Thème I. Ondes et signaux

TD n°29 Introduction à la physique quantique – *Corrigé*

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Est-ce bien quantique ?

R1. Une personne marche dans la rue. Évaluer sa vitesse typique v, sa quantité de mouvement p et la longueur d'onde λ de de Broglie associée. Que penser de l'importance de la description quantique du mouvement de cette personne ?

Solution: $v = 6\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 1,7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $m = 70$ kg
Donc $p = 117\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
Longueur d'onde de De Broglie : $\lambda = \dfrac{h}{p} = 5,7.10^{-36}$ m

R2. Êtes-vous diffracté par la porte de la salle de cours ?

Solution: NON !! $\lambda \lll\ll$ taille de la porte !

R3. L'institut Laue-Langevin à Grenoble étudie la structure de matériaux en les plaçant dans un faisceau de neutrons de masse $1,6.10^{-27}$ kg et d'énergie comprise entre 10^{-3} et 10^{-1} eV. Justifier que l'étude de la figure de diffraction des neutrons peut permettre d'étudier le matériau à l'échelle de la distance inter-atomique.

Solution: Longueur d'onde de De Broglie : $\lambda = \dfrac{h}{mv}$, or $E = \dfrac{1}{2}mv^2$, donc $v = \sqrt{\dfrac{2E}{m}}$
Soit $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2mE}} = 2,9.10^{-10}$ m, avec E à convertir en J !
λ est donc de l'ordre de grandeur de la distance inter-atomique, donc ces neutrons permettront d'étudier le matériau.

Exercice n°2 Fluorescence

Les boissons « Tonic » (de type Schweppes®, Canada Dry®, ...) contiennent de la quinine, une molécule présentant des propriétés de fluorescence. La quinine absorbe des photons de longueur d'onde $\lambda = 350$ nm (produits par les lampes UV dites à « lumière noire »).

R1. Déterminer la valeur ΔE de l'augmentation d'énergie de la quinine (en Joule et en eV).

Solution: $\Delta E = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda} = 5,68.10^{-19}\ \text{J} = 3,5$ eV

Suite à un phénomène de conversion interne, la quinine réémet un photon dont l'énergie est diminuée de $0,8$ eV par rapport à ΔE.

R2. Quelle est la longueur d'onde de la radiation émise par fluorescence ? À quelle couleur correspond-elle ? Commenter.

Solution: $\Delta E' = \Delta E - 0,8\ \text{eV} = 2,7$ eV
$\lambda' = \dfrac{hc}{\Delta E'} = 460$ nm, soit dans le bleu !

Exercice n°3 Poussé par le Soleil ?

R1. Le flux lumineux solaire reçu sur Terre vaut $\phi = 1 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. En déduire le flux de photons ϕ_{ph} correspondant, c'est-à-dire le nombre de photons arrivant par mètre carré par seconde.

> **Solution:** $\phi_{\text{ph}} = \dfrac{\text{énergie totale}}{\text{énergie d'un photon}} \times \dfrac{1}{S\Delta t} = \dfrac{\phi \Delta t S}{h\nu S \Delta t} = \dfrac{\phi\lambda}{hc} = 2,5.10^{21} \text{ m}^{-2}$

R2. Ces photons sont absorbés par un homme dos au Soleil. Quelle quantité de mouvement reçoit-il en une seconde ?

> **Solution:**
> $p_{\text{tot}} = \phi_{\text{ph}} \times S_{\text{homme}} \times \Delta t \times p_{1 \text{ photon}} = \phi_{\text{ph}} \times S_{\text{homme}} \times \dfrac{E}{c} \times \Delta t = \phi_{\text{ph}} \times S_{\text{homme}} \times \dfrac{h}{\lambda} \times \Delta t = 6,7.10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,
> avec $S_{\text{homme}} = 2 \text{ m}^2$ et $\Delta t = 1$ s.

R3. À quelle force cela équivaut-il ? Commenter la valeur numérique obtenue.

> **Solution:** D'après le PFD : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}$, soit $F = 6,7.10^{-6}$ N : on ne sent rien !

Exercice n°4 Piégeage d'atomes

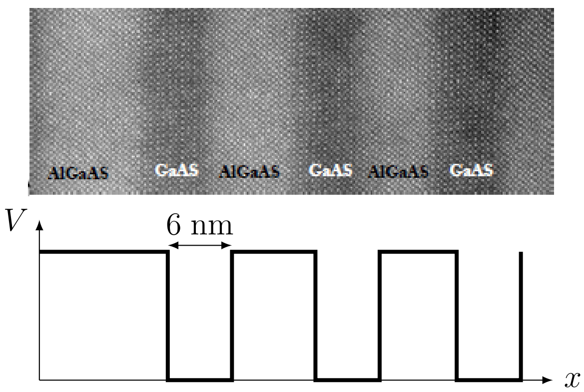
Par des techniques de refroidissement laser et confinement magnétique, on peut piéger un nuage d'atomes de sodium. Peut-on améliorer le piégeage en gardant la même dispersion des vitesses ?

- Masse d'un atome de sodium : $m = 4.10^{-26}$ kg ;
- En étudiant les positions des atomes du nuage, on mesure une dispersion $\Delta x \approx 3$ µm ;
- En étudiant les vitesses de ces atomes, on mesure une dispersion $\Delta v \approx 2 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

> **Solution:** D'après la relation de Heisenberg : $\Delta x \Delta p > \hbar$, soit $\Delta x > \dfrac{\hbar}{m\delta v} = 1,3.10^{-6}$ m
> Il est possible de faire un tout petit mieux en gardant la même dispersion en vitesse.

Exercice n°5 Absorptions des photons par un puits quantique

Une hétérostructure semi-conductrice AlGaAs/-GaAs/AlGaAs forme un potentiel en « cuvette » de largeur de 6,0 nm.



R1. En utilisant l'analogie (que l'on justifiera !) avec la corde vibrante, déterminer l'expression des énergie totale $\mathscr{E}_n$ d'une particule libre de masse m confinée dans un puits quantique de largeur L. On exprimera le résultat en fonction de m, de L, de la constante de Planck h et d'un entier naturel n non nul.

> **Solution:** Dans un puits infini, la présence des deux parois infinies ne permet pas à la particule de passer dans les zones $x < 0$ et $x > L$, donc la probabilité de trouver la particule dans ces zones-là sont nulles, donc $\Psi(x < 0) = 0 = \Psi(x > L)$

Par continuité de la fonction d'onde $\Psi(x=0) = 0 = \Psi(x=L)$
La fonction d'onde Ψ associée à une particule joue le rôle du signal associé à une onde (cf chapitres 4 et 5).
Dans le chapitre 5, nous avons étudié une corde accrochée à ses deux extrémités pour laquelle $s(x = 0, t) = 0 = s(x = L, t)$. La corde était alors siège d'une **onde stationnaire caractérisée par l'existence de nœuds et de ventres.**
Ainsi l'onde de matière $\Psi(x, t)$ va correspondre à une **onde stationnaire**.
Ainsi, les longueurs d'onde associées aux particules confinées ne peuvent prendre que certaines valeurs, qui par analogie avec la corde fixée à ses deux extrémités, sont données par : $L = n\dfrac{\lambda_n}{2}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Les niveaux d'énergie sont alors quantifiés : $\mathscr{E}_n = \dfrac{p^2}{2m_e^*} = \dfrac{h^2}{2m_e^*\lambda_n^2}$

Ainsi les niveaux d'énergie valent $\boxed{\mathscr{E}_n = n^2\dfrac{h^2}{8m_e^*L^2}}$

R2. Lorsqu'un électron passe du niveau $n = 2$ au niveau fondamental, déterminer pour les photons émis, la fréquence $\nu_{2,1}$, ainsi que la longueur d'onde correspondante $\lambda_{2,1}$ pour un puits à semi-conducteur à base d'arséniure de gallium (AsGa), de largeur $L = 6,0$ nm et tel que $m = 0,067m_e$.

Solution: L'énergie d'un photon émis lors de la transition d'une particule du niveau 2 au niveau 1 vaut
$h\nu_{2,1} = \dfrac{2^2h^2}{8m_e^*L^2} - \dfrac{h^2}{8m_e^*L^2} = 3\dfrac{h^2}{8m_e^*L^2} \Leftrightarrow \boxed{\nu_{2,1} = \dfrac{3h}{8m_e^*L^2} = 1,13.10^{14}\text{ Hz}}$, donc $\lambda_{2,1} = \dfrac{c}{\nu_{2,1}} = 2,65.10^{-6}$ m
L'énergie d'un photon émis lors de la transition d'une particule du niveau 3 au niveau 1 vaut
$h\nu_{3,1} = \dfrac{3^2h^2}{8m_e^*L^2} - \dfrac{h^2}{8m_e^*L^2} = 8\dfrac{h^2}{8m_e^*L^2} \Leftrightarrow \boxed{\nu_{3,1} = \dfrac{h}{m_e^*L^2} = 3,02.10^{14}\text{ Hz}}$, donc $\lambda_{3,1} = \dfrac{c}{\nu_{3,1}} = 9,97.10^{-7}$ m

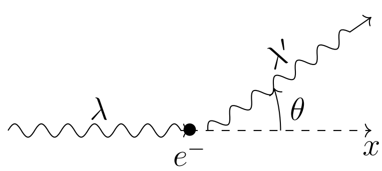
R3. À quel domaine du spectre appartient la longueur d'onde des photons obtenue dans la question précédente ? Proposer des applications pratiques de tels puits quantiques.

Solution: Ces radiations sont situées dans l'infra-rouge, et ces systèmes peuvent être utilisés pour réaliser des laser dans l'infrarouges.

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°6 Effet Compton

Arthur H. Compton (1892-1962) découvrit qu'un rayonnement (X ou gamma) incident pouvait être diffusé par la matière (en fait par les électrons) et perdre de l'énergie. Pour expliquer cette observation, considérons qu'un photon de fréquence ν entre en collision avec un électron au repos de masse m_e, on note (Ox) la direction du photon incident. Suite à la collision, un photon (photon diffusé) de fréquence ν' est alors émis dans une direction qui forme un angle θ avec (Ox) et l'électron acquiert une quantité de mouvement $\overrightarrow{p_e}$.



Il a montré que l'onde était diffusée (déviée) dans une certaine gamme de direction θ vérifiant
$\lambda' - \lambda = \dfrac{h}{mc}\Big(1 - \cos(\theta)\Big)$, où λ' est la longueur d'onde diffusée, m la masse de l'électron, h la constante de Planck et c la vitesse de la lumière.

R1. Montrer que $\dfrac{h}{mc}$ est homogène à une longueur et la calculer.

Solution: $\left[\dfrac{h}{mc}\right] = \dfrac{[J].T}{M.L.T^{-1}} = \dfrac{M.L^2.T^{-2}.T}{M.L.T^{-1}} = L$, donc $\dfrac{h}{mc}$ est bien une longueur. A.N. : $\boxed{\dfrac{h}{mc} = 2,43.10^{-12}\text{ m}}$

R2. Pourquoi cette expérience est-elle intéressante spécialement pour les rayons X ?

> **Solution:** Les rayons X étant d'énergie élevée et donc de longueur d'onde faible, ils permettent de sonder la matière au niveau atomique (en effet une onde peut sonder la matière à des échelles proches de celles de sa longueur d'onde).

R3. À l'aide de la relation fournie, justifier que le photon perd de l'énergie.

> **Solution:** Dans cette expérience la longueur d'onde des rayons X varie telle que : $\lambda' - \lambda = \dfrac{h}{mc}\Big(1 - \cos(\theta)\Big)$.
> $\cos(\theta) \in [-1, 1]$, donc $1 - \cos(\theta) \in [-1, 1]$, ainsi $\lambda' - \lambda > 0$.
> La longueur d'onde des rayons X augmente au cours de l'expérience, donc l'énergie des rayons X diminue puisque $E = \dfrac{hc}{\lambda}$ (E et λ sont inversement proportionnelles).

R4. Pour des rayons X incidents tels que $\lambda = 7,08.10^{-11}$ m, Compton a observé des rayons X diffusés à 90°. Quelle est leur longueur d'onde ?

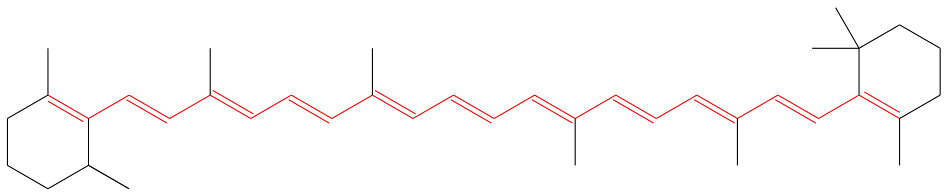
> **Solution:** Pour des rayons X incidents tels que $\lambda = 7,08.10^{-11}$ m, Compton a observé des rayons X diffusés à 90°, donc $\cos(\theta) = 0$ et $\lambda' - \lambda = \dfrac{h}{mc} \Leftrightarrow \boxed{\lambda' = \lambda + \dfrac{h}{mc} = 7,23.10^{-11}\ \text{m}}$

R5. Quelle est l'énergie perdue par un photon ? Conclure sachant qu'une énergie d'ionisation est de l'ordre de la dizaine d'eV ?

> **Solution:** L'énergie perdue par un photon au cours de la diffusion est donnée par :
> $\boxed{\Delta E = \dfrac{hc}{\lambda'} - \dfrac{hc}{\lambda} = -5,83.10^{-17}\ \text{J} = -364\ \text{eV}}$
> Au cours de cette expérience, l'énergie perdue par les photons et donc fournie aux atomes est supérieure à l'énergie d'ionisation, donc les atomes sont ionisés.

Exercice n°7 Puits carré et potiron

Dans le cas d'une molécule de β-carotène, l'interaction de la lumière avec la matière dans le domaine visible dépend essentiellement des électrons π qui peuvent se déplacer le long de la molécule.



Dans un modèle très simple, les électrons π sont libres de se déplacer dans un puits de potentiel infiniment profond et de largeur L, L correspondant à la longueur des liaisons le long desquelles les électrons π sont délocalisés. Dans le cas du β-carotène : $L = 1,83$ nm.

R1. En exploitant une analogie avec la corde vibrante de longueur L fixée à ses extrémités, déterminer les niveaux d'énergie E_n d'un électron dans le puits de potentiel en introduisant un nombre entier n.

> **Solution:** Cf cours : $E_n = \dfrac{n^2h^2}{8mL^2}$

R2. Calculer l'écart d'énergie $E_{12} - E_{11}$ entre les niveaux $n = 12$ et $n = 11$ en eV.

Solution: $E_{12} - E_{11} = (12^2 - 11^2)\dfrac{h^2}{8mL^2} = 4,1.10^{-19}\text{ J} = 2,6\text{ eV}$

R3. Quelle est la longueur d'onde dans le vide d'un photon absorbé par la molécule lorsqu'un électron passe du niveau $n = 11$ au niveau $n = 12$?

Solution: $\lambda_{ph} = \dfrac{hc}{E_{12} - E_{11}} = 480\text{ nm}$

R4. Proposer une explication à la couleur orangée de la soupe au potiron.

Solution: Le potiron absorbe donc dans le bleu-violet, dont la couleur complémentaire est le orange.

III Résolution de problèmes

Exercice n°8 Effet photoélectrique

On envoie sur une photocathode en potassium une radiation ultraviolette (raie du mercure) $\lambda = 253,7$ nm, on constate que l'énergie maximale des électrons éjectés est de $3,14$ eV. Si c'est une raie visible $\lambda = 589$ nm (raie jaune du sodium) qui éclaire la photocathode, l'énergie maximale est alors de $0,36$ eV.
À l'aide de ces données, déterminer la constante de Planck, la valeur de l'énergie minimale d'extraction (travail d'extraction) des électrons du potassium et la longueur d'onde maximale des radiations pouvant produire un effet photoélectrique sur le potassium.

Solution: Par conservation de l'énergie totale : l'énergie du photon incident ($h\nu$) est égale à la somme du travail d'extraction W_{ext} et de l'énergie cinétique de l'électron éjecté $\mathscr{E}$.
Pour la radiation du mercure : $h\nu = W_{\text{ext}} + \mathscr{E}$
Pour la radiation jaune du sodium : $h\nu' = W_{\text{ext}} + \mathscr{E}'$
On a donc le système à deux inconnues (h et W_{ext}) suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dfrac{hc}{\lambda} & = & W_{\text{ext}} + \mathscr{E} & (1) \\ \dfrac{hc}{\lambda'} & = & W_{\text{ext}} + \mathscr{E}' & (2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{clcll} (1) - (2) & hc\left(\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda'}\right) & = & \mathscr{E} - \mathscr{E}' & (3) \\ (1) \times \lambda = (2) \times \lambda' & (W_{\text{ext}} + \mathscr{E}) \times \lambda & = & (W_{\text{ext}} + \mathscr{E}') \times \lambda' & (4) \end{array}\right.$$

Ainsi la relation (3) fournit : $\boxed{h = \dfrac{\mathscr{E} - \mathscr{E}'}{c} \times \dfrac{\lambda\lambda'}{\lambda' - \lambda} = 6,61.10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}}$

⚠ Il faut convertir les énergies $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ en Joules.

Et la relation (4) fournit : $\boxed{W_{\text{ext}} = \dfrac{\lambda\mathscr{E} - \lambda'\mathscr{E}'}{\lambda' - \lambda} = 1,74\text{ eV}}$

⚠ Ici vous pouvez laisser les deux énergies en eV et les deux longueurs d'onde en nm, et fournira le travail d'extraction en eV.

Pour que l'effet photoélectrique puisse se produire, il faut que l'énergie des photons incidents soit suffisante pour extraire les électrons.
L'énergie minimale des photons incidents vaut le travail d'extraction :

$$\mathscr{E}_{\text{min}} = W_{\text{ext}} \Leftrightarrow h\nu_{\text{min}} = W_{\text{ext}} \Leftrightarrow \frac{hc}{\lambda_{\text{max}}} = W_{\text{ext}} \Leftrightarrow \boxed{\lambda_{\text{max}} = \frac{hc}{W_{\text{ext}}} = 7,14.10^{-7}\text{ m} = 714\text{ nm}}$$

Exercice n°9 Étoile visible

Quelle est la distance maximale d'une étoile visible à l'œil nu, de luminosité équivalente à celle du Soleil, c'est-à-dire émettant la même puissance ?

Document : Un article récent de J.Tinsley et ses collaborateurs, paru dans Nature communications en 2016, tend à montrer que l'œil humain serait sensible à un photon unique. Plus couramment, il est admis qu'une source de lumière quasi-ponctuelle à 500 nm est détectable par l'être humain, si au moins 25 photons pénètrent dans l'œil par seconde.

Données

- La puissance solaire maximale reçue sur Terre est de l'ordre de $p_0 = 1,4\ \mathrm{kW} \cdot \mathrm{m}^{-2}$.
- Le maximum d'émission est dans le vert, et le rayonnement est à peu près pour moitié dans le domaine visible.
- Constante de Planck : $h = 6,63.10^{-34}\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$
- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3.10^{8}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
- Distance Terre-Soleil : $D_{TS} = 150.10^{6}\ \mathrm{km}$

Solution:

Exercice n°10 Combien de photons pour une photo ?

Nous allons ici considérer le cas de la photographie numérique, avec comme objectif la détermination du nombre de photons par pixel nécessaires à la réalisation d'une photographie de qualité.
Pour cette détermination, le candidat pourra s'appuyer sur les documents ci-dessous et introduire toute grandeur qu'il jugera utile à la résolution du problème. Certaines informations données ne sont pas directement utiles à la résolution et d'autres, qui relèvent de la culture générale, ne sont pas rappelées ; le candidat devra donc faire preuve d'initiative.

À partir de ces documents et en introduisant toute grandeur pertinente utile à votre résolution, déterminer un ordre de grandeur du nombre de photons qui, en plein jour, parviennent sur un pixel de l'appareil photo envisagé. On explicitera la démarche et on analysera soigneusement le résultat obtenu.

Document n°1 :
Les données techniques relevées sur le site d'un revendeur d'appareils photos, concernant un appareil réflex moyenne gamme sont :

- ✓ Taille du capteur C.C.D. : $18 \times 13,5\ \mathrm{mm}^2$
- ✓ Nombre de pixels : 12 millions
- ✓ Focale de l'objectif : 50 mm
- ✓ Ouverture de l'objectif : f/3,5-5,6
- ✓ Vitesse d'obturation : de 60 à 1/4000 sec.

Document n°2 : Photo de l'appareil photo

Document n°3 : D'après l'article "La lumière, c'est combien de photons", Pour la Science, Octobre Décembre 2006

Texte 1 :

Compter les photons à l'unité c'est ce que réalisent les détecteurs des appareils photos numériques : les C.C.D. (charge coupling device). Le détecteur C.C.D. est un damier de détecteurs élémentaires, les photosites. Chacun d'eux est composé d'une jonction de matériaux semi-conducteurs. Chaque photon incident extrait un électron de l'un des matériaux de la jonction. L'électron libéré traverse la jonction et est collecté dans un condensateur électrique associé à chaque photosite.

Texte 2 :

L'énergie solaire qui nous parvient du Soleil atteint un kilowatt par mètre carré lorsque le Soleil est au zénith. Lors d'une prise de vue de jour, les objets éclairés renvoient dans toutes les directions la lumière solaire. Le flux de photons nous parvenant de ces objets vaut un centième du flux solaire.

Texte 3 :

Les photons arrivent au hasard sur le détecteur, à la manière des gouttes de pluies sur une vitre de voiture. Le nombre de photons reçus par pixel fluctue d'une grandeur égale à la racine carrée de la moyenne de ce nombre. Si l'on photographie une page uniformément blanche de sorte que 100 photons arrivent en moyenne sur un pixel, on constate que le nombre de photons reçus par pixel varie de 90 à 110. De telles variations de 10 % sont visibles sur l'image. En revanche pour 10000 photons en moyenne les fluctuations typiques sont de 100, soit de un pour cent : elles restent invisibles à l'œil.