{\rho S} = z'_f - z_f = -5$ mm

Pour $N$ pièces, le haut de la pile est à l'altitude $z = z_f + Ne$

Pour $N+1$ pièces, le haut de la pile est à l'altitude $z' = z'_f + (N+1)e$

Donc l'altitude du haut de la pile a varié de :

$$\begin{aligned}
\Delta z &= z' - z \\
&= z'_f + (N+1)e - z_f - Ne \\
&= -\frac{m}{\rho S} + e \\
&= -3 \text{ mm} < 0
\end{aligned}$$

Le haut de la pile a baissé.

## Exercice n°10 Lanterne volante ♪ ♪ ♪

Une lanterne volante est un très léger cylindre en papier de riz, fermé sur le dessus, dont l'air intérieur, prisonnier de la lanterne, est chauffé à la base par la combustion d'un carburant solide. La lanterne s'élève alors dans les airs.

On considère une lanterne de 100 cm de hauteur, de 60 cm de largeur, pesant 80 g.

Le très fin papier de riz est ignifugé, car la température dans la lanterne atteint les 120 °C.

Quelle est l'altitude atteinte par une lanterne volante ?

**Solution:**

Système : une lanterne

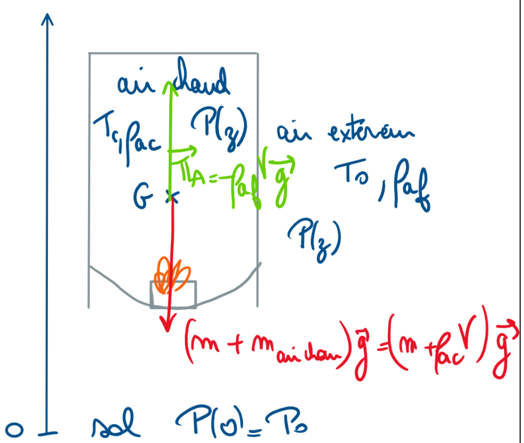
référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des forces :

— poids de la lanterne sans le carburant : $m\overrightarrow{g}$, avec $m = 80$ g

— poids de l'air chaud à l'intérieur de la lanterne : $\rho_{ac} V \overrightarrow{g}$, avec $\rho_{ac}$ la masse volumique de l'air chaud interne

— poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_{af} V \overrightarrow{g}$, avec $\rho_{ac}$ la masse volumique de l'air froid interne




Le volume de la lanterne sera supposé constant.

La lanterne s'élève tant que la résultante des forces est dirigée vers le haut, donc tant que $\rho_{af} V > m + \rho_{ac} V$.

En assimilant l'air froid, et l'air chaud à un gaz parfait, d'après la loi des gaz parfaits : $\rho = \dfrac{PM}{RT}$, avec $M = 28,8 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

La lanterne étant ouverte par en-dessous, la pression est la même à l'intérieur et à l'extérieur. En assimilant l'atmosphère à un gaz parfait de température uniforme, $T_0$, $P(z) = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT_0}}$

Notons $T_c = 120$ °C la température intérieure.

$$\begin{aligned}
\rho_{af}V &> m+\rho_{ac}V\\
\frac{P_0e^{-\frac{Mgz}{RT_0}}M}{RT_0}V &> m+\frac{P_0e^{-\frac{Mgz}{RT_0}}M}{RT_c}V\\
\frac{P_0e^{-\frac{Mgz}{RT_0}}M}{R}V\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T_c}\right) &> m\\
e^{-\frac{Mgz}{RT_0}} &> \frac{mRT_0T_c}{P_0MV(T_c-T_0)}\\
\frac{Mgz}{RT_0} &< -\ln\left(\frac{mRT_0T_c}{P_0MV(T_c-T_0)}\right)\\
z &< \frac{RT_0}{Mg}\ln\left(\frac{P_0MV}{mR}\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T_c}\right)\right)
\end{aligned}$$

Pour $T_0 = 20$ °C, $P_0 = 1$ bar, et une lanterne de volume $V = 100\text{ cm}\times\pi(30\text{ cm})^2 = 0,28\text{ m}^3$, on trouve une altitude maximale de 500 m.

Remarque, en supposant que la pression est homogène, il n'y a pas de raison que l'élévation cesse... puisque la condition de décollage sera alors vérifiée à chaque altitude... mais si l'élévation ne cesse pas, il ne sera pas possible de considérer la pression comme homogène