



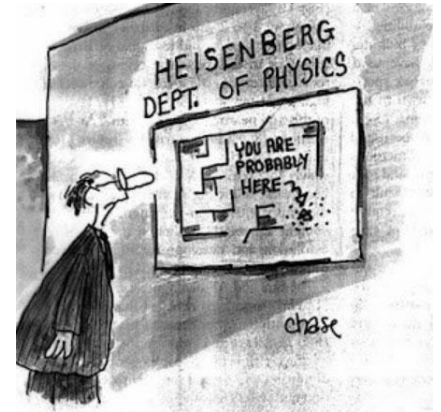
Thème I. Ondes et signaux

Chapitre n°29 Introduction à la physique quantique

La théorie quantique est nécessaire pour décrire la matière à l'échelle atomique et au-dessous, échelles pour lesquelles la mécanique classique (basée sur les lois de Newton) est mise en difficulté. À l'heure actuelle, les prédictions théoriques de la mécanique quantique n'ont jamais été mises en défaut ...

Elles ont permis la réalisation d'inventions aussi importantes que le laser, le microprocesseur, l'horloge atomique, l'imagerie médicale par résonance magnétique (IRM), le laser, ...

Les phénomènes quantiques qui apparaissent à l'échelle microscopique sont parfois difficiles à « accepter », car ils ne correspondent pas à notre intuition naturelle basée sur notre vie de tous les jours à l'échelle macroscopique. À la base de leur compréhension se trouve l'idée de dualité onde-particule, et de probabilité de présence pour une particule. Il en découle alors l'inégalité de Heisenberg, et la quantification de l'énergie, que nous allons exposer dans ce chapitre.



Une brève histoire

À la fin du XIX^e siècle, la physique classique était construite et considérée comme très satisfaisante par la plupart des physiciens :

- la **matière** était considérée comme des **particules, localisées**, dont le mouvement obéissait aux lois de la mécanique newtonienne, grâce auxquelles on peut déterminer leurs positions et vitesses à chaque instant. De plus si on connaît la position et la vitesse initiale d'une particule à un instant, la mécanique newtonienne nous permet de connaître la position et la vitesse de la particule à tout instant. Il s'agit de **lois physiques déterministes**.
- le **rayonnement** était considéré comme une **onde**, qui occupe une partie étendue de l'espace, régie par la **théorie de Maxwell**. Lorsqu'on tente de limiter l'étendue spatiale d'une onde, celle-ci a tendance à s'étaler : c'est le phénomène de diffraction.

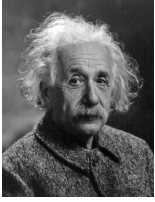
Il restait cependant quelques phénomènes inexpliqués, dont (pour ce qui concerne la physique quantique) :

- le rayonnement du corps noir : un corps chauffé n'émettait pas un spectre explicable par la théorie classique,
- le spectre de raies des atomes.

Le début du XX^e siècle fut marqué par deux révolutions qui aboutirent à l'introduction de la **mécanique relativiste et quantique** : les lois de la physique classique cessent d'être valables à des vitesses de l'ordre de grandeur de celle de la lumière (domaine relativiste) ou à l'échelle atomique (domaine quantique). Cependant la physique classique apparaît comme une approximation de ces nouvelles théories valable pour la plupart des phénomènes à l'échelle courante.



Max Planck (1858-1947) : physicien allemand, il est lauréat du prix Nobel de physique en 1918 pour ses travaux en théorie des quanta. Il fut l'un des fondateurs de la mécanique quantique.

	Niels Bohr (1885-1962) : physicien danois, il est surtout connu pour son apport à l'édification de la mécanique quantique, pour lequel il a reçu de nombreux honneurs. Il est notamment lauréat du prix Nobel de physique en 1922.
	Albert Einstein (1879-1955) : physicien théoricien qui fut successivement allemand, apatride, suisse et helvético-américain. Il publie sa théorie de la relativité restreinte en 1905, et sa théorie de la gravitation dite relativité générale en 1915. Il contribue largement au développement de la mécanique quantique et de la cosmologie, et reçoit le prix Nobel de physique de 1921 pour son explication de l'effet photoélectrique. Il est aujourd'hui considéré comme l'un des plus grands scientifiques de l'Histoire.
	Louis de Broglie (1892-1987) : mathématicien et physicien français. À seulement 37 ans, il devient lauréat du prix Nobel de physique de 1929 « pour sa découverte de la nature ondulatoire des électrons »
	Erwin Schrödinger (1887-1961) : physicien, philosophe et théoricien scientifique autrichien. En imaginant l'équation d'évolution de la fonction d'onde $\Psi(x, y, z, t)$ associée à l'état d'une particule, il a permis le développement du formalisme théorique de la mécanique quantique. Cette équation d'onde, qui tient compte à la fois de la quantification et de l'énergie non relativiste, a été appelée par la suite équation de Schrödinger (pour laquelle il reçut, en commun avec Paul Dirac, le prix Nobel de physique de 1933).
	Werner Heisenberg (1901-1976) : physicien allemand qui est l'un des fondateurs de la mécanique quantique. Il est lauréat du prix Nobel de physique de 1932 « pour la création de la mécanique quantique, dont l'application a mené, entre autres, à la découverte des variétés allotropiques de l'hydrogène ».
	Paul Dirac (1902-1984) : physicien et mathématicien britannique. Il est l'un des « pères » de la mécanique quantique et a prévu l'existence de l'antimatière. Il est colauréat avec Erwin SCHRÖDINGER du prix Nobel de physique de 1933 « pour la découverte de formes nouvelles et utiles de la théorie atomique ».

Récemment, des prix Nobel de physique ont été attribués à des physiciens pour leur recherche en mécanique quantique :

2012		Serge HAROCHE (Français, 1944-) et David WINELAND (Américain, 1944-) : Pour les méthodes expérimentales révolutionnaires qui ont permis la mesure et la manipulation de systèmes quantiques individuels.
2022		Alain ASPECT (Français, 1947-, photo ci-contre), John CLAUSER (Américain, 1942-) et Anton ZEILINGER (Autrichien, 1945-). Pour leurs expériences avec des photons intriqués, établissant la violation des inégalités de Bell et ouvrant la voie à la science de l'information quantique.

Quelques applications

Semi-conducteurs – microélectronique : ordinateur, téléphone, cellules photovoltaïques ...

Aujourd'hui, les tablettes tactiles, les smartphones, les ordinateurs portables ... battent des records d'intelligence et de minceur. Leur technologie repose sur l'utilisation de matériaux semi-conducteurs.

Dans les années 1950, c'est la compréhension de la nature quantique de la conduction électrique dans les conducteurs et les semi-conducteurs qui a permis la réalisation des premiers transistors, puis des microprocesseurs.

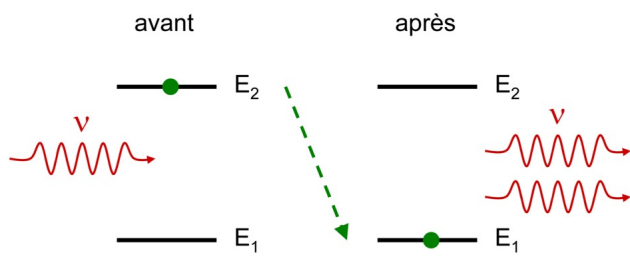
Dans une cellule photovoltaïque, les photons absorbés sont transformés en courant électrique : c'est l'effet photoélectrique. Dans un ordinateur, les semi-conducteurs sont utilisés pour les mémoires flash.

Les Diodes ElectroLuminescentes (DEL) fonctionnent également grâce à des semi-conducteurs, qui traversés par un courant électrique émettent de la lumière.

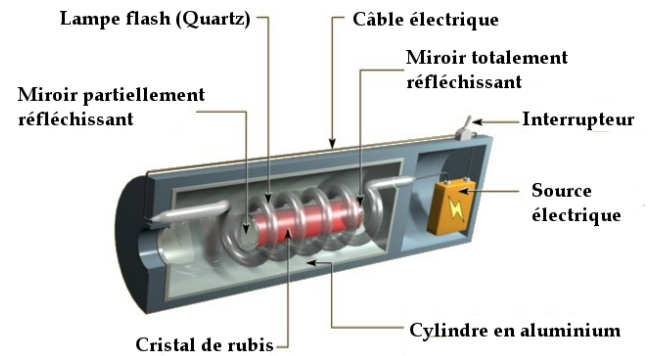
LASER : lecteurs CD/DVD/Blue-Ray, imprimantes, liaisons téléphoniques, médecine, industrie ...

Le LASER est maintenant présent dans d'innombrables applications : lecteurs CD/DVD/Blue-Ray, imprimantes laser, liaisons téléphoniques par fibre optique (ce qui permet d'augmenter le débit d'information) ... On le trouve également en médecine pour la chirurgie des yeux par exemple, ou dans l'industrie pour la découpe précise de tôles ou de vêtements, dans le guidage d'engins de travaux publics, ...

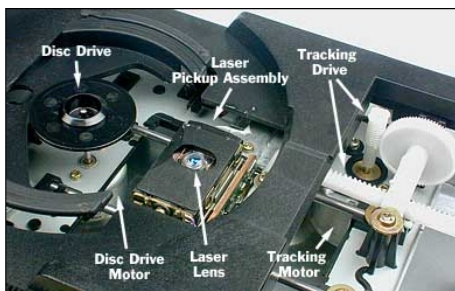
Le LASER fonctionne sur le principe de l'émission stimulée, introduite par Einstein dès 1917. Le premier a été réalisé en 1960. Depuis, il en existe de très nombreux types qui émettent des ondes de longueurs d'onde très différentes.



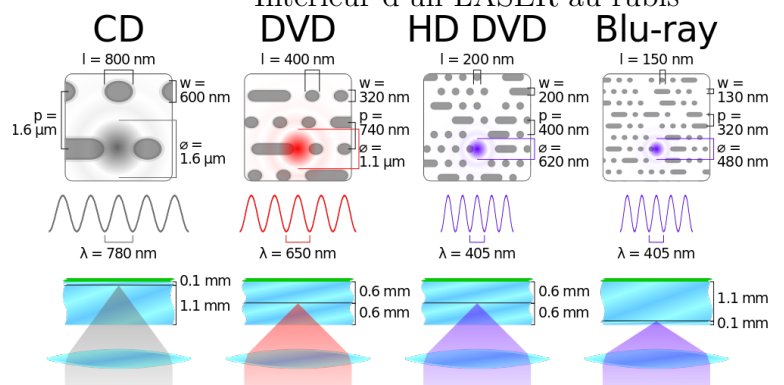
Principe de l'émission stimulée



Intérieur d'un LASER au rubis



Mécanisme d'un lecteur CD/DVD



Différents LASER utilisés pour la lecture des CD, DVD, Blue-Ray

Pré-requis

- Terminale : Thème Ondes et signaux
 - Diffraction d'une onde par une ouverture : conditions d'observation et caractéristiques. Angle caractéristique de diffraction.
 - Le photon : énergie, vitesse, masse. Effet photoélectrique. Travail d'extraction.
- PCSI. Thème I. Ondes et signaux
 - Chapitre n°28. Superposition de deux ondes : phénomène d'interférences lumineuses & Ondes stationnaires
- PCSI. Thème II. Mouvements et interactions
 - Chapitre n°14 : Moment cinétique d'un point matériel
 - Chapitre n°16 : Mouvement à forces centrales conservatives.

Plan du cours

I Dualité onde-corpuscule de la lumière	5
I.1 Nécessité du photon	5
I.1.a) Effet photoélectrique	5
I.1.b) Interférences	6
I.2 Relations de Planck-Einstein	7
II Dualité onde-corpuscule de la matière	8
II.1 Expérience d'interférences entre atomes .	8
II.2 Relation de De Broglie	9

III Formalisme quantique	12
III.1 Notion de fonction d'onde	12
III.2 Inégalité de Heisenberg	13
III.2.a) Inégalité de Heisenberg	13
III.2.b) Diffraction par une fente	15
IV Quantification de l'énergie	15
IV.1 Particule confinée dans un puits infini . .	15
IV.1.a) Position du problème	15
IV.1.b) Énergie minimale	15
IV.1.c) Niveaux d'énergie	16
IV.2 Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène	19

Ai-je bien appris mon cours ?

- 1 – 😊 – 😞 – Décrire une expérience mettant en évidence la nécessité du photon : effet photoélectrique ou interférences avec des photons uniques.
- 2 – 😊 – 😞 – Donner les relations de Planck-Einstein pour le photon.
- 3 – 😊 – 😞 – Décrire une expérience mettant en évidence le comportement ondulatoire de la matière.
- 4 – 😊 – 😞 – Donner la relation de De Broglie.
- 5 – 😊 – 😞 – Donner l'inégalité de Heisenberg.
- 6 – 😊 – 😞 – Déterminer l'expression de l'énergie minimale d'une particule confinée dans un puits infini en utilisant l'inégalité de Heisenberg.
- 7 – 😊 – 😞 – Établir les niveaux d'énergie d'une particule confinée dans un puits infini par analogie avec les modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités.
- 8 – 😊 – 😞 – Atome d'hydrogène. En utilisant l'hypothèse de la quantification du moment cinétique orbital de l'électron : $L_n = n\hbar$, déterminer l'expression des niveaux d'énergie de l'électron.

I Dualité onde-corpuscule de la lumière

I.1 Quelques expériences illustrant la nécessité du photon

Plusieurs modèles pour la lumière ont été proposés à travers les siècles. De l'Antiquité à Newton, la lumière est considérée comme étant constituée de grains de lumière. Au XVII^e et XVIII^e siècle, ce modèle est abandonné au profit de la vision ondulatoire de la lumière (expériences d'interférences et de diffraction). Maxwell développe la théorie des ondes électromagnétiques dont la lumière fait partie.

Capacité exigible : Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence la nécessité de la notion de photon

I.1.a) Effet photoélectrique

Animation : <https://phet.colorado.edu/fr/simulation/photoelectric>.

Vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=v-1zjdUTu0o>

Document 1. Expériences et observations

L'effet photoélectrique a été observé pour la première fois, et par hasard, par Heinrich HERTZ en 1887. Hertz travaillait à ce moment-là sur les ondes électromagnétiques afin d'apporter une confirmation expérimentale à la théorie de James C. MAXWELL, qui venait d'énoncer « ses » quatre équations prédisant les ondes électromagnétiques et leur propagation.

Il constata qu'à la surface d'un objet métallique éclairée par une lumière ultraviolette une charge électrique apparaissait. Cette observation ne lui étant d'aucune aide pour son objectif initial, il ne poursuivra pas là-dedans. Philip LENARD (1862-1947), ancien élève de HERTZ, réalise l'expérience schématisée ci-contre en 1902 (Figure 1).

La plaque métallique K est enfermée dans une cellule à vide et soumise à un rayonnement de fréquence ν .

Le milliampèremètre permet de mettre en évidence la présence d'un éventuel courant électrique parcourant le circuit.

Si un courant est observé, cela signifie que des électrons sont arrachés à la plaque K par le rayonnement, et sont capturés par l'électrode A qui leur permet de « rejoindre » le circuit. Le générateur a pour rôle de polariser l'électrode A à un potentiel positif et donc d'y attirer les électrons éventuellement issus de la plaque K, qui sont a priori émis dans toutes les directions.

Les résultats observés sont les suivants :

- si la plaque est éclairée par un rayonnement du domaine visible, aucun courant n'est observable, et ce quelle que soit l'intensité lumineuse émise par la lampe ;
- si la plaque est éclairée par un rayonnement ultra-violet, donc de fréquence plus élevée, alors un courant est systématiquement observé dans le circuit, et son intensité est d'autant plus élevée que l'intensité lumineuse de la lampe est élevée.

L'expérience de LENARD fût répétée de nombreuses fois au cours des années suivantes par LANGEVIN, BLOCH, THOMSON, PALMER et finalement par MILLIKAN de 1905 à 1916 (dont le prix Nobel en 1923 récompensa autant ses travaux sur l'effet photoélectrique que ceux sur la charge de l'électron). Son travail a consisté à mesurer l'énergie cinétique maximale d'électrons issus d'une plaque de sodium éclairée par des rayonnements de différentes fréquences, comme représenté ci-dessous.

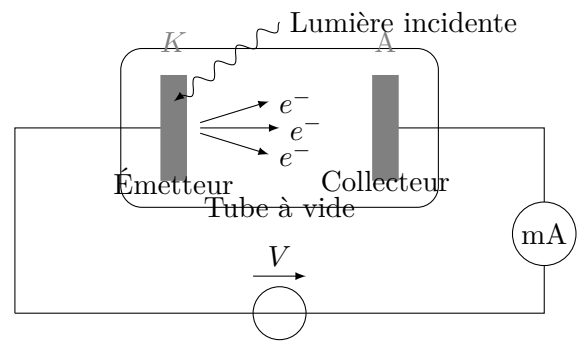


FIGURE 1 – Expérience d'effet photoélectrique

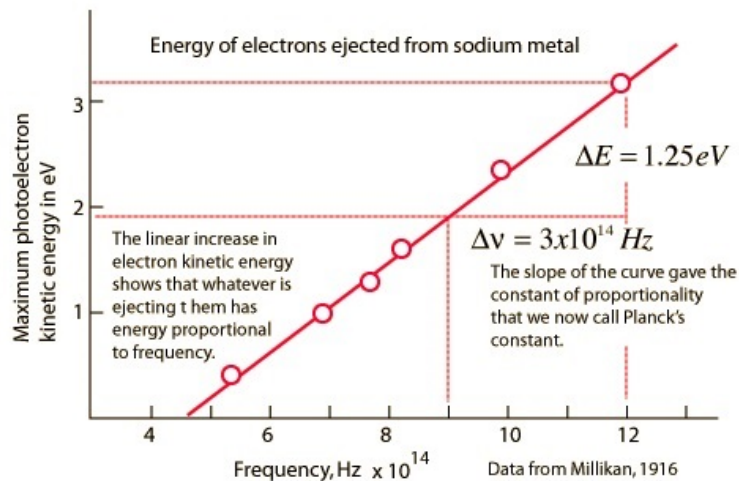


FIGURE 2 – Résultats expérimentaux de R. Millikan (réalisés avec du Sodium).
(Figure extraite d'un cours en ligne de l'université du Tennessee).

Document 2. Interprétation par Einstein (1905) « Un point de vue heuristique concernant la production et la transformation de lumière » (Extrait), Annalen der Physik, Vol XVII, 1905, p132-148. Traduction publiée dans « Albert Einstein, Œuvres choisies, Quanta » Seuil/CNRS Éditions

La conception usuelle, selon laquelle l'énergie de la lumière est distribuée de façon continue dans l'espace où elle est rayonnée, présente, quand on tente d'expliquer les phénomènes photoélectriques, de très sérieuses difficultés qui sont exposées dans un travail décisif de M. Lenard. La conception selon laquelle la lumière excitatrice est constituée de quanta d'énergie $h\nu$ (Einstein a utilisé à l'époque d'autres notations) permet de concevoir la production de rayons cathodiques (faisceaux d'électrons) de la façon suivante. Des quanta d'énergie pénètrent dans la couche superficielle du corps ; leur énergie est transformée, au moins en partie, en énergie cinétique des électrons. La représentation la plus simple que l'on puisse s'en faire est celle d'un quantum de lumière cédant son énergie à un seul électron ; nous allons supposer que c'est bien ce qui se passe.

Il n'est pas exclu cependant que des électrons ne prennent qu'une partie de l'énergie des quanta de lumière. Un électron auquel une énergie a été fournie à l'intérieur du corps atteint la surface en ayant perdu une partie de son énergie cinétique. Nous allons supposer, de plus, que tout électron doit, pour pouvoir quitter un corps, fournir un travail W_0 (caractéristique du corps). Les électrons qui quittent le corps avec la vitesse normale la plus élevée sont ceux qui se trouvent immédiatement à la surface et qui ont été excités normalement à celle-ci.

L'énergie cinétique de ces électrons est $\mathcal{E}_{c,\max} = h\nu - W_0$

[...] Si la formule obtenue est exacte, l'[énergie cinétique maximale des électrons] en fonction de la fréquence de la lumière excitatrice doit être [...] une droite dont la pente ne dépend pas de la substance étudiée. Autant que je puisse en juger, notre conception n'est pas en contradiction avec les propriétés de l'effet photoélectrique, telles qu'elles ont été observées par M. Lenard. Si chaque quantum d'énergie de la lumière excitatrice cède son énergie à un électron indépendamment de tous les autres, la distribution des vitesses des électrons, c'est-à-dire la qualité du rayonnement cathodique produit, est indépendante de l'intensité de la lumière excitatrice ; en revanche le nombre des électrons qui quittent le corps doit, lui, être toutes choses égales par ailleurs, proportionnel à l'intensité de la lumière excitatrice.

Einstein recevra le prix Nobel de physique en 1922 (au titre de l'année 1921) pour l'interprétation de l'effet photoélectrique à l'aide de la théorie des quanta, lui qui pourtant a été septique toute sa vie à propos de cette théorie.

I.1.b) Interférences avec des photons uniques

Interférences avec photons uniques (trous d'Young) : <https://www.youtube.com/watch?v=I9Ab8BLW3kA&t=375s>

Document 3. Interférences avec des photons uniques

Dans la vidéo réalisée par V. Jacques, à consulter sur <https://www.youtube.com/watch?v=PaTgZrc5iYk>, on visualise la construction de la figure d'interférences réalisées avec des photons uniques (les photons sont envoyés dans le dispositif interférentiel un par un). On observe au cours du temps, l'apparition des impacts des photons qui semblent se répartir aléatoirement (lorsque le nombre de photons déjà envoyé est faible), puis on voit se former la figure d'interférence pour laquelle la répartition des impacts est identique à l'intensité lumineuse obtenue avec une source classique. On voit apparaître ici le double aspect « onde » et « corpuscule » de la lumière.

I.2 Relations de Planck-Einstein (*Rappels*)

♥ À connaître : Relations de Planck-Einstein

Le rayonnement électromagnétique monochromatique (de fréquence ν et de longueur d'onde λ) est constitué de **photons** qui :

- sont des particules de **masse nulle**,
- se déplaçant à la **vitesse de la lumière dans le vide** ($c \approx 3,00.10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$),
- d'énergie :

$$\mathcal{E} = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

avec la constante de Planck $h = 6,62607004.10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

- de **quantité de mouvement** $\vec{p}$ de norme :

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

La direction et le sens de $\vec{p}$ sont ceux de la propagation de l'onde électromagnétique.

⚠ Attention : Erreur à ne pas commettre

- Les expressions $p = \frac{\mathcal{E}}{c}$ et $\mathcal{E} = h\nu$ sont valables **uniquement pour les photons**. Elles ne sont pas valables pour des particules ayant une masse (donc autre que les photons).
- L'expression $\vec{p} = m\vec{v}$ est valable uniquement pour une particule matérielle de masse $m \neq 0$ et non relativiste (c'est-à-dire de vitesse $v \ll c$). Elle n'est pas valable pour un photon.

♥ À connaître : unité Électron-volt

Le Joule s'avère être une unité peu adaptée aux ordres de grandeur rencontrés ici (à l'échelle atomique), on utilise ainsi plutôt l'Électron-volt :

$$1 \text{ eV} = 1,602\,176\,62.10^{-19} \text{ J}$$

Capacité exigible : Évaluer des ordres de grandeurs typiques intervenant dans des phénomènes quantiques.

🍃 Activité n°1 – Quelques ordres de grandeur

R1. Calculer l'énergie d'un photon bleu et d'un photon rouge, en J puis en eV.

Solution: Énergie d'un photon de longueur d'onde λ : $\mathcal{E} = \frac{hc}{\lambda}$

Photon rouge : $\lambda = 750 \text{ nm}$: $\mathcal{E} = 2,65.10^{-19} \text{ J} = 1,65 \text{ eV}$

Photon bleu : $\lambda = 450 \text{ nm}$: $\mathcal{E} = 4,41.10^{-19} \text{ J} = 2,76 \text{ eV}$

- R2. Sachant que pour le Sodium, la fréquence seuil de l'effet photoélectrique se situe à peu près à la limite visible/ultra violet, déterminer l'ordre de grandeur en électron-Volt du travail d'extraction.

Solution: $\lambda_{v/UV} = 400 \text{ nm} \Rightarrow W_0 = \frac{hc}{\lambda_{v/UV}} = 3,1 \text{ eV}$

- R3. Combien de photons sont émis par seconde par un LASER rouge de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, de puissance $\mathcal{P} = 1,0 \text{ mW}$ et de section circulaire $d = 2,0 \text{ mm}$?

Solution: Nombre de photons émis :

$$\begin{aligned} N &= \frac{\text{énergie émise par le LASER en 1 s}}{\text{énergie d'un photon}} \\ &= \frac{\mathcal{P} \times \Delta t}{\frac{hc}{\lambda}} \\ &= 3,2 \cdot 10^{15} \end{aligned}$$

II Dualité onde-corpuscule de la matière

<http://toutestquantique.fr/dualite/>

II.1 Expérience d'interférences entre atomes

Capacité exigible : Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence le comportement ondulatoire de la matière.

Document 4. Expérience de Shimizu, Shimizu, et Takuma. Double-slit Interference with ultracold metastable neon atoms ; Physical Review A ; 1992

Le dispositif utilisé par l'équipe de Shimizu de la Nippon Electronics (NEC) est décrit de façon simplifiée sur la figure 3 ci-dessous. Il utilise des atomes de Néon piégés et refroidis à une température de 2,5 mK de manière à minimiser leur agitation thermique moyenne. Ils sont piégés par des lasers dans une zone d'environ 1 mm, lorsque les lasers sont éteints, les atomes quittent le piège et tombent dans le champ de pesanteur.

Le piège est situé à une hauteur $\ell = 76 \text{ mm}$ au dessus de deux fentes séparées d'une distance $a = 6 \text{ }\mu\text{m}$. La largeur d'une fente est de $2 \text{ }\mu\text{m}$. Un écran MPC (microchannel plate detector) est placé à une distance $D = 113 \text{ mm}$ de la double fente et détecte les atomes de Néon avec une résolution de l'ordre de $20 \text{ }\mu\text{m}$. L'ensemble du dispositif est disposé verticalement.

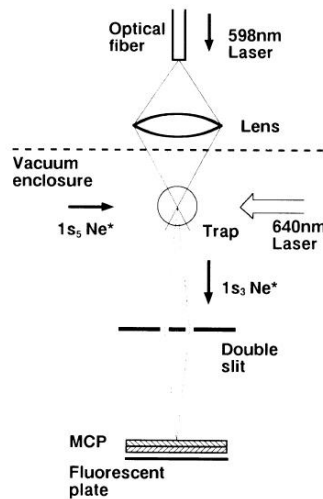


FIG. 1. Schematic experimental configuration. Details of the trap are not shown.



FIG. 2. The interference fringe pattern on the MCP for atoms with the initial velocity of approximately zero. The vertical length of the slit image is 2.8 mm. The spatial resolution of the picture is 20 and 32 μm for the horizontal and vertical directions, respectively. The narrowing of the fringe separation on the upper part is due to the damage of the double-slit structure. This figure contains approximately 6×10^3 atomic counts.

FIGURE 3 – Montage et résultats de l'expérience de l'équipe de la Nippon Electronics

Données :

- Masse molaire du néon : $M = 20 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- La distance séparant deux franges de même type est appelée interfrange i et dans le cas d'une expérience de fentes d'Young, elle reliée à la longueur d'onde par $i = \frac{\lambda D}{a}$.

Interférences d'électrons : <https://www.youtube.com/watch?v=ZJ-0PBRuthc>

Interférences de molécules : https://www.youtube.com/watch?v=NUS6_S1KzC8

II.2 Relation de De Broglie

Capacité exigible : Énoncer et utiliser la relation de Louis de Broglie.

En 1924, Louis DE BROGLIE (Rq : De Broglie ne se prononce pas du tout comme ça s'écrit, mais plutôt « De Breuil ») a eu l'idée d'interpréter la quantification des énergies atomiques à l'aide d'une description ondulatoire des électrons. Il connaissait les travaux de Planck et Einstein sur la dualité onde-corpuscule de la lumière, il a eu l'idée de l'étendre aux particules de masse non nulle : partant de $p = \frac{h}{\lambda}$ énoncée par Einstein pour la lumière, il propose d'associer une longueur d'onde à une particule.

♥ À connaître : Relation de de Broglie (1924)

Louis DE BROGLIE a postulé qu'à toute **particule matérielle de masse m** , de quantité de mouvement $\vec{p}$, on peut associer une **onde de matière**, se propageant à la vitesse v de la particule et de longueur d'onde

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

La quantité de mouvement d'une **particule de masse m non relativiste** (de vitesse faible devant la célérité de la lumière dans le vide : $v < c/10$) s'écrit $p = mv$.

⚠ Attention

- Les expressions $\vec{p} = m\vec{v}$, $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$ ne sont valables que pour une particule de masse m non relativiste. Elles ne sont PAS VALABLES pour :
 - des particules relativistes ($v > c/10$),
 - le photon de masse nulle et de vitesse égale à celle de la lumière.

■ Les formules de Planck-Einstein ne sont PAS VALABLES pour des particules de masse non nulle :
 $E = h\nu$, et $\nu = \frac{c}{\lambda}$ ne doivent pas être utilisées pour des particules de masse non nulle.

💡 Méthode : Quantique ou non quantique ?

Pour déterminer si l'étude d'une particule doit être menée dans le cadre quantique ou non, il faut :

1. Calculer la longueur d'onde de De Broglie $\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$ de la particule.
2. Comparer la longueur d'onde de De Broglie λ_{dB} trouvée aux tailles caractéristiques a du milieu dans lequel se déplace la particule étudiée.
 - Si $\lambda_{dB} \approx a$: la particule a un comportement quantique et l'étude quantique est nécessaire pour rendre compte des observations faites.
 - Si $\lambda_{dB} \ll a$ (au moins un facteur 1000 : $\lambda_{dB} < a/1000$) : l'étude quantique n'est pas nécessaire pour rendre compte des observations faites, l'étude classique suffit.

Capacité exigible : Évaluer les ordres de grandeurs typiques intervenant dans des phénomènes quantiques.

🌿 Activité n°2 – Ordres de grandeur

R1. Estimer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ des atomes de néon dans ce dispositif interférentiel décrit dans le §II.1 .

Solution: *On attendait ici une évaluation de la longueur d'onde avec utilisation de la formule de De Broglie.*

Compte tenu de la question suivante, vous ne pouviez pas utiliser l'interfrange pour calculer la longueur d'onde, sinon vous tourniez en rond !

De même, se contenter d'écrire que la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur de la taille de fentes est un peu léger, car en pratique, avec $\lambda = a/100$ les interférences et la diffraction se produisent, et pourtant il y a deux ordres de grandeur d'écart.

La longueur d'onde de De Broglie est donnée par $\lambda = \frac{h}{p}$.

Supposons que les atomes de Néon ne sont pas relativistes, leur énergie cinétique est donnée par $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$, soit $v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{M/\mathcal{N}_A}} = 1,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \ll c$, ce qui confirme l'hypothèse d'un atome non relativiste.

Ainsi $p = mv$ et
$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{3k_B T m}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{3k_B T M}{\mathcal{N}_A}}} = 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

Exprimer λ à l'aide des grandeurs fournies par l'énoncé, uniquement en littéral, puis faire l'A.N., en une seule fois, sans AN intermédiaire.

ATTENTION aux unités : l'unité SI de la MASSE est le KILOGRAMME, il faut donc convertir la masse molaire en $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

qui est donc un peu plus petite et du même ordre de grandeur que la distance qui sépare les deux fentes et de la taille d'une fente : le cadre de la mécanique quantique est nécessaire pour étudier ce phénomène.

R2. Nadal sert à $200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, la balle est-elle diffractée par la raquette de Federer ?

Solution: Longueur d'onde de De Broglie de la balle de tennis : $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ (la balle n'est pas relativiste).

La masse d'une balle de tennis est d'environ $m = 57$ g.

En convertissant bien toutes les données dans le SI : $\lambda = 2,1 \cdot 10^{-34}$ m, qui est très très très inférieure aux tailles caractéristiques des obstacles rencontrés par la balle. La balle ne sera pas diffractée, l'étude du mouvement de la balle n'aura pas besoin de la mécanique quantique pour être menée.

R3. Des électrons sont accélérés et atteignent une énergie cinétique de 150 eV. Seront-ils diffractés par un réseau d'atome ?

Solution: On nous fournit l'énergie cinétique des électrons, on peut donc en déduire sa quantité de mouvement. En supposons que les électrons ne sont pas relativistes : $\mathcal{E}_c = \frac{p^2}{2m}$, soit $p = \sqrt{2m\mathcal{E}_c}$

Ainsi $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m\mathcal{E}_c}}$

A.N. : $\lambda = 1,0 \cdot 10^{-10}$ m (on n'oubliera pas de convertir l'énergie cinétique en joule).

Vérifions l'hypothèse non relativiste : $v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{m}} = 7,3 \cdot 10^6$ m · s⁻¹ < $\frac{c}{10}$



À retenir

- Le comportement ondulatoire d'une particule est visible dès lors que la longueur d'onde de de Broglie est de l'ordre de grandeur des obstacles qu'elle peut rencontrer.
- À l'inverse si la longueur d'onde de de Broglie est petite devant la taille des obstacles rencontrés, alors le comportement ondulatoire n'est pas visible. (On retrouve une conclusion semblable à celle faite pour le cadre de l'optique géométrique).

III Formalisme quantique

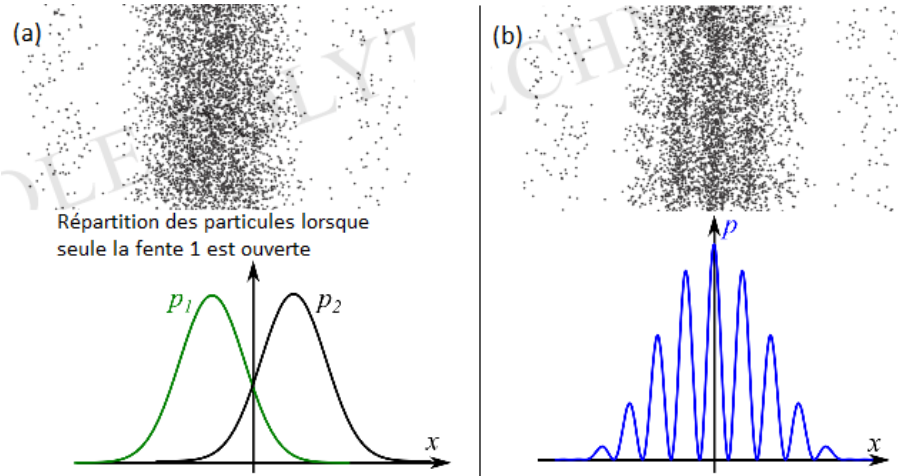
III.1 Notion de fonction d'onde

Capacité exigible : Interpréter une expérience d'interférences (matière ou lumière) « particule par particule » en termes probabilistes.

On étudie l'expérience des fentes d'Young réalisée particule par particule (photons ou électrons ou atomes), c'est-à-dire on envoie les particules dans le dispositif une par une.

Si la plaque est percée d'une seule fente, les atomes se répartissent comme sur la figure (a) ci-dessous.

Si la plaque est percée des deux fentes, les atomes se répartissent comme sur la figure (b) ci-dessous.



On note $p_1(x)$ la probabilité de détecter une particule en x lorsque seule la fente 1 est ouverte et $p_2(x)$ la probabilité de détecter une particule en x lorsque seule la fente 2 est ouverte.

On constate alors que la probabilité $p(x)$ de détection en x n'est pas égale à la somme des probabilités $p_1(x)$ et $p_2(x)$. Après un envoi d'un très grand nombre de particules, nous obtenons la figure d'interférence obtenue avec des ondes lumineuses.

Comment peut-on interpréter cela ? Le fait que $p(x, t) \neq p_1(x, t) + p_2(x, t)$ s'explique par la **nature ondulatoire de l'atome** : les atomes n'ont pas une trajectoire au sens classique, lorsqu'on observe l'impact de l'atome dans une expérience d'interférences nous ne pouvons pas dire par quelle fente il est passé. En fait tout se passe comme si l'atome est « passé » par les deux fentes à la fois, comme une onde.

Pour étudier les interférences entre deux ondes dans le chapitre 28 nous avons raisonné à l'aide des signaux transportés par les deux ondes, $s_1(M, t)$ et $s_2(M, t)$, et nous avons ensuite calculé l'amplitude de l'onde résultante $s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$: $S_m^2 = S_{1m}^2 + S_{2m}^2 + 2S_{1m}S_{2m} \cos(\Delta\varphi)$.

En physique quantique, on utilisera la notion de fonction d'onde, qui joue un rôle similaire au signal introduit pour les ondes.



Définition : Fonction d'onde

En mécanique quantique, une particule est décrite par une **fonction d'onde** à valeurs complexes $\Psi(M, t)$ dont le module au carré $|\Psi(M, t)|^2$ est la **densité de probabilité de présence** de la particule au point M à l'instant t .

Pour un problème à une dimension, selon un axe (Ox) , où l'état de la particule est décrit par la fonction d'onde $\Psi(x, t)$, la **probabilité** de trouver la particule entre x et $x + dx$ à l'instant t est $dp = |\Psi(x, t)|^2 dx$.

La probabilité de trouver la particule sur un intervalle $[a, b]$ est donc égale à l'intégrale de $|\Psi(x, t)|^2$ sur cet intervalle : $p(a \leq x \leq b) = \int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx$

Si la particule se situe nécessairement dans l'intervalle $[a, b]$, alors la probabilité $p(a \leq x \leq b) = 1$.

Lorsque les deux fentes sont ouvertes, la probabilité de détecter une particule en un point x du détecteur est reliée à la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ par $p(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$, avec $\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t)$ où Ψ_i la fonction

d'onde lorsque seule la fente i est ouverte.

$$\begin{aligned} p(x, t) &= |\Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t)|^2 \\ &= (\Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t)) \times (\Psi_1^*(x, t) + \Psi_2^*(x, t)) \\ &= |\Psi_1(x, t)|^2 + |\Psi_2(x, t)|^2 + \underbrace{\Psi_1 \Psi_2^* + \Psi_1^* \Psi_2}_{\text{terme d'interférences}} \\ &= p_1(x, t) + p_2(x, t) + \text{terme d'interférences} \\ p(x, t) &\neq p_1(x, t) + p_2(x, t) \end{aligned}$$

Le terme d'interférences est équivalent au terme $2S_{1m}S_{2m} \cos(\Delta\varphi)$ qu'on a établi dans le chapitre 11 (interférences de deux ondes).

III.2 Inégalité de Heisenberg

III.2.a) Inégalité de Heisenberg

Que dit la relation d'incertitude de Heisenberg (ou inégalité de Heisenberg) ? (D'après « La mécanique quantique sans douleur », François Vannucci (Ellipse))

Le dilemme de la connaissance limitée que permet la mécanique quantique est résumé par les fameuses relations d'incertitude de Heisenberg : $\delta x \times \delta(mv) = h$, où x , m et v désignent la position, la masse et la vitesse de la particule étudiée, et δ indique l'incertitude qui les affecte. Si $\delta x = 0$, c'est-à-dire si la position est très précisément connue, $\delta(mv)$ est infiniment grand, on ne peut plus rien dire sur la vitesse qui devient indéterminée. Parce que h n'est pas nul, il est impossible de mesurer simultanément les deux grandeurs conjuguées de façon sûre et certaine. Il est impossible de connaître précisément l'état d'une particule à la fois dans l'espace et le temps. Si on connaît bien sa position, on connaît mal son mouvement et inversement. Il faut choisir ce qui nous intéresse en premier lieu.

Cette ignorance n'est pas due aux techniques expérimentales d'observation. Ce n'est pas une imperfection accidentelle, mais c'est la conséquence d'une loi naturelle. Aucun progrès technique n'est à espérer sur ce front. Ainsi, il est vain d'attribuer position et vitesse à une particule, la notion de position n'est applicable qu'exceptionnellement, quand on renonce à connaître l'état de mouvement associé.

Parler de précision d'une mesure n'a de sens que si les grandeurs à observer possèdent une valeur déterminée indépendante de la mesure. Les incertitudes qu'on constate ici ne représentent pas des déviations possibles dans la détermination des valeurs « réelles ». Il ne s'agit pas d'une erreur mais d'une indéfinition. La physique classique laissait espérer une connaissance complète d'un état. Ici, ce credo s'effondre et les valeurs recherchées ne sont plus susceptibles d'être mesurées avec une complète certitude. Avec la mécanique quantique, la détermination exacte relève de l'illusion, la possibilité d'une incompréhension totale qui expliquerait l'état précis de l'Univers semble hors de portée.

♥ À retenir : Inégalité de Heisenberg (1927)

En 1927, Heisenberg formula la **relation d'indétermination** qui énonce qu'il est impossible de connaître infiniment précisément à la fois la position et la quantité de mouvement d'une particule. Pour une particule repérée par sa position x , et ayant pour quantité de mouvement $p_x = mv_x$, l'indétermination intrinsèque Δx sur la position et Δp_x sur la quantité de mouvement sont reliées par

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar \quad \text{avec} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054.10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

La mécanique classique où la particule est décrite par la donnée simultanée de sa position et sa quantité de mouvement est en contradiction avec ce principe, qui dit que si on connaît la quantité de mouvement de la particule à Δp_x près, on ne pourra pas connaître sa position x avec une précision meilleure que $\frac{\hbar}{\Delta p_x}$, mais compte-tenu de la valeur de $\hbar$, cela est sans conséquence à l'échelle macroscopique, mais les conséquences sont nombreuses à l'échelle microscopique.

⚠ Attention

Cette inégalité est une relation d'indétermination intrinsèque. Elle n'a aucun rapport avec une quelconque incertitude expérimentale.

Capacité exigible : Évaluer les ordres de grandeurs typiques intervenant dans des phénomènes quantiques.

🍃 Activité n°3 – Encore des ordres de grandeur !

- R1. Pour une boule de pétanque de 0,7 kg dont on connaît la position à la taille d'un atome près, quelle est l'indétermination minimale sur la vitesse ? Commenter.

Solution:

Les indéterminations sur la position et la vitesse sont reliées par $\Delta x \times m \Delta v > \hbar$

Donc l'indétermination sur la vitesse est donnée par $\Delta v > \frac{\hbar}{m \Delta x}$.

A.N. : avec $\Delta x \approx 10^{-10}$ m, $\Delta v > 1,5 \cdot 10^{-24}$ m · s⁻¹, qui est infime devant l'incertitude expérimentale !
L'indétermination quantique imposée par la relation de Heisenberg n'intervient pas ici.

- R2. Pour un électron dont on connaît sa position à la taille d'un atome près, quelle est l'indétermination minimale sur la vitesse ? Commenter.

Solution:

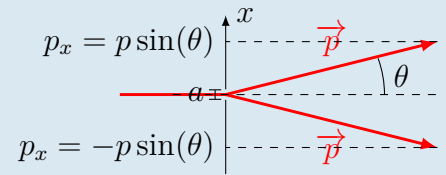
En appliquant la même relation que précédemment, $\Delta v > 1,6 \cdot 10^6$ m · s⁻¹ : si la position de l'électron est connue à la taille d'un atome près, alors la vitesse de l'électron est indéterminée à un centième de la vitesse de la lumière près. Ce qui représente une indétermination qui paraît importante.

III.2.b) Analogie avec la diffraction par une fente

Capacité exigible : À l'aide d'une analogie avec la diffraction des ondes lumineuses, établir l'inégalité en ordre de grandeur : $\Delta p \Delta x \geq \hbar$.

Démonstration à maîtriser n°4 – Inégalité de Heisenberg

Considérons un photon dont on souhaite connaître la position selon l'axe Ox . Pour savoir s'il se trouve entre 0 et a il suffit de placer une fente entre ces deux abscisses, si le photon passe c'est qu'il était entre ces deux abscisses.



→ L'indétermination sur la position du photon est la largeur de la fente : $\Delta x = a$

Si on souhaite connaître la position du photon plus précisément il est nécessaire de réduire la taille de la fente, ce qui provoquerait une diffraction plus importante, la direction du photon serait donc encore moins bien connue.

→ D'après la relation de la diffraction : $\sin(\theta) = \frac{\lambda}{a}$

→ D'après le schéma, l'écart extrême de la composante de la quantité de mouvement due au passage par la fente est : $\sin(\theta) = \frac{p_x}{p}$, soit $\Delta p_x = p_x - (-p_x) = 2p \sin(\theta)$

→ D'après la relation de De Broglie : $\lambda = \frac{h}{p}$

→ On déduit des questions précédentes : $\Delta x \times \Delta p_x = a \times 2p \sin(\theta) \Leftrightarrow \Delta x \times \Delta p_x = a \times 2 \frac{h}{\lambda} \times \frac{\lambda}{a}$

Soit $\Delta x \Delta p_x \approx 2h$

On retrouve, en ordre de grandeur, la relation d'inégalité de Heisenberg.

IV Quantification de l'énergie

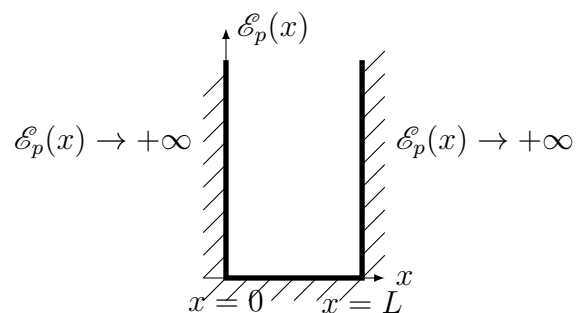
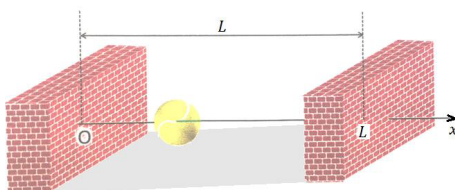
IV.1 Particule confinée dans un puits infini

IV.1.a) Position du problème

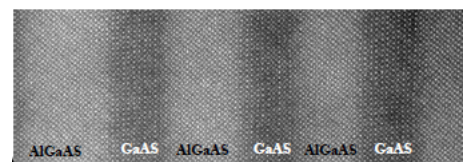
On étudie une particule de masse m confinée dans un puits de potentiel infini de largeur L , c'est-à-dire dans une zone de l'espace où l'énergie potentielle est :

$$\mathcal{E}_p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < L \\ +\infty & \text{si } x > L \end{cases}$$

En mécanique classique, on peut imaginer que cette énergie potentielle est une énergie potentielle de pesanteur, par exemple. Ainsi la situation correspond à une balle bloquée entre deux murs infiniment hauts distants de L :



En mécanique quantique, cela correspond par exemple à la situation d'un électron dans un semi-conducteur de silicium Si, ou bien d'arséniure de gallium AsGa. L'électron se retrouve confiné dans une des couches du semi-conducteur :



IV.1.b) Énergie minimale

Capacité exigible : Exploiter l'inégalité de Heisenberg spatiale pour mettre en évidence l'existence d'une énergie minimale de confinement.

🍃 Démonstration à maîtriser n°5 – Énergie minimale de confinement

- R1. Exprimer l'énergie de la particule de masse m dans le puits de potentiel en fonction de la quantité de mouvement p_x et de la masse m .

Solution: L'énergie potentielle de la particule est nulle, donc l'énergie de la particule est égale à l'énergie cinétique : $\mathcal{E} = \frac{p_x^2}{2m}$

La quantité de mouvement p de la particule présente une indétermination quantique $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}$.
Or $\langle p_x \rangle = 0$, donc $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle}$.

- R2. En assimilant p_x à Δp_x (en ordre de grandeur) et en utilisant l'inégalité de Heisenberg, établir l'inégalité vérifiée par l'énergie de la particule en fonction de $\hbar$, m et L .

Solution:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{p_x^2}{2m} \\ \mathcal{E} &\sim \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} \\ \text{or } \Delta p_x &> \frac{\hbar}{\Delta x} \\ \text{donc } \mathcal{E} &> \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} \\ \text{or } \Delta x &= L \\ \mathcal{E} &> \frac{\hbar^2}{2mL^2}\end{aligned}$$

- R3. En déduire l'énergie minimale de la particule confinée dans le puits. Comparer à la situation classique.

Solution: L'énergie minimale de la particule confinée vaut $\mathcal{E}_{\min} = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$ et est d'autant plus élevée que la largeur du puits est faible.

Classiquement, l'énergie minimale de la particule confinée au fond du puits est nulle, c'est le cas où la particule est immobile.

Quantiquement, l'inégalité de Heisenberg ne permet pas à la particule d'être immobile ($p_x = 0$ et $\Delta p_x = 0$) tout en étant confinée ($\Delta x = L \neq \infty$).

IV.1.c) Quantification de l'énergie d'une particule confinée

Capacité exigible : Obtenir les niveaux d'énergie par analogie avec les modes propres d'une corde vibrante. Établir le lien qualitatif entre confinement spatial et quantification.

En mécanique classique : La particule est décrite par sa trajectoire, c'est-à-dire sa position (et sa vitesse) à chaque instant. La particule peut prendre n'importe quelle valeur de position et de vitesse (donnée par les conditions initiales), donc n'importe quelle valeur d'énergie totale. Elle va effectuer d'incessants allers-retours en rebondissant sur les parois.

En mécanique quantique : Il n'y a plus de notion de trajectoire, puisque (rappelons-le) la particule n'a pas une position parfaitement définie dans le puits, et sa vitesse non plus n'est pas parfaitement définie (particule délocalisée). À la place de cette notion de trajectoire, la particule est décrite par une « fonction d'onde » : $\Psi(x, t)$, qui nous renseigne sur sa probabilité de présence.

<https://toutestquantique.fr/quantification/>

💡 Méthode : Comment établir les niveaux d'énergie d'une particule confinée ?

1. Utiliser l'analogie avec la corde vibrante fixée à ses deux extrémités pour déterminer l'expression des longueurs d'onde possibles des particules confinées : $\lambda_n = \frac{2L}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Utiliser la relation de De Broglie pour déterminer les valeurs p_n de la quantité de mouvement pouvant être prises par la particule confinée.
3. En déduire les valeurs de l'énergie totale $\mathcal{E}_n = \frac{p_n^2}{2m}$ de la particule pouvant être prises par la particule confinée (en fonction de m , $\hbar$ et L).

🍃 Démonstration à maîtriser n°6 – Quantification de l'énergie d'une particule confinée

- R1. Quelles conditions sur $\Psi(x < 0, t)$ et $\Psi(x > L, t)$ sont imposées par la présence des deux barrières infinies ? En déduire les valeurs de $\Psi(x = 0, t)$ et $\Psi(x = L, t)$.

Solution: Les deux barrières infinies imposent que la probabilité de trouver la particule en $x < 0$ et en $x > L$ est nulle. Par conséquent la fonction d'onde est nulle dans ces zones-là. Par continuité de la fonction d'onde : $\forall t, \Psi(x = 0, t) = 0$ et $\Psi(x = L, t) = 0$

- R2. À quelle situation rencontrée dans un chapitre précédent, la situation du confinement vous fait-elle penser ? À quel type d'onde va correspondre l'onde de matière $\Psi(x, t)$?

Solution: On retrouve la situation de la corde fixée à ses deux extrémités, où le déplacement vertical était nul aux deux extrémités.
L'onde de matière $\Psi(x, t)$ est donc une onde stationnaire.

- R3. En repartant des résultats obtenus dans le chapitre n°11, donner les longueurs d'onde possibles des particules confinées en fonction de L et d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution: D'après les calculs effectués dans le chapitre n°11, les longueurs d'onde des ondes de matières pouvant exister dans le puits infini sont quantifiées et prennent les valeurs $\lambda_n = \frac{2L}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
Nous souhaitons déterminer les énergies possibles.

- R4. Exprimer l'énergie de la particule dans le puits en fonction de p et m , puis en fonction de λ , h et m .

Solution: Énergie de la particule dans le puits : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$, or dans le puits l'énergie potentielle est nulle.
Ainsi $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c = \frac{p^2}{2m}$
Or d'après la relation de de Broglie : $\lambda = \frac{h}{p}$, soit $p = \frac{h}{\lambda}$.

- R5. En déduire que l'énergie de la particule confinée est quantifiée, et exprimer les niveaux d'énergie.

Solution:

La longueur d'onde des ondes de matière étant quantifiée, la quantité de matière l'est également, donc l'énergie totale le sera également.

$$\text{Énergie totale : } \mathcal{E}_n = \frac{1}{2m} \times \frac{h^2}{\lambda_n^2}$$

$$\text{Or } \lambda_n = \frac{2L}{n}, \text{ donc } \mathcal{E}_n = \frac{h^2}{2m} \times \frac{n^2}{4L^2}$$

L'énergie de la particule confinée dans le puits infini est quantifiée : $\mathcal{E}_n = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

 Activité n°7 – Puits quantique

Une hétérostructure semi-conductrice AlGaAs/GaAs/AlGaAs forme un potentiel en « cuvette » de largeur de 3,0 nm et est utilisée dans les lasers de poche. On utilise une masse effective $m^* = 0,067m_e$ pour rendre du compte du fait que les électrons sont dans un semi-conducteur, avec m_e la masse de l'électron.

Déterminer la fréquence des photons émis lors de la transition du 2^e niveau au 1^{er} niveau. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette radiation ?

Solution: Lors de la transition du 2^e niveau au 1^{er} niveau, un photon d'énergie $\varepsilon = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ est émis.

$$\text{Le photon est d'énergie } \varepsilon = h\nu, \text{ ainsi } h\nu = \frac{4h^2}{8m^*L^2} - \frac{h^2}{8m^*L^2}$$

$$\text{Soit } \nu = \frac{3h}{8m^*L^2} = \frac{3h}{8 \times 0,067m_eL^2}$$

$$\text{A.N. } \nu = 4,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Pour déterminer le domaine dont fait partie ce rayonnement émis, il est préférable de déterminer la longueur d'onde : $\lambda = \frac{c}{\nu}$, soit $\lambda = 6,6 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 662 \text{ nm}$, ce qui correspond à un rayonnement visible de couleur rouge.

IV.2 Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène

Capacité exigible : Modèle planétaire de Bohr. Exploiter l'hypothèse de quantification du moment cinétique orbital pour obtenir l'expression des niveaux d'énergie électronique de l'atome d'hydrogène.

🍃 Démonstration à maîtriser n°8 – Quantification des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène

On considère l'interaction électrostatique entre l'électron et le proton d'un atome d'hydrogène.

En 1911, l'expérience de Rutherford montre qu'il existe un noyau quasi ponctuel chargé positivement au sein de l'atome. Le modèle précédent de l'atome dû à Thomson (électrons localisés dans une sphère chargée uniformément positivement en volume) est alors invalidé. Rutherford propose un modèle planétaire dans lequel les électrons décrivent des trajectoires circulaires autour d'un noyau ponctuel fixe.

En 1923, *Niels Bohr* postule, d'une part, l'existence d'orbites circulaires sur lesquelles l'électron ne rayonne pas (postulat mécanique) et, d'autre part, que le mouvement d'un électron, d'une orbite à l'autre se traduit par l'émission ou l'absorption d'énergie électromagnétique (postulat optique).

Le **postulat mécanique** traduit la quantification de la norme du moment cinétique de l'électron par rapport au centre de l'atome :

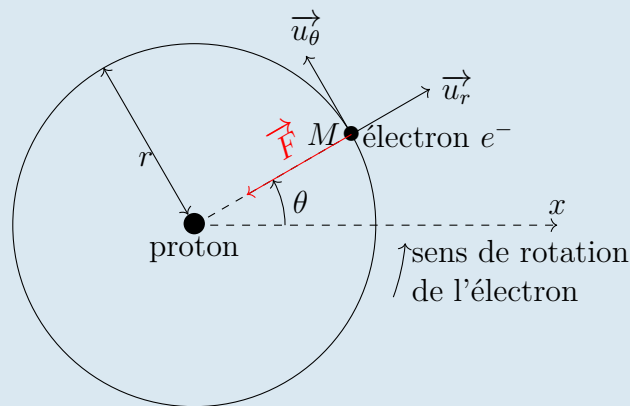
$$L = n\hbar = n \frac{h}{2\pi}$$

où n est le nombre quantité principal, $n \in \mathbb{N}^*$ et h la constante de Planck.

Nous allons étudier le mouvement de l'électron, de masse m_e , de l'atome d'hydrogène, sur une orbite circulaire de rayon r . Le noyau est considéré, dans le référentiel galiléen du laboratoire, fixe, ponctuel et placé en son centre C . Le centre de la trajectoire circulaire de l'électron est donc C .

R1. Donner l'expression de la force Coulombienne et de l'énergie potentielle associée exercée par le proton sur l'électron, en fonction de la charge élémentaire, e , de la perméabilité absolue du vide ε_0 , de la distance r séparant le proton et l'électron et d'un vecteur unitaire.

Solution:



Système : électron de masse m_e et de charge $q = -e$

Référentiel : du laboratoire, lié au proton, considéré galiléen à l'échelle de l'expérience.

Actions mécaniques : force coulombienne exercée par le proton sur l'électron $\vec{f} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

Cette force est attractive car elle s'exerce entre deux particules chargées de signe opposé, ce qui est bien conforme à son expression (de sens opposé à $\vec{u}_r$).

Énergie potentielle coulombienne de l'électron : $\mathcal{E}_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

R2. Établir l'expression de la norme du vecteur vitesse de l'électron dans l'hypothèse du mouvement circulaire, en fonction de m_e , e , ε_0 et r .

Solution:

On applique le PFD à l'électron : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

Or la trajectoire de l'électron est supposée circulaire, ainsi $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_r$ et $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{r}\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$

En projetant le PFD selon $\vec{u}_r$, on obtient : $-m_e \frac{v^2}{r} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Soit :
$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}$$

- R3. Exprimer le vecteur moment cinétique de l'électron par rapport à C, en fonction de e, m_e, ε₀, r et d'un vecteur unitaire.

Solution: Moment cinétique de l'électron par rapport à C (le proton) :

$$\begin{aligned}\vec{L}_C(M) &= \vec{CM} \wedge m_e \vec{v}(M) \\ &= r\vec{u}_r \wedge m_e v\vec{u}_\theta \\ &= m_e r \times \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}} \vec{u}_z \\ &= e \sqrt{\frac{m_e r}{4\pi\epsilon_0}} \vec{u}_z\end{aligned}$$

$$\vec{L}_C(M) = e \sqrt{\frac{m_e r}{4\pi\epsilon_0}} \vec{u}_z$$

- R4. Montrer que le postulat mécanique implique que l'électron ne peut se trouver que sur certaines orbites de rayon $r_n = r_0 n^2$.

Préciser l'expression de r₀ en fonction de ε₀, h, m_e et e. Calculer la valeur de r₀.

Solution: Le postulat mécanique indique que :

$$\begin{aligned}\|\vec{L}_C(M)\| &= n\hbar \\ e \sqrt{\frac{m_e r}{4\pi\epsilon_0}} &= n\hbar \\ \frac{m_e r e^2}{4\pi\epsilon_0} &= n^2 \hbar^2 \\ r &= n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \\ r &= n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{4\pi^2 m_e e^2}\end{aligned}$$

soit
$$r = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} n^2$$

Le rayon de l'orbite de l'électron est quantifié, et vaut n² fois

$$r_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

- R5. Exprimer l'énergie cinétique de l'électron en fonction de e, m_e, ε₀ et r. Quelle est son lien avec l'énergie

potentielle coulombienne ?

Solution: Énergie cinétique de l'électron :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c &= \frac{1}{2}m_e v^2 \\ &= \frac{1}{2}m_e \times \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r} \\ &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \\ &= -\frac{\mathcal{E}_p}{2}\end{aligned}$$

R6. Exprimer l'énergie mécanique en fonction de e , m_e , ϵ_0 et r .

Solution: L'énergie mécanique s'exprime alors : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$

R7. Montrer que le postulat mécanique implique que l'électron qui se trouve sur une orbite de rayon r_n possède une énergie mécanique $E_M = -\frac{E_0}{n^2}$.

Préciser l'expression de E_0 , en fonction de ϵ_0 , h , m_e et e . Faire l'application numérique, en joule puis en électronvolt.

Solution:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \\ &= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \times \frac{\pi m_e e^2}{\epsilon_0 h^2 n^2} \\ &= -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \times \frac{1}{n^2} \\ &= -\frac{E_0}{n^2}\end{aligned}$$

Les niveaux d'énergie sont quantifiés, et l'énergie mécanique vaut $E_M = -\frac{E_0}{n^2}$, avec

$$E_0 = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 13,6 \text{ eV}$$