Lundi 7 octobre 2024

# Devoir Surveillé n°2 — *Corrigé*

**Chapitres concernés** : Électricité

— Circuits électriques dans l'ARQS (chapitre n°3) & Circuits linéaires du 1$^{\text{er}}$ ordre (chapitre n°4)

Consignes générales :

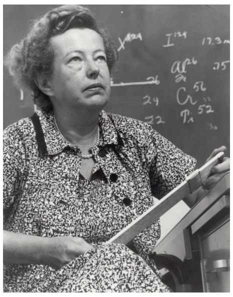
— Faites des SCHÉMAS ÉLECTRIQUE du montage étudié ! ! ! !

— Commencer les réponses par une PHRASE.

— ENCADRER l'expression LITTÉRALE FINALE :

$$\boxed{\text{Grandeur} = \text{son expression}}$$

## Exercice n°0 Quel est le point commun entre ces femmes ?


**Solution:** Ce sont les **5 femmes prix Nobel de physique** (5 en 122 ans d'existence !). Dans l'ordre :

— Marie Curie, 1903, pour l'étude sur des rayonnements radioactifs spontanés.

— Maria Goeppert Mayer, 1963 (soit 60 ans plus tard !), pour ses travaux qui a permis d'importantes découvertes sur la structure du noyau.

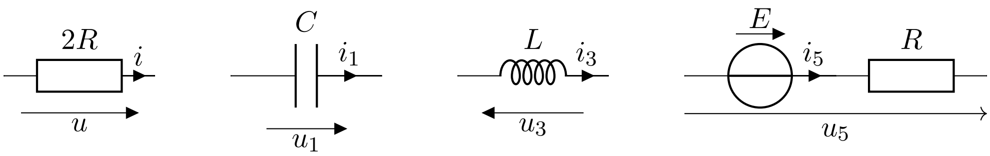
— Donna Strickland, 2018 (45 ans plus tard...), pour avoir « ouvert la voie aux impulsions laser les plus courtes et les plus intenses jamais créées par l'humanité ».

— Andrea Ghez, 2020, pour son travail d'étude du trou noir supermassif au centre de notre galaxie.

— Anne L'Huillier, 2023, pour ses travaux sur le LASER attoseconde.

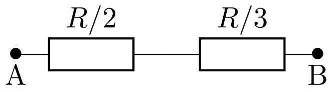
## Exercice n°1 Petites questions sur des circuits *(∼ 30 min)*

R1. Donner les relations courant/tension des différents dipôles ci-dessous :

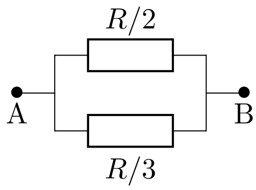



**Solution:** $u = -2Ri$ ; $i_1 = -C\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$ ; $u_3 = L\dfrac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}$ ; $u_5 = E - Ri_5$

R2. Exprimer la résistance équivalente entre A et B des deux circuits ci-dessous.




Circuit 1



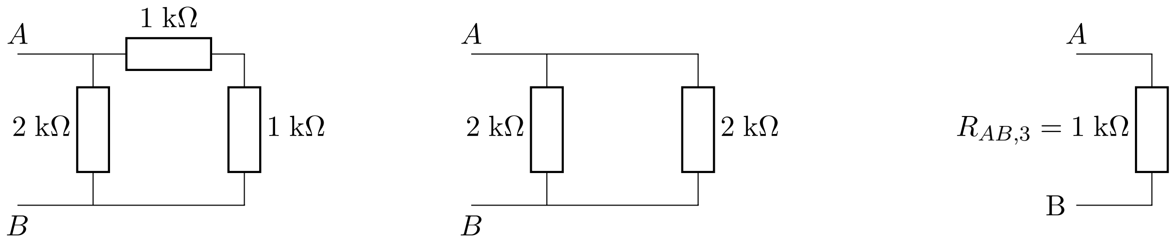

Circuit 2

**Solution:** Circuit 1 : $R_1 = \dfrac{R}{2} + \dfrac{R}{3}$, donc $\boxed{R_1 = \dfrac{5R}{6}}$

Circuit 2 : $\dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{R/2} + \dfrac{1}{R/3} = \dfrac{5}{R}$, soit $\boxed{R_2 = \dfrac{R}{5}}$

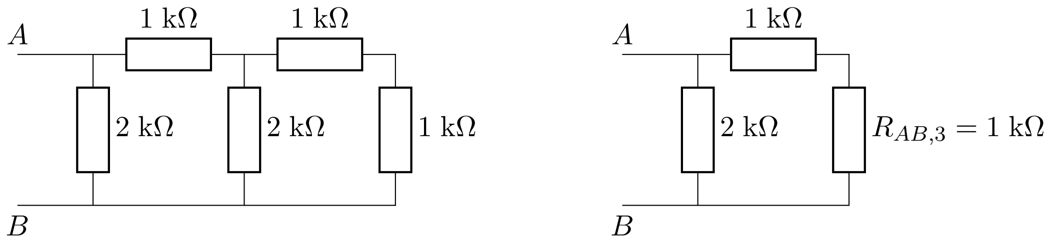
R3. Calculer la résistance équivalente des deux circuits ci-dessous. Le détail des étapes et des calculs devra apparaître sur votre copie. Tout résultat déjà établi pourra être utilisé.

**Solution:** Circuit 3 :




Avec $\dfrac{1}{R_{AB,3}} = \dfrac{2}{2 \text{ k}\Omega}$, soit $\boxed{R_{AB,3} = 1 \text{ k}\Omega}$

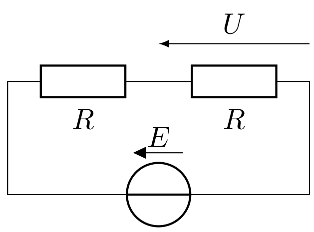
Circuit 4 :



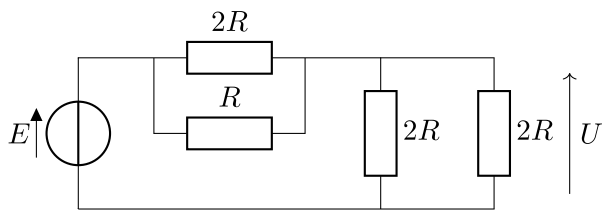

On reconnait dès le début, à droite le circuit 3

On reconnait à nouveau le circuit 3 précédent, donc $\boxed{R_{AB,4} = 1 \text{ k}\Omega}$

R4. Exprimer $U$ en fonction de $E$ dans les deux montages ci-dessous.



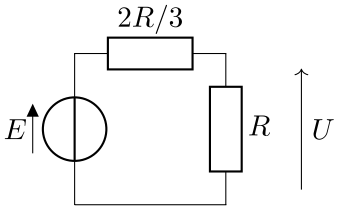

Montage 5




Montage 6

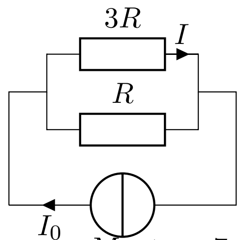
**Solution:** Montage 5 : D'après la relation du pont diviseur de tension : $U = \dfrac{R}{R+R}E$, soit $\boxed{U = \dfrac{E}{2}}$

Montage 6 :




Par association de résistances, on obtient :
Relation du pont diviseur de tension :
$U = \dfrac{R}{2R/3 + R} \times E$, soit $\boxed{U = \dfrac{3E}{5}}$

R5. Exprimer $I$ en fonction de $I_0$ dans le montage ci-dessous.

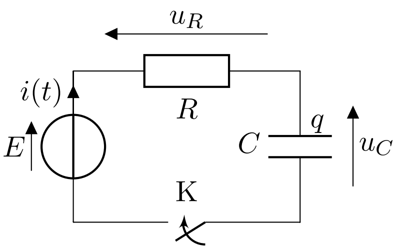



Montage 7

**Solution:** D'après la relation du pont diviseur de courant : $I = \dfrac{\frac{1}{3R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{3R}} I_0$, soit $\boxed{I = \dfrac{I_0}{4}}$

# Exercice n°2 Étude d'un circuit RC *(∼ 1 heure)*

On alimente un circuit constitué par l'association série d'un conducteur ohmique de résistance $R$, et d'un condensateur de capacité $C$, alimenté par un générateur de force électromotrice $E > 0$ constante.
L'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et est fermé à $t = 0$.




## Partie A Équation différentielle vérifiée par $u_C$

R6. Établir l'équation différentielle du premier ordre qui régit l'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur pour $t \geq 0$ ?
Écrire cette équation différentielle sous la forme canonique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{u_C(\infty)}{\tau}$$

et identifier l'expression de la constante de temps $\tau$ et de $u_C(\infty)$ atteint en régime permanent.

**Solution:** Dans le circuit tracé précédemment, il y a 3 inconnues : $i(t)$, $u_C(t)$ et $u_R(t)$, il faut donc 3 équations indépendantes pour résoudre le problème.

— Loi des mailles : $u_C(t) + u_R(t) - E = 0$ (1)

— Loi d'Ohm : $u_R(t) = R_i(t)$ (2)

— Relation du condensateur : $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (3)

On cherche à obtenir l'équation différentielle vérifiée par $u_C$, il faut donc tout exprimer en fonction de $u_C$.

On injecte (3) dans (2) puis dans (1) : $u_C(t) + RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = E$

Sous forme canonique : $\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_C(t) = \frac{E}{RC} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C(t) = \frac{E}{\tau}}$

On identifie alors la constante de temps du circuit $RC$ série : $\boxed{\tau = RC}$, et $\boxed{u_C(\infty) = E}$

## Partie B Évolution temporelle de $u_C$

Pour $t < 0$, avant la fermeture de l'interrupteur, le condensateur a déjà été un peu chargé et $u_C(t < 0) = U_0$. On suppose dans la suite que $U_0 < E$.

R7. Quelle grandeur électrique ne peut pas subir de discontinuité dans ce circuit ?
En déduire l'expression de $u_C(t = 0^+)$.

**Solution:** La tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-)}$

Le condensateur est initialement chargé, avec $\boxed{u_C(0^-) = U_0}$

On en déduit que $\boxed{u_C(0^+) = U_0}$

R8. Résoudre complètement l'équation différentielle pour déterminer l'expression de $u_C(t)$ en fonction de $U_0$, $E$, $\tau$ et $t$.

**Solution:**

— La solution générale de l'équation homogène (sans second membre) $\frac{\mathrm{d}u_{c,H}}{\mathrm{d}t} + \frac{u_{c,H}}{\tau} = 0$ est :
$u_{c,H}(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$

— Solution particulière $u_{c,P}$ de l'équation différentielle (avec second membre) recherchée sous la forme du second membre, c'est-à-dire sous la forme d'une constante ici, qui vérifie l'équation différentielle : $\frac{\mathrm{d}u_{c,P}}{\mathrm{d}t} + \frac{u_{c,P}}{\tau} = \frac{E}{\tau}$, soit avec $\frac{\mathrm{d}u_{c,P}}{\mathrm{d}t} = 0$, on en déduit $u_{c,P} = E$

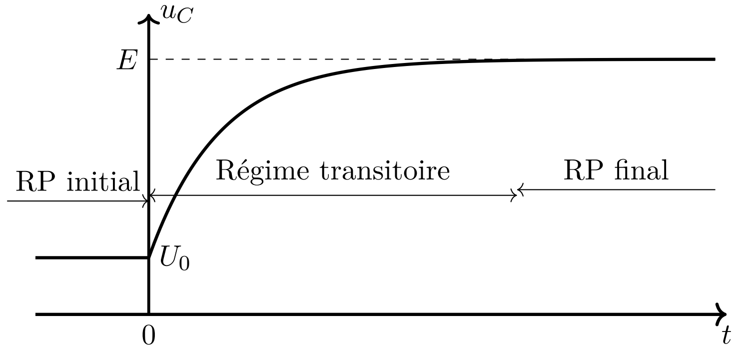
— Solution générale de l'équation différentielle : $\boxed{u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + E}$

— Détermination de la constante d'intégration à l'aide de la condition initiale $u_C(0^+) = U_0$.
Or $u_C(0) = K + E$, donc $K + E = U_0$
ainsi $\boxed{u_C(t) = E + (U_0 - E)\,e^{-\frac{t}{\tau}}}$

R9. Exprimer $u_C$ une fois le régime permanent atteint. Commenter.

**Solution:** $\boxed{\lim_{t\to\infty} u_C(t) = E}$ : c'est la même valeur que le condensateur était ou non chargé avant. L'état final ne dépend pas des conditions initiales.

R10. Représenter l'allure de $u_C(t)$ pour $t < 0$ et $t > 0$. On fera apparaître $U_0$ et $E$.
*On n'oubliera pas de nommer les axes !*
Identifier dessus le régime transitoire et le régime permanent.




**Solution:**

## Partie C Évolution de l'intensité du courant

R11. Déterminer l'expression de l'intensité du courant $i(t)$ dans le circuit.
Comparer l'intensité du courant à $t = 0^-$ et $t = 0^+$. Commenter.

**Solution:** On demandait d'établir l'expression de $i$, il faut l'établir en fonction des données de l'énoncé. Répondre $i = \frac{E - u_C}{R}$ ou $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ n'est pas suffisant.
D'après la relation du condensateur :

$$\begin{aligned}
i &= C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\\
i &= C\frac{\mathrm{d}\left(E + (U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{\mathrm{d}t}\\
i &= C\frac{\mathrm{d}\left((U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{\mathrm{d}t}\\
i &= C(U_0 - E)\frac{\mathrm{d}e^{-\frac{t}{\tau}}}{\mathrm{d}t}\\
i &= \frac{C(U_0 - E)}{-\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{i(t) = \frac{1}{R}(E - U_0)\, e^{-\frac{t}{\tau}}}$

*Autre méthode : utiliser la loi des mailles*

$$\begin{aligned}
u_C + u_R &= E\\
u_C + Ri &= E\\
i &= \frac{E - u_C}{R}\\
i &= \frac{-(U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}}}{R}
\end{aligned}$$

Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert, donc $\boxed{i(0^-) = 0}$.

$\boxed{i(0^+) = \frac{E - U_0}{R} \neq i(0^-)}$ : l'intensité à travers le circuit n'est donc pas continue.

## Partie D Aspect énergétique

R12. Établir le bilan de puissance du circuit et l'interpréter précisément.

**Solution:** Repartons de la loi des mailles : $E = u_R + u_C$
Et multiplions-la par $i$ : $Ei = Ri^2 + u_C \times i$, avec :

- $Ei$ : puissance algébriquement fournie par le générateur (en convention générateur)
  D'après l'expression établie pour $i(t)$ précédemment, $\forall t$, $Ei(t) > 0$ : le générateur fournit à chaque instant de la puissance électrique au reste du circuit.
- $Ri^2$ : puissance reçue algébriquement par le conducteur ohmique (en convention récepteur)
  Cette puissance est toujours positive, donc le conducteur ohmique reçoit réellement à chaque instant de la puissance électrique, puissance qui est entièrement dissipée par effet Joule (sous forme de chaleur).
- $u_C \times i$ : puissance reçue algébriquement par le condensateur (en convention récepteur)
  Avec la relation du condensateur, on peut écrire $\mathscr{P}_{\text{stockée dans C}} = u_C \times C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = C\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}u_C^2\right)$, on reconnait ici l'énergie emmagasinée par le condensateur.
  Au cours de la charge $u_C > 0$ et $u_C \nearrow$, donc $u_C^2 \nearrow$, donc la puissance algébriquement reçue par le condensateur est positive à chaque instant : le condensateur reçoit réellement de la puissance électrique à chaque instant.

*La suite est plus difficile, elle pourra être laissée de côté dans un premier temps si vous voyez l'heure défiler.*

R13. Exprimer l'énergie électrique $\mathscr{E}_e$ fournie algébriquement par la source de tension durant l'ensemble du régime transitoire, en fonction de $E$, $C$ et $U_0$. Commenter le signe.

**Solution:** Énergie fournie par la source de tension :

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_e &= \int_0^{5\tau} Ei(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{E}{R}(E-U_0)\int_0^{5\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{E}{R}(E-U_0)(-\tau)\left[e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{5\tau} \\
&= -EC(E-U_0)\Big(0-1\Big) \\
&= CE(E-U_0)
\end{aligned}$$

La source de tension fournit donc : $\boxed{\mathscr{E}_c = CE(E-U_0) > 0}$

R14. Exprimer l'énergie stockée, notée $\mathscr{E}_f$, par le condensateur à la fin du régime transitoire.
Quelle énergie, notée $\mathscr{E}_i$, stockait-il pour les temps $t < 0$ ?
En déduire l'énergie qu'il a reçue, notée $\mathscr{E}_{\text{reçue}}$, au cours du régime transitoire.

**Solution:** Distinguer l'énergie stockée par le condensateur à un instant $t$ donné, et l'énergie qu'il reçoit au cours du régime transitoire.
L'énergie stockée par le condensateur soumis à la tension $u_C$ est $\dfrac{1}{2C}u_C^2$. Il reste à identifier $u_C$ aux instants demandés.

À la fin, le condensateur est soumis à la tension $E$, donc il stocke l'énergie : $\boxed{\mathscr{E}_f = \dfrac{1}{2}CE^2}$

Initialement, le condensateur est soumis à la tension $U_0$, il stocke donc l'énergie : $\boxed{\mathscr{E}_i = \dfrac{1}{2}CU_0^2}$

Ainsi, au cours du régime transitoire, il a reçu l'énergie $\boxed{\mathscr{E}_{\text{reçue}} = \dfrac{1}{2}C\left(E^2 - U_0^2\right)}$

R15. Quel grand principe vérifie l'énergie ? Déduire des questions précédentes l'énergie reçue par la résistance au cours du régime transitoire. Que devient-elle ?

**Solution:** L'énergie se conserve, donc la résistance reçoit l'énergie fournie par le générateur moins celle reçue par le condensateur, ainsi

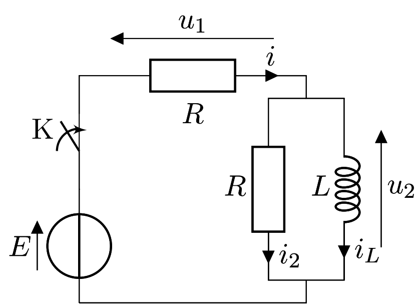
$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_J &= \mathscr{E}_e - \mathscr{E}_{\text{reçue}} \\
&= CE^2 - CEU_0 - \frac{1}{2}CE^2 + \frac{1}{2}CU_0^2 \\
&= \frac{1}{2}CE^2 + \frac{1}{2}CU_0^2 - CEU_0 \\
&= \frac{1}{2}C(E^2 + U_0^2 - 2EU_0)
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\mathscr{E}_J = \frac{1}{2}C(E-U_0)^2}$

Cette énergie est dissipée par effet Joule sous forme de transfert thermique.

## Exercice n°3 Étude d'un circuit RL à deux mailles *(∼ 30 min)*

On étudie le circuit ci-contre.
La bobine est supposée idéale d'inductance $L$.
Le générateur est de force électromotrice $E > 0$ constante.
Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert, et **aucun courant ne circule dans le circuit**.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.




### Partie A Conditions initiales

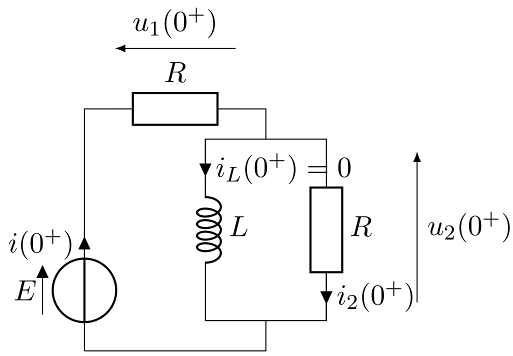
R16. Quelle grandeur électrique ne peut pas subir de discontinuité dans ce circuit ? En déduire $i_L(0^+)$.
*On répondra clairement, avec une phrase générale en français, et on précisera le nom, dans ce circuit, de cette grandeur.*

**Solution:**
L'intensité du courant à travers la bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc $i_L(0^+) = i_L(0^-)$
À $t = 0^-$, $i_L(0^-) = 0$, donc $\boxed{i_L(0^+) = 0}$

R17. D'après la réponse précédente, que peut-on dire des deux résistances à $t = 0^+$ ?
En déduire (sans calcul) les expressions de $u_1(0^+)$ et $u_2(0^+)$.

**Solution:** Schéma du circuit indispensable

La loi des nœuds s'écrit à $t = 0^+$ : $i(0^+) = i_2(0^+)$, donc les résistances $R$ et $R$ sont en série à $t = 0^+$.
On peut donc écrire la relation du pont diviseur de tension :
$\boxed{u_2(0^+) = \frac{R}{R+R}E = \frac{E}{2}}$
et $\boxed{u_1(0^+) = \frac{E}{2}}$

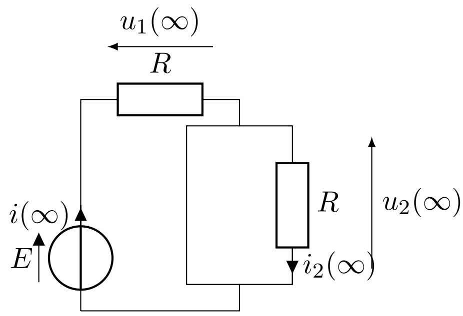



### Partie B Régime permanent

R18. Déterminer les expressions de $u_1$ et $u_2$ une fois le régime permanent atteint, longtemps après la fermeture de l'interrupteur). *Cette question ne nécessite pas de calculs, mais un schéma du circuit en régime permanent et une loi.*

**Solution:** Schéma du circuit indispensable

La tension $u_2$ est la tension aux bornes d'un fil, donc $\boxed{u_2(\infty) = 0}$
La loi des mailles donne alors $u_1(\infty) + u_2(\infty) = E$, soit $\boxed{u_1(\infty) = E}$




## Partie C Équation différentielle

R19. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_2$ pour $t > 0$, et la mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{u_2}{\tau} = 0$$

On identifiera l'expression de la constante de temps $\tau$ en fonction de $R$ et $L$.
*Il n'y a pas d'erreur dans l'énoncé, et $\tau$ ne vaut pas $L/R$ ici.*

**Solution:** Il y a 5 inconnues : $i$, $i_L$, $i_2$, $u_2$, $u_2$, il faut donc écrire 5 équations indépendantes :
Lois d'Ohm : $u_1 = Ri$ (1) et $u_2 = Ri_2$ (2)
Loi des nœuds : $i = i_L + i_2$ (3)
Loi des mailles : $u_1 + u_2 = E$ (4)
Relation de la bobine : $u_2 = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ (5)
(3) dans (5) : $u_2 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ (5')
(2) et (1) dans (5') : $u_2 = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$ (5")
(4) dans (5") : $u_2 = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}(E-u_2)}{\mathrm{d}t} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$
Alors $u_2 = -L\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{2L} \times u_2 = 0}$
que l'on peut identifier avec $\boxed{\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{u_2}{\tau} = 0}$ en posant $\boxed{\tau = \frac{2L}{R}}$ la constante de temps du circuit étudié.

## Partie D Bonus : évolution temporelle et constante de temps

R20. Résoudre l'équation différentielle pour obtenir l'expression de $u_2(t)$, pour $t > 0$.

**Solution:** Solution générale de l'équation différentielle (sans second membre) : $u_2(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$
Or $u_2(0^+) = \frac{E}{2}$, donc $K = \frac{E}{2}$.
Ainsi $\boxed{u_2(t) = \frac{E}{2}e^{-\frac{t}{\tau}}}$

R21. Exprimer, en fonction de $L$ et $R$, le temps $t_{10}$ au bout duquel la tension $u_2$ a été divisée par 10.

**Solution:** L'instant $t_{10}$ est tel que $u_2(t_{10}) = \frac{u_2(0^+)}{10} \Leftrightarrow \frac{E}{2}e^{-t_{10}/\tau} = \frac{E}{20} \Leftrightarrow e^{-t_{10}/\tau} = \frac{1}{10}$
Soit $\boxed{t_{10} = \tau \ln(10) = \frac{2L}{R}\ln(10)}$