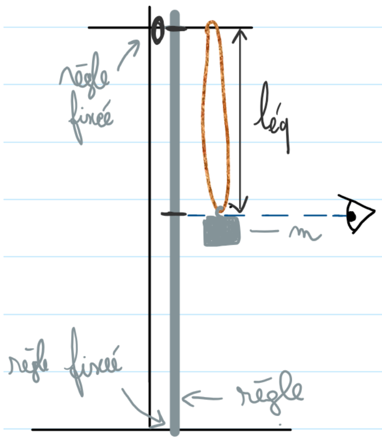
Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)
TP n°6 Étude d'un élastique — *Corrigé*

Vendredi 7 novembre 2025

I Validité du modèle linéaire

Q1. Protocole :



- Accrocher un élastique à la potence.
- Fixer une règle verticalement.

  2 points d'attention :
  - La fixer à ses deux extrémités bien verticalement, elle ne doit pas pendouiller librement.
  - Mettre le 0 de la règle au niveau de l'attache de l'élastique.
- Accrocher une masse connue à son extrémité.
- Attendre l'équilibre.
- Mesurer la longueur à l'équilibre de l'élastique.
- Refaire pour des masses différentes.
- **Exploitation :** *La question est de savoir si la force exercée par l'élastique sur la masse est de la forme* $k(\ell - \ell_0)$.
  - Représenter $\ell_{éq}$ en fonction de m (par ex. d'autres possibilités : $\ell_{éq}$ en fonction de mg ; m en fonction de $\ell_{éq}$; mg en fonction de $\ell_{éq}$).
  - Si les points s'alignent sur une droite, le modèle utilisé est validé dans le contexte de l'expérience et compte tenu des incertitudes. L'élastique exerce une force $k(\ell - \ell_0)$. La pente et l'ordonnée à l'origine nous donne accès à k et ℓ_0.
  - Si les points ne s'alignent pas sur une droite, le modèle n'est pas valide dans le contexte de l'expérience et compte tenu des incertitudes.

Q2. Validation ?

- **Incertitudes** :
  On peut identifier plusieurs sources d'incertitudes :
  - les masses ;
  - la lecture sur la règle graduée au mm (soit une demie-largeur de 0,5 mm) ;
  - le placement du 0 de la règle au niveau du point d'attache de l'élastique : où est le point d'attache ? parallaxe ?
  - le repérage de la position inférieure de l'élastique : où est le point d'attache de la masse à l'élastique ? parallaxe ?
- Exemple n°1 :
  - Les points ne semblent pas répartis aléatoirement autour de la droite.
  - Les barres d'incertitudes sont éloignées de la droite de régression.
  - Visuellement le modèle ne semble pas vérifié.
  - Cela est confirmé par les écarts normalisés qui sont pour plusieurs points au-delà de 2.
- Exemple n°2 :
  - Les points semblent répartis aléatoirement autour de la droite.

- Ils sont proches de la droite de régression.
- Les barres d'incertitudes sont proches de la droite de régression, et la droite passe par toutes les barres d'incertitude au niveau de tous les points.
- Visuellement le modèle semble vérifié.
- Cela est confirmé par les écarts normalisés qui sont pour l'ensemble des points inférieurs à 2.

Q3. Conclusion :

- Exemple n°1 : Dans cette situation, le modèle linéaire de la force de rappel élastique n'est pas adapté pour rendre compte de la force exercée par l'élastique sur la masse, compte tenu des mesures effectuées et des incertitudes.
- Exemple n°2 : Dans cette situation, le modèle linéaire de la force de rappel élastique est valide pour rendre compte de la force exercée par l'élastique sur la masse, compte tenu des mesures effectuées et des incertitudes.

II Constante de raideur de l'élastique

Q4. Protocole :

- Solution 1 :
  - Mesurer la longueur à vide de l'élastique, en le maintenant tendu mais pas étiré (c'est délicat !).
  - Utiliser $k = \dfrac{mg}{\ell_{\text{éq}} - \ell_0}$ pour déterminer un ensemble valeur de k pour les différentes valeurs de $\ell_{\text{éq}}$ mesurées pour les différentes masses.
- Solution 2 :
  - Extraire ℓ_0 de la droite de régression (=ordonnée à l'origine).
  - Utiliser $k = \dfrac{mg}{\ell_{\text{éq}} - \ell_0}$ pour déterminer un ensemble valeur de k pour les différentes valeurs de $\ell_{\text{éq}}$ mesurées pour les différentes masses.
- Solution 3 (la plus cohérente et précise compte tenu de ce qui a été fait, mais plus longue) :
  - Mettre en œuvre la simulation Monte-Carlo en simulant $N = 10000$ données (N listes de m et $\ell_{\text{éq}}$) à partir des mesures effectuées et des incertitudes-types évaluées.
  - Déterminer N droites affines de régression linéaire.
  - En déduire N pentes et N ordonnées à l'origine.
  - En déduire N valeurs de k (1/pente).
- Dans tous les cas :
  - Calculer moyenne : `kmoy=np.mean(k)` ;
  - écart-type : `s_k=np.std(k,ddof=1)` ;
  - incertitude-type : `u_k=s_k/np.sqrt(len(k))`.

Q5. Conclusion :
Sur l'exemple n°2 (pas de sens de le faire sur l'exemple n°1 où le modèle n'est pas vérifié) :

$$\boxed{k = 45,20\ \mathrm{N \cdot m^{-1}} \quad ; \quad u(k) = 0,25\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}}$$

2 chiffres significatifs pour l'incertitude-type, les chiffres significatifs ne sont pas les décimales, ce sont tous les chiffres à partir du premier non nul.

Autre exemple : Si `kmoy=31.001107740654323 ; u_k=2.697934168406164`

$$\boxed{k = 31,0\ \mathrm{N \cdot m^{-1}} \quad ; \quad u(k) = 2,7\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}}$$

Exemple n°1. Modèle non validé

1 Bibliothèques nécessaires

[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

2 Validité de la modélisation linéaire ?

2.1 Mesures

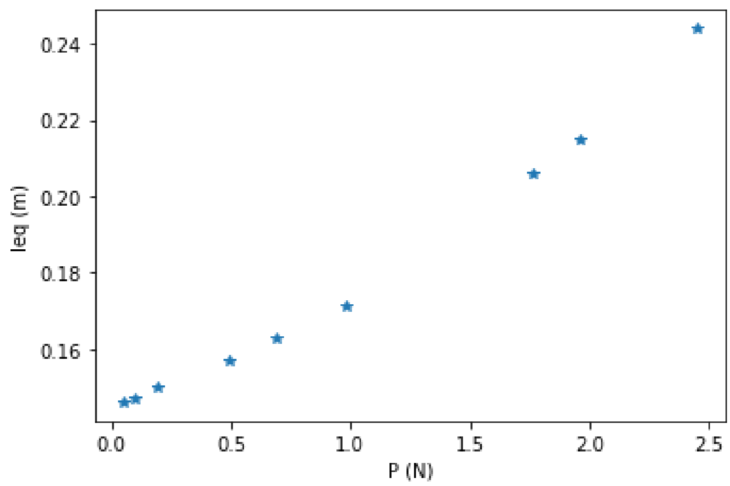
[2]:
```
m = np.array( [50,100,20,10,5,200,70,180,250] )*10**-3    # (à compléter) (conversion en kg␣
↪effectuée par *10**-3)
g = 9.81    # champ de pesanteur en m/s²
P = m*g                        # (à compléter) poids en Newton
leq = np.array( [15.7,17.1,15.0,14.7,14.6,21.5,16.3,20.6,24.4] )*10**-2 # (à compléter)␣
↪(conversion en mètres effectuée par *10**-2)
```

2.2 Première courbe

Pour tracer la liste carotte en ordonnée en fonction de la liste patate en abscisse on utilise la commande :

`plt.plot(patate,carotte,'*')`

[3]:
```
plt.plot(  P, leq   , '*') # Tracé de leq en fonction de m * g
plt.xlabel (r'P (N)') # Légende de l'abscisse
plt.ylabel (r'leq (m)') # Légende de l'ordonnée
plt.show()
```



2.3 Ajoute des barres d'incertitudes

Afin d'exploiter plus quantitativement la courbe, il faut étudier les incertitudes.

- Déterminer la largeur (puis la demie-largeur $\Delta\ell_{\text{éq}}$) de l'intervalle de longueur $\ell_{\text{éq}}$ au sein duquel vous êtes certains que le résultat de la mesure se trouve.
- En déduire l'incertitude-type : $u(\ell_{\text{éq}}) = \dfrac{\Delta\ell_{\text{éq}}}{\sqrt{3}}$

[4]:
```
# demie largeur de l'intervalle au sein duquel on est "certain" de trouver le résultat de la␣
↪mesure de léq
```

```
Delta_leq =4*10**-3# m
# incertitudes type
u_leq = Delta_leq/np.sqrt(3)
```

[5]:
```
# Représentation graphique de leq en fonction du poids P, avec les barres d'incertitude
# yerr = valeur ou tableau qui contient les incertitudes-types sur l'ordonnée
plt.errorbar( P , leq , yerr = u_leq   , fmt = 'b.')
plt.ylabel(r'leq (m)')
plt.xlabel(r'P (N)')
plt.grid()
plt.show()
```

2.4 Régression linéaire

[6]:
```
# Régression linéaire, on modélise par un polynôme de degré 1
reg = np.polyfit(P,leq,1)  # régression linéaire de léq en fonction de P (polynôme de degré 1)
a = reg[0] # pente
b = reg[1] # ordonnée à l'origine
print('a=',a,'b=',b)
```

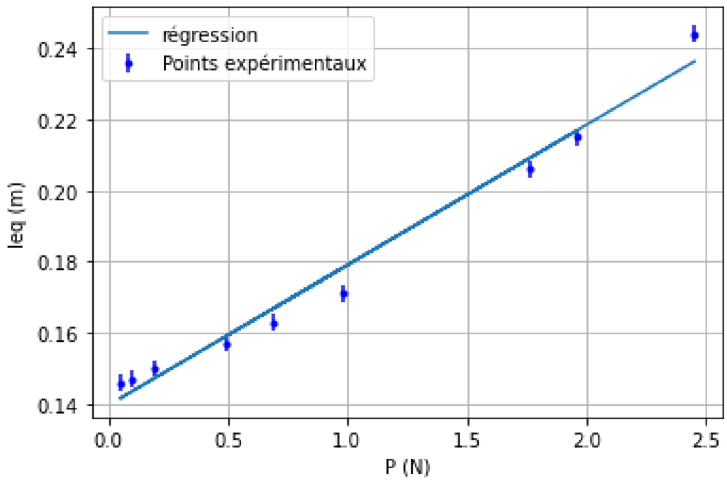
```
a= 0.03935720947237636 b= 0.13970073454913876
```

[7]:
```
# Constante de raideur issue de la régression linéaire = l'inverse de la pente
k = 1/a
print('k=',k)
```

```
k= 25.408305451682747
```

[8]:
```
# tableau des valeurs du polynôme reg issu de la régression linéaire
# évalué aux éléments du tableau des poids mg
# ici, reg est un polynôme de degré N=1 :
# tableau des reg[0]*P[i]**1+reg[1]*P[i]**0
leq_reg = a*P + b
```

[9]:
```
plt.errorbar( P , leq , yerr = u_leq   , fmt = 'b.',label='Points expérimentaux')
plt.plot( P  , leq_reg  , label='régression')
plt.ylabel(r'leq (m)')
plt.xlabel(r'P (N)')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

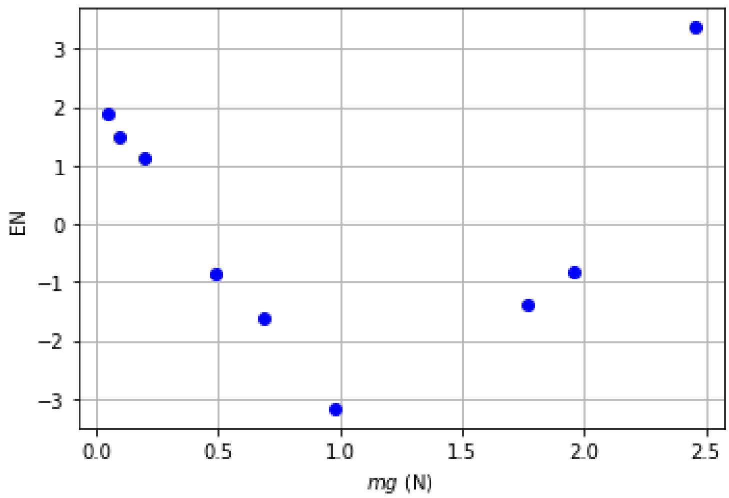


2.5 Ecarts normalisés

On calcule les écarts normalisés pour chaque point entre la mesure expérimentale et les résultats issus de la régression linéaire :

$$EN_i = \frac{\ell_{q,i} - \ell_{q,rg,i}}{u(\ell_{q,i})} = \frac{\ell_{q,i} - (a \times P_i + b)}{u(\ell_{q,i})}$$

[10]:
```
# Ecart normalisé entre les mesures expérimentales (leq) et les résultats issus de la régression␣
↪linéaire
EN = ( leq - leq_reg ) / u_leq
plt.plot(P,EN,'bo')
plt.xlabel(r'$mg$ (N)')
plt.ylabel(r'EN')
plt.grid()
plt.show()
```



Exemple n°2. Modèle validé

1 Bibliothèques nécessaires

[1]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

2 Validité de la modélisation linéaire ?

2.1 Mesures

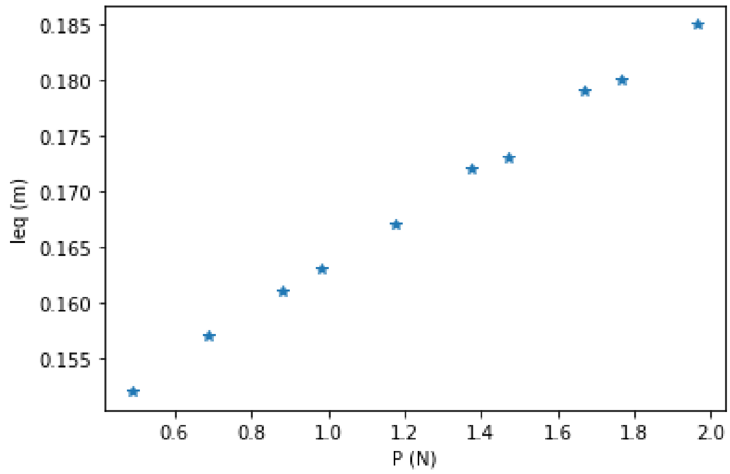
[2]:
```python
m = np.array( [50,70,90,100,120,140,150,170,180,200] )*10**-3   # (à compléter) (conversion en kg effectuée par *10**-3)
g = 9.81   # champ de pesanteur en m/s²
P =m*g# (à compléter) poids en Newton
leq = np.array( [15.2,15.7,16.1,16.3,16.7,17.2,17.3,17.9,18,18.5] )*10**-2 # (à compléter) (conversion en mètres effectuée par *10**-2)
```

2.2 Première courbe

Pour tracer la liste carotte en ordonée en fonction de la liste patate en abscisse on utilise la commande :

`plt.plot(patate,carotte,'*')`

[3]:
```python
plt.plot(P,leq, '*') # Tracé de leq en fonction de m * g
plt.xlabel (r'P (N)') # Légende de l'abscisse
plt.ylabel (r'leq (m)') # Légende de l'ordonnée
plt.show()
```



2.3 Ajoute des barres d'incertitudes

Afin d'exploiter plus quantitativement la courbe, il faut étudier les incertitudes.

- Déterminer la largeur (puis la demie-largeur $\Delta\ell_{\text{éq}}$) de l'intervalle de longueur $\ell_{\text{éq}}$ au sein duquel vous êtes certains que le résultat de la mesure se trouve.
- En déduire l'incertitude-type : $u(\ell_{\text{éq}}) = \dfrac{\Delta\ell_{\text{éq}}}{\sqrt{3}}$

[4]:
```python
# demie largeur de l'intervalle au sein duquel on est "certain" de trouver le résultat de la mesure de léq
```

```
Delta_leq = 0.5E-2       # m
# incertitudes type
u_leq = Delta_leq/np.sqrt(3)
```

[5]:
```
# Réprésentation graphique de leq en fonction du poids P, avec les barres d'incertitude
# yerr = valeur ou tableau qui contient les incertitudes-types sur l'ordonnée
plt.errorbar( P , leq , yerr = u_leq    , fmt = 'b.')
plt.ylabel(r'leq (m)')
plt.xlabel(r'P (N)')
plt.grid()
plt.show()
```

2.4 Régression linéaire

[6]:
```
# Régression linéaire, on modélise par un polynôme de degré 1
reg = np.polyfit(P , leq ,1) # régression linéaire de léq en fonction de P (polynôme de degré 1)
a = reg[0] # pente
b = reg[1] # ordonnée à l'origine
print('a=',a,'b=',b)
```

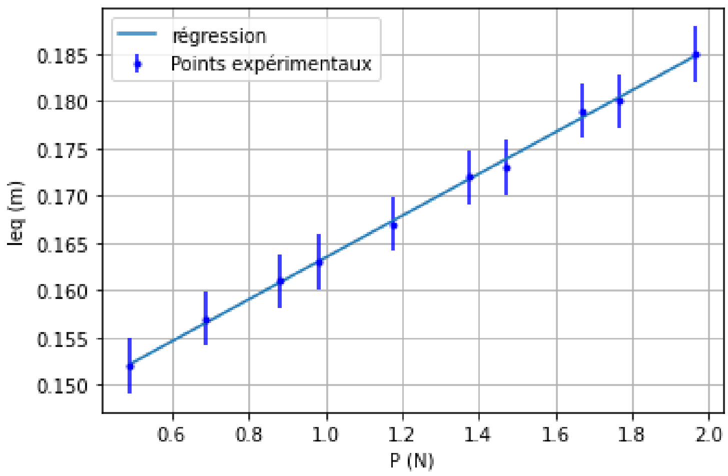
```
a= 0.022124129473165974 b= 0.14133621081326675
```

[7]:
```
# Constante de raideur issue de la régression linéaire = l'inverse de la pente
k = 1/a
print('k=',k)
```

```
k= 45.19951852627174
```

[8]:
```
# tableau des valeurs du polynôme reg issu de la régression linéaire
# évalué aux éléments du tableau des poids mg
# ici, reg est un polynôme de degré N=1 :
# tableau des reg[0]*P[i]**1+reg[1]*P[i]**0
leq_reg = a*P + b
```

[9]:
```
plt.errorbar( P , leq , yerr = u_leq    , fmt = 'b.',label='Points expérimentaux')
plt.plot( P   , leq_reg   , label='régression')
plt.ylabel(r'leq (m)')
plt.xlabel(r'P (N)')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

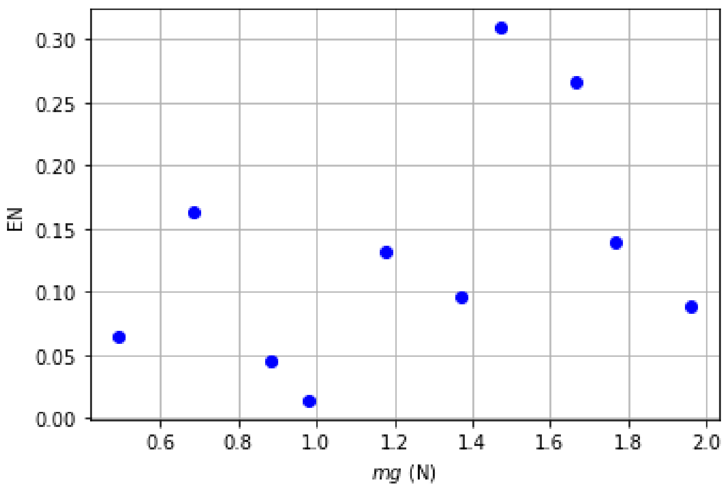


2.5 Ecarts normalisés

On calcule les écarts normalisés pour chaque point entre la mesure expérimentale et les résultats issus de la régression linéaire :

$$EN_i = \frac{\ell_{q,i} - \ell_{q,rg,i}}{u(\ell_{q,i})} = \frac{\ell_{q,i} - (a \times P_i + b)}{u(\ell_{q,i})}$$

[10]:
```
# Ecart normalisé entre les mesures expérimentales (leq) et les résultats issus de la régression
↪linéaire
EN = abs( leq - leq_reg ) / u_leq
plt.plot(P,EN,'bo')
plt.xlabel(r'$mg$ (N)')
plt.ylabel(r'EN')
plt.grid()
plt.show()
```



3 Valeur de la constante de raideur

À partir des mesures précédentes, comment peut-on en déduire un ensemble de valeurs de k ?

Comment en déduire le résultat de l'expérience avec son incertitude-type ?

[11]:
```
k = P/(leq-b)   # (formule à compléter) : va donner une liste de valeur de k
```

[12]:
```
## Exploitation :
kmoy = np.mean(k)
s_k = np.std(k,ddof=1)
u_k = s_k/np.sqrt(len(k))
print(kmoy,u_k)
```

```
45.20346861789943 0.2573387085113404
```

Bilan du TP

- **Bilan**
  - La mesure de la constante d'un élastique peut se faire en mesurant la **longueur** à l' **équilibre**, d'un élastique vertical au bout duquel on **accroche** **différentes** **masses**, et exploiter la relation $\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}$.
- **Validation d'une loi**
  - Pour valider ou une loi (ici pour déterminer si la force exercée par l'élastique est du type $-k(\ell - \ell_0)$), il est utile d'effectuer une représentation **graphique** pour réaliser une **régression** **linéaire**.
  - Sur la représentation graphique, on place les points avec leurs **barres** d'**incertitude**, superposés avec la droite issue de la **régression linéaire**.

    Si les barres d'incertitudes touchent la droite de régression, cela permet de **valider** qualitativement la loi utilisée.
  - La validation peut également passer par la représentation des **écarts normalisés** entre les mesures expérimentales et les valeurs issues de la régression linéaire. S'ils sont toujours **inférieurs** à **2**, les mesures sont compatibles avec la loi, qui peut donc être **validée** dans les conditions de l'expérience.