



? Lundi 3 novembre 2025 – Durée : 2 heures
Devoir Surveillé n°3 (1) – Oscillateurs harmoniques et amortis

La calculatrice est INTERDITE.

2 Check-list à cocher !

Sur la forme :

Ma copie est rédigée sur des copies doubles.	☐
Prendre une nouvelle copie double pour chaque exercice.	☐
Ma copie est propre.	☐
Chaque réponse commence par une phrase / des mots.	☐
Les résultats littéraux sont encadrés, les applications numériques soulignées.	☐
Un long trait horizontal est tiré entre chaque question.	☐
Les pages sont numérotées.	☐

Sur le fond :

Les expressions littérales sont homogènes.	☐
Les applications numériques sont suivies d'une unité adaptée.	☐

Ce sujet comporte 3 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de 4 pages.

Contenu du DS :

Exercice n°1	Questions de Travaux Pratiques (Durée : 5 min)	2
Exercice n°2	Circuit LC série (Durée : 40 min)	2
Exercice n°3	Saut à l'élastique (Durée : 1h20)	3

Exercice n°1 Questions de Travaux Pratiques (Durée : 5 min)

Q1. On veut étudier la charge et la décharge d'un condensateur à travers une résistance. Pour cela, on dispose d'un générateur basse fréquence (GBF), d'un oscilloscope (2 voies notées voie 1 et voie 2), d'une résistance et d'un condensateur. On souhaite observer à l'oscilloscope la tension aux bornes du GBF et celle aux bornes du condensateur. **Représenter** le schéma du circuit à réaliser. La terre et les voies de l'oscilloscope devront être clairement indiquées sur le schéma.

Q2. De nombreuses mesures de capacité ont été effectuées, et on obtient les résultats suivant :

```
1 C=[1.784e-07, 1.31e-07, 1.1733e-07, 1.0925e-07, 1.048e-07, 1.03667e-07,
2   1.02e-07, 9.8e-08, 9.6889e-08, 9.64e-08]
3 Cmoy = np.mean(C)
4 s_C = np.std(C,ddof=1)
5 u_C = s_C/np.sqrt(len(C))
6 print(Cmoy, s_C, u_C)
1.1377388888888888e-07, 2.5085388066451042e-08, 7.932696227919258e-09
```

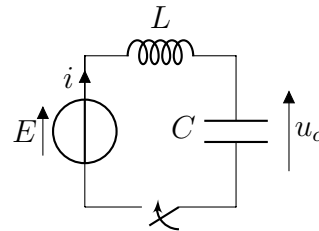
Écrire le résultat de l'expérience de façon conforme.

Exercice n°2 Circuit LC série (Durée : 40 min)

On étudie le circuit ci-contre.

Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et aucun courant ne circule.

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le générateur idéal de fem $E = 4 \text{ V}$ constante au condensateur et à la bobine.



Q1. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par la tension u_c aux bornes du condensateur et l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 u_c(\infty)$$

On identifiera les expressions de ω_0 et $u_c(\infty)$. Comment s'appelle ω_0 ? Quelle est son unité ?

Q2. **Déterminer proprement** les valeurs de $u_c(0^+)$ et $\frac{du_c}{dt}(0^+)$.

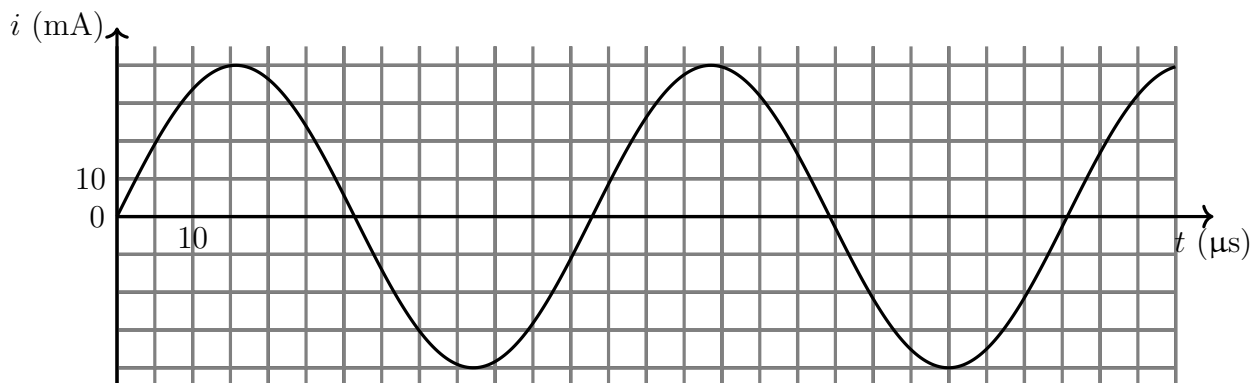
Q3. **Résoudre complètement** l'équation différentielle.

Q4. **Représenter l'allure** de $u_c(t)$.

Q5. **Déterminer l'expression** de i en fonction de E , ω_0 , C et t en deux lignes de calculs au maximum.

Q6. **En déduire** l'expression de l'amplitude, notée I_m , de i en fonction de C , E et ω_0 .

On donne ci-dessous, le graphe de i en fonction du temps.



Q7. (a) **Déterminer graphiquement** la période propre. En déduire la pulsation propre.

(b) **Déterminer graphiquement** l'amplitude.

(c) **Déduire** des deux questions précédentes la valeur de C .

(d) **En déduire** la valeur de L .

Donnée : $2\pi \approx 6,3$

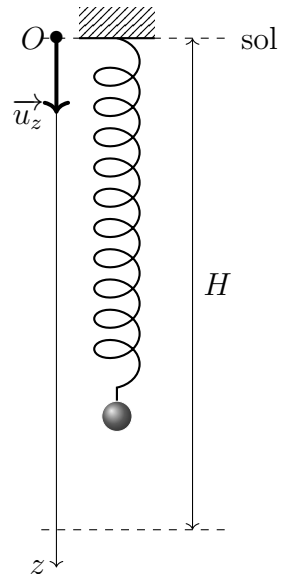
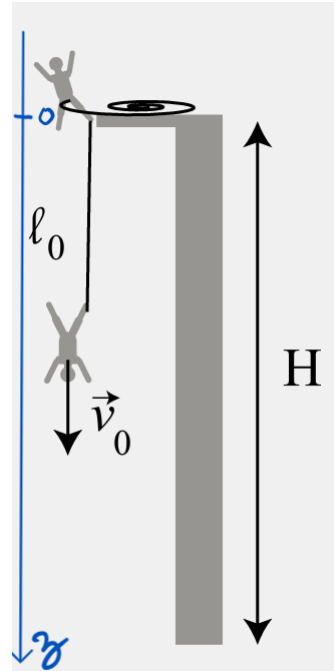
Écrire sur une nouvelle copie double

Exercice n°3 Saut à l'élastique (Durée : 1h20)

Le saut à l'élastique est un loisir à sensation forte consistant à se jeter d'un pont, les pieds accrochés à un élastique. Tant que l'élastique est de longueur inférieure à sa longueur au repos ℓ_0 , le corps de masse m est en chute libre, c'est-à-dire soumis uniquement à son poids.

Le sauteur saute, puis tombe en chute libre, jusqu'à l'instant $t = 0$, où l'élastique atteint sa longueur à vide ℓ_0 pour la première fois. Sa vitesse est de $\frac{dz}{dt}(0) = v_0$, avec $v_0 = \sqrt{2g\ell_0}$.

Quand la longueur de l'élastique est supérieure à ℓ_0 , il peut être assimilé à un ressort de constante de raideur k , et de longueur à vide ℓ_0 .



<https://www.ledauphine.com/isere-sud/2014/09/04/le-grand-saut-a-l-elastique>

Phase 1 : chute libre, le ressort n'agit pas (pour $t < 0$ et pour tout t où $\ell(t) < \ell_0$)

Mécanique, Licence/CPGE, Ellipse

Phase 2 : $\ell(t) > \ell_0$, le ressort agit

I Préliminaires

- Q1. (a) **Définir** le système étudié, le référentiel d'étude et effectuer le bilan des forces pour $t > 0$ (quand l'élastique agit).
(b) **Reproduire le schéma** de l'énoncé pour $t > 0$ quand l'élastique est tendu et se comporte comme un ressort.
- Q2. Force de rappel élastique.
(a) **Donner** la formule générale de la force de rappel élastique, on définira les différentes grandeurs y intervenant sur le schéma précédent. Quelle est l'unité de la constante de raideur k ?
(b) **En déduire** l'expression de la force de rappel élastique en fonction de k , z , ℓ_0 et $\vec{u}_z$.

II Première modélisation : sans prise en compte des frottements

Dans cette partie, les frottements de l'air sont négligés.

Q3. **Établir** la position d'équilibre z_{eq} du sauteur.

Q4. **Établir** l'équation du mouvement vérifiée par z et l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 z_{eq}$$

Identifier l'expression ω_0 .

Q5. **Résoudre complètement** l'équation différentielle vérifiée par z , avec les conditions initiales suivantes :

$$z(0) = \ell_0 \text{ et } \frac{dz}{dt}(0) = v_0.$$

Q6. **Représenter l'allure** de $z(t)$.

Pour les questions suivantes, on admet que la position du sauteur peut s'écrire $z(t) = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + z_{\text{éq}}$. On ne cherche pas à exprimer Z_m et φ .

Q7. Énergies potentielles :

(a) **Donner** l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur en fonction (notamment) de z en faisant attention au signe compte tenu du sens de l'axe.

(b) L'**exprimer** en fonction de mg , Z_m , $z_{\text{éq}}$, ω_0 , φ et t dans le cadre de l'exercice.

(c) **Donner** l'expression de l'énergie potentielle de élastique, en fonction de k , ℓ et ℓ_0 , puis en fonction de k , $z(t)$, mg .

Puis l'**exprimer** en fonction de k , Z_m , mg , ω_0 , φ et t dans le cadre de l'exercice.

(d) **En déduire** l'énergie potentielle totale en fonction de k , mg , Z_m , ω_0 , φ , $z_{\text{éq}}$ et t .

Q8. Après **avoir rappelé la définition** de l'énergie cinétique, l'**exprimer** en fonction de k , Z_m , ω_0 , φ et t .

Q9. **Exprimer** l'énergie mécanique en fonction de k , mg , ℓ_0 et Z_m . **Commenter**.

III Deuxième modélisation : prise en compte des frottements fluides

On prend maintenant en compte les frottements fluides dûs à l'air, que l'on modélise par la force de frottement $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$, où α est une constante positive.

Q10. **Établir** l'équation du mouvement vérifiée par z et l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 z_{\text{éq}} \quad (\text{E})$$

Exprimer ω_0 et Q en fonction de m , k et α . Quel est le nom et l'unité de Q ?

Q11. **Donner** le nom des différents régimes observables selon la valeur de Q .

Donner pour ces différents régimes l'expression de la durée caractéristique du régime transitoire en fonction de Q et ω_0 . Comment évolue-t-elle si Q augmente ? *Il faudra distinguer deux cas.*

Q12. **Calculer** la valeur de Q pour $m = 50 \text{ kg}$, $k = 80 \text{ uSI}$ (unité du système international) et $\alpha = 4.10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$. Quelle sera la nature du régime transitoire ?

On considère les mêmes conditions initiales que **Q5**.

Q13. On souhaite **résoudre complètement** l'équation différentielle (E), pour cela :

(a) **Écrire** l'équation différentielle homogène (notée (EH)) correspondante à (E) de **Q10**.

(b) **Exprimer** les racines de l'équation caractéristique associée à (EH).

(c) **Exprimer** la solution générale de (EH), notée z_H . Y introduire un temps caractéristique τ et une pseudo-pulsation Ω que l'on exprimera en fonction de ω_0 et Q .

(d) **Déterminer** une solution particulière z_P .

(e) **En déduire** la solution générale.

(f) À l'aide des conditions initiales de **Q5**, **déterminer** les constantes d'intégration et **conclure**.

Q14. **Tracer l'allure** de $z(t)$, en la soignant, et en faisant apparaître les éléments importants.