Tu peux le faire
Ne doute pas de tes capacités
N'abandonne pas et reste concentré.e
Crois en toi
Tu as les ressources en toi pour réussir
Fais de ton mieux.
Ne lâche rien

Lundi 17 novembre 2025 — *Durée : 2 heures*

Devoir Surveillé n°4 (1) — Oscillateurs amortis

La calculatrice est INTERDITE.

Check-list à cocher !

Sur la forme :	
Ma copie est rédigée sur des copies doubles.	❏
Prendre une nouvelle copie double pour chaque exercice.	❏
Ma copie est propre.	❏
Chaque réponse commence par une phrase / des mots.	❏
Les résultats littéraux sont encadrés, les applications numériques soulignées.	❏
Un long trait horizontal est tiré entre chaque question.	❏
Les pages sont numérotées.	❏
Sur le fond :	
Les expressions littérales sont homogènes.	❏
Les applications numériques sont suivies d'une unité adaptée.	❏

Ce sujet comporte 4 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de 4 pages.

Contenu du DS :

Exercice n°1 Questions de cours : Représentation complexe *(Durée : MAX 5 min)*

Q1. **Donner** la solution particulière de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0^2}{Q}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 z_A(t) \quad \text{où} \quad z_A(t) = Z_{Am}\cos(\omega t)$$

Q2. **Donner** la représentation complexe de $z_A(t) = Z_{Am}\cos(\omega t)$.

Q3. **Donner** la représentation complexe de $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$, puis introduire l'amplitude complexe.

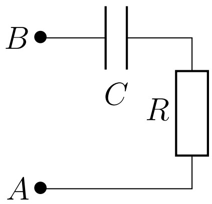
Q4. Comment obtient-on S_m et φ connaissant $\underline{S_m}$?

Exercice n°2 Circuits électriques en RSF *(Durée : MAX 10 min)*

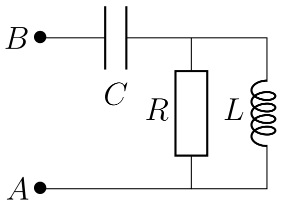
Q1. **Donner** l'expression de l'impédance complexe d'un conducteur ohmique de résistance R, d'une bobine idéale d'inductance L et d'un condensateur de capacité C.

Q2. **Déterminer** les impédances équivalentes entre A et B des circuits suivants.

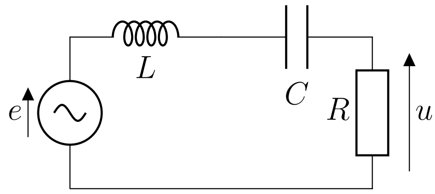
(a) .



(b) .

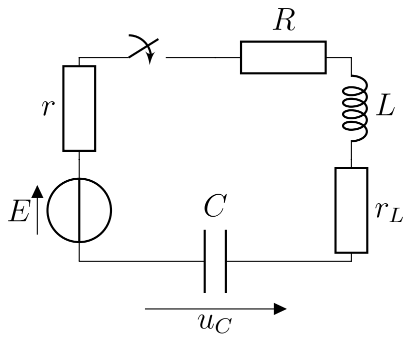


Q3. Le circuit ci-contre est alimenté par un générateur de force électromotrice $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.
Exprimer $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}$, R, C et L de façon efficace.



Exercice n°3 Étude d'un circuit RLC *(Durée ∼ 30 min)*

On étudie la réponse d'un circuit RCL série constitué, d'un condensateur de capacité $C = 1,0$ nF, d'une résistance $R = 100\ \Omega$, d'une bobine réelle (modélisée par l'association série d'une bobine idéale d'inductance L et d'une résistance r_L) en série alimenté par un générateur réel modélisé par son modèle de Thévenin, de force électromotrice E et de résistance interne $r = 50\ \Omega$.
Pour les temps $t < 0$, l'interrupteur est ouvert et le condensateur est déchargé. À l'instant initial, $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



Q1. **Déterminer** la résistance R_{tot} équivalente aux résistances de ce circuit. Reproduire le circuit avec R_{tot}.

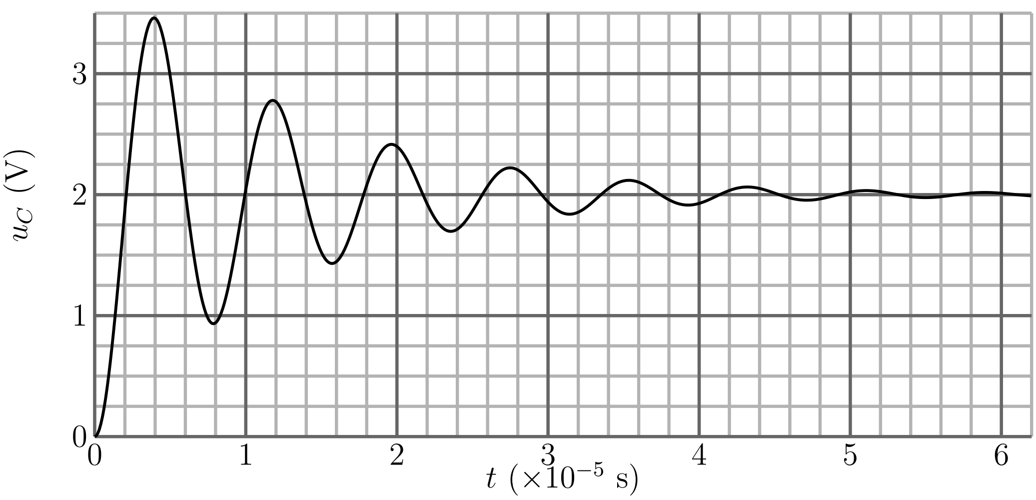
Q2. **Déterminer**, <u>en justifiant très proprement</u> la réponse, les valeurs de $u_C(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+)$, juste après la fermeture de l'interrupteur.

Q3. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$, et l'écrire sous forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 u_C(\infty)$$

Identifier les expressions de ω_0, Q et $u_C(\infty)$. Les nommer et donner leurs unités.

On donne l'évolution de u_C au cours du temps.



Q4. Quelle est la nature du régime transitoire ? Que peut-on en déduire sur Q ?

Q5. **Établir** la solution générale de l'équation différentielle précédente.
Exprimer la pseudo-période, notée T, en fonction de ω_0 et Q.

Q6. **Déterminer** les constantes d'intégration et conclure.

Exercice n°4 Airbag *(Durée ∼ 1 heure)*

On se propose dans cette partie d'analyser le principe de détection d'un choc, conduisant au gonflage d'un airbag, à l'aide d'un matériau piézoélectrique.

I Principe d'un accéléromètre *(Durée ∼ 30 minutes)*

On considère une masse m susceptible de se déplacer par rapport à une voiture. L'ensemble est modélisé en figure 1.

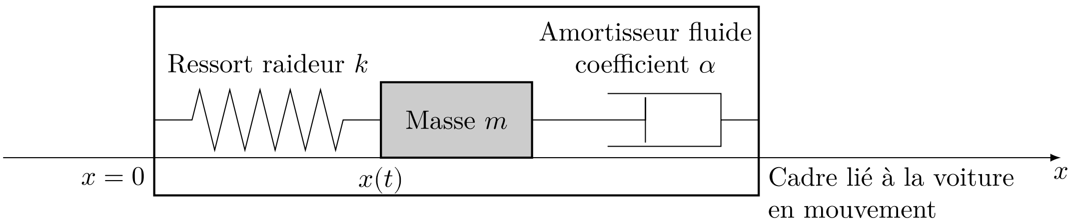


FIGURE 1

La masse m se déplace horizontalement et sans frottement solide sur un support lié à la voiture. Le ressort a pour constante de raideur k et pour longueur à vide L_0. L'amortisseur exerce une force de frottement fluide sur la masse, son expression étant $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{V}$ où $\overrightarrow{V}$ représente la vitesse de la masse dans le référentiel lié à la voiture.
Le vecteur unitaire de l'axe des x, orienté dans le sens des x positifs, est noté $\overrightarrow{u_x}$. Le référentiel lié à la voiture est en mouvement par rapport au référentiel terrestre.
Pour étudier le mouvement de la masse dans le référentiel lié à la voiture, on admet que, dans l'application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié à la voiture, il est nécessaire d'introduire une force supplémentaire, nommée force d'inertie d'entrainement, d'expression $\overrightarrow{f_{ie}} = ma_e\overrightarrow{u_x}$, où a_e est l'accélération constante de la voiture.

Q1. **Effectuer** le bilan des différentes forces s'exerçant sur la masse m.

Q2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié à la voiture, **montrer que** l'équation différentielle du mouvement en $X(t) = x(t) - L_0$ peut être mise sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 X = a_e$$

en exprimant Q et ω_0 en fonction de m, k et α.
Comment s'appellent ces grandeurs ? Quelles sont leurs unités ?

Résolution

On suppose que la phase de freinage commence à $t = 0$ et on note t_0 l'instant correspondant à l'arrêt complet de la voiture. On suppose qu'avant la phase de freinage, le ressort a une longueur égale à L_0. On s'intéresse au cas où le facteur de qualité Q est égal à $\frac{1}{2}$.

Q3. Pourquoi $X(t = 0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t = 0) = 0$?

Q4. **Résoudre complètement** l'équation différentielle établie à la question Q2 à l'aide des conditions initiales (Q3).

Q5. Quelle est la valeur atteinte par X quand $t \to \infty$?

Q6. **Représenter l'allure** des variations de $X(t)$ pour tout t, en supposant que le régime permanent a le temps de s'établir entre $t = 0$ et t_0. On précisera en particulier l'expression de $X(t)$ à $t = t_0$ ainsi que sa valeur si t tend vers l'infini mais le calcul au-delà de t_0 n'est en aucun cas demandé.

II Microgénérateur piézoélectrique *(Durée ∼ 30 minutes)*

Un élément piézoélectrique est collé à une « poutre », qui se met en mouvement sous l'effet de vibrations extérieures. L'élément piézoélectrique transforme l'énergie récupérée en énergie électrique, ce qui constitue une source autonome de puissance.

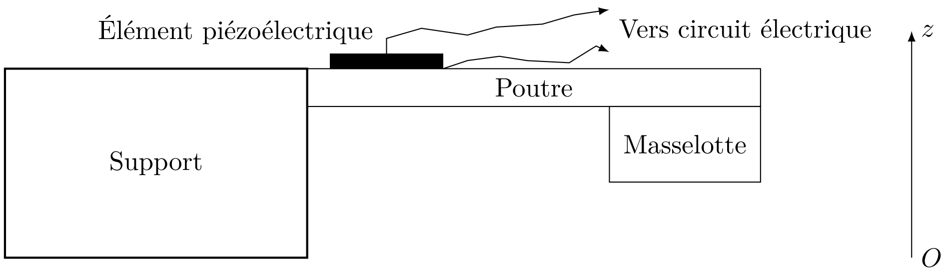


Figure 2

On appelle $\overrightarrow{F_E}$ la force excitatrice ambiante, supposée sinusoïdale : $\overrightarrow{F_E} = F_E\overrightarrow{u_x} = F_0\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$. On travaille dans un référentiel terrestre. On se place en régime sinusoïdal forcé.
Le déplacement vertical du centre d'inertie de la poutre peut être modélisé par l'équation mécanique :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = \frac{F_E(t)}{M}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$; $Q = \dfrac{\sqrt{kM}}{\alpha}$ et $F_E(t) = F_0\cos(\omega t)$.
On utilise la représentation complexe et on écrit $\underline{F_E} = F_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{z}(t) = \underline{Z_m} e^{j\omega t}$.

Q7. **Établir** l'expression de l'amplitude complexe $\underline{Z_m}$ en fonction de F_0, M, ω_0, Q et ω.

On introduit pour la suite la pulsation réduite $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

Q8. **Montrer** que l'amplitude Z_m s'écrit :

$$Z_m(x) = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

On introduit la fonction $g : x \mapsto \left(1-x^2\right)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}$.

Q9. Résonance ?
   (a) **Déterminer** les annulations de la dérivée de g.
   (b) À quelle condition sur Q la dérivée de g s'annule ailleurs qu'en 0 ?
   (c) **En déduire** que l'amplitude admet un maximum pour une pulsation ω_r que l'on exprimera en fonction de ω_0 et Q. **Donner** la condition sur Q pour qu'elle existe.

Q10. Tracer l'allure de $Z_m(\omega)$ lorsque $Q = 2$ et $Q = 0,5$.