Tu peux le faire
Ne doute pas de tes capacités
N'abandonne pas et reste concentré.e
Crois en toi
Tu as les ressources en toi pour réussir
Fais de ton mieux.
Ne lâche rien

Lundi 17 novembre 2025 – *Durée : 2 heures*

Devoir Surveillé n°4 (2) – Oscillateurs amortis

La calculatrice est INTERDITE

Check-list à cocher !

Sur la forme :	
Ma copie est rédigée sur des copies doubles.	❏
Prendre une nouvelle copie double pour chaque exercice.	❏
Ma copie est propre.	❏
Chaque réponse commence par une phrase / des mots.	❏
Les résultats littéraux sont encadrés, les applications numériques soulignées.	❏
Un long trait horizontal est tiré entre chaque question.	❏
Les pages sont numérotées.	❏
Sur le fond :	
Les expressions littérales sont homogènes.	❏
Les applications numériques sont suivies d'une unité adaptée.	❏

Ce sujet comporte 3 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de 4 pages.

Contenu du DS :

Données numériques

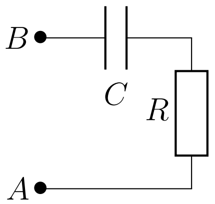
- $\ln(2) \approx 0,7$; $\ln^2(2) \approx 0,5$
- $\pi^2 \approx 10$
- $45^2 = 2025$

Exercice n°1 Circuits électriques en RSF *(Durée ∼ 15 min)*

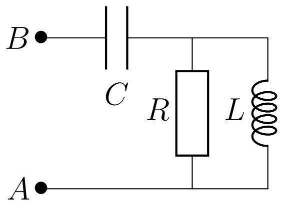
Q1. **Donner** l'expression de l'impédance complexe d'un conducteur ohmique de résistance R, d'une bobine idéale d'inductance L et d'un condensateur de capacité C.

Q2. **Déterminer** les impédances équivalentes entre A et B des circuits suivants.

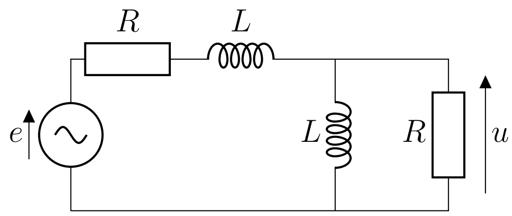
(a) .



(b) .

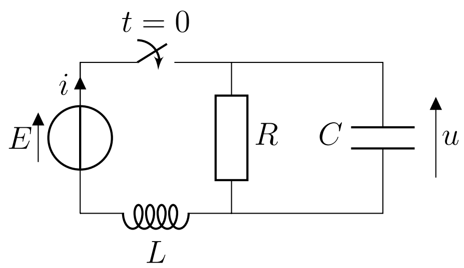


Q3. Le circuit ci-contre est alimenté par un générateur de force électromotrice $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.
Exprimer $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}$, R et L de façon efficace.



Exercice n°2 Étude d'un circuit RLC *(Durée ∼ 45 min)*

Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé.
L'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$.



Q1. Par une étude du circuit en régime permanent, **déterminer** l'expression de u en régime permanent.

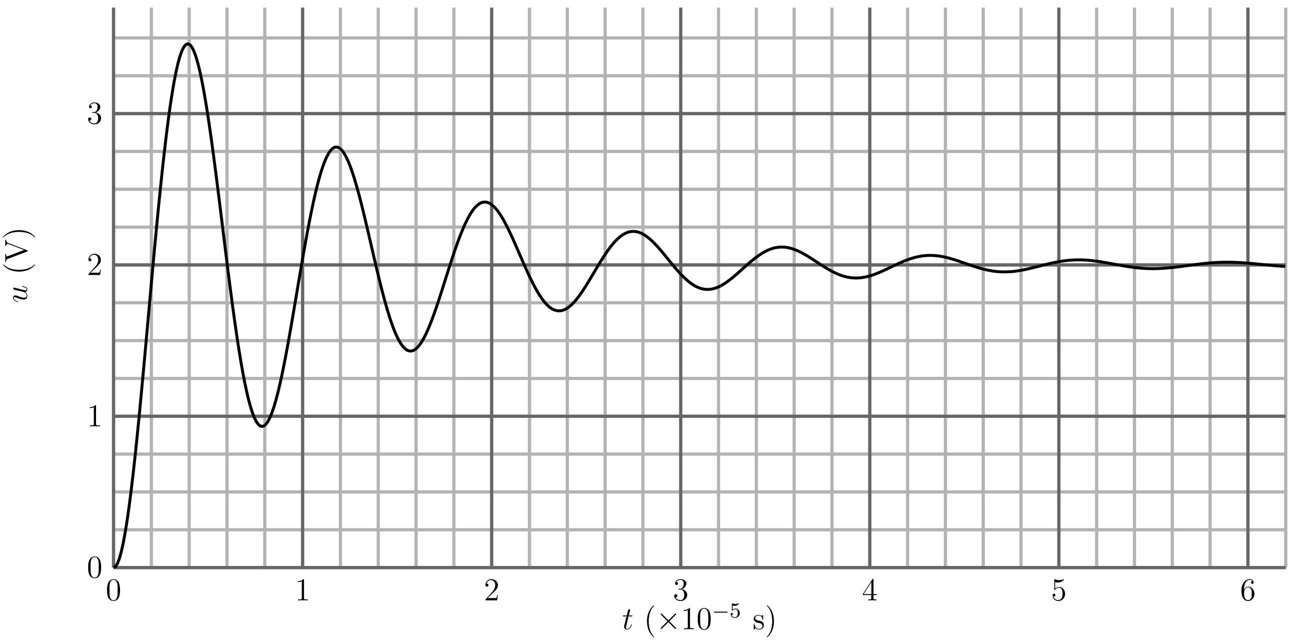
Q2. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par u et l'écrire sous la forme canonique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u(\infty)$$

Identifier les expressions de Q, ω_0 et $u(\infty)$. Les nommer et donner leurs unités.

Q3. **Déterminer** les deux conditions initiales nécessaires à la résolution de l'équation différentielle précédente.

On donne l'évolution de u au cours du temps.



Q4. Quelle est la nature du régime transitoire ?

Q5. **Résoudre complètement** l'équation différentielle précédente dans ce cadre-là.
Exprimer la pseudo-période, notée T, en fonction de ω_0 et Q.

Le décrément logarithmique est défini par $\delta = \ln\left(\dfrac{u(t)-u(\infty)}{u(t+T)-u(\infty)}\right)$, où T est la pseudo-période.

Q6. **Montrer** que le décrément logarithmique s'exprime uniquement en fonction de Q :

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}$$

Q7. En exploitant le graphe fourni, déterminer la valeur de Q.
En déduire la valeur de ω_0. *Des approximations raisonnables et justifiées pourront être faites.*

Exercice n°3 Airbag *(Durée ∼ 1 heure)*

On se propose dans cette partie d'analyser le principe de détection d'un choc, conduisant au gonflage d'un airbag, à l'aide d'un matériau piézoélectrique.

I Principe d'un accéléromètre

On considère une masse m susceptible de se déplacer par rapport à une voiture ; lors d'une phase de freinage, le référentiel lié à la voiture est non galiléen. L'ensemble est modélisé en figure 1.

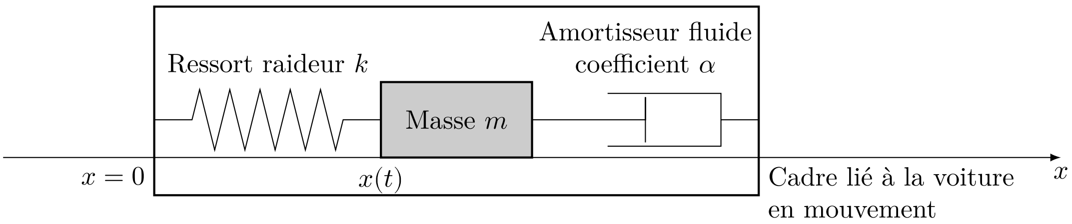


FIGURE 1

La masse m se déplace horizontalement et sans frottement solide sur un support lié à la voiture. Le ressort a pour constante de raideur k et pour longueur à vide L_0. L'amortisseur exerce une force de frottement fluide sur la masse, son expression étant $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{V}$ où $\overrightarrow{V}$ représente la vitesse de la masse dans le référentiel lié à la voiture.
Le vecteur unitaire de l'axe des x, orienté dans le sens des x positifs, est noté $\overrightarrow{u_x}$. Le référentiel lié à la voiture est en mouvement par rapport au référentiel terrestre.
Pour tenir compte du caractère non galiléen du référentiel lié à la voiture, on admet que, dans l'application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié à la voiture, il est nécessaire d'introduire une force supplémentaire, nommée force d'inertie d'entrainement, d'expression $\overrightarrow{f_{ie}} = ma_e\overrightarrow{u_x}$.

Q1. **Effectuer** le bilan des différentes forces s'exerçant sur la masse m.

Q2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié à la voiture, **montrer que** l'équation différentielle du mouvement en $X(t) = x(t) - L_0$ peut être mise sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2X = a_e$$

en exprimant Q et ω_0 en fonction de m, k et α.
Comment s'appellent ces grandeurs ? Quelles sont leurs unités ?

Résolution

On suppose que la phase de freinage commence à $t=0$ et on note t_0 l'instant correspondant à l'arrêt complet de la voiture. On suppose qu'avant la phase de freinage, le ressort a une longueur égale à L_0 et la masse est sans mouvement dans le référentiel lié à la voiture.
On s'intéresse au cas où le facteur de qualité Q est égal à $\dfrac{1}{2}$.

Q3. Que vaut $X(t)$ pour $t < 0$?

Q4. **Résoudre complètement** l'équation différentielle établie à la question Q2.

Q5. Quelle est la valeur atteinte par X quand $t \to \infty$?

Q6. **Représenter l'allure** des variations de $X(t)$ pour tout t, en supposant que le régime permanent a le temps de s'établir entre $t = 0$ et t_0.
On précisera en particulier l'expression de $X(t)$ à $t = t_0$ ainsi que sa valeur si t tend vers l'infini mais le calcul au-delà de t_0 n'est en aucun cas demandé.

II Microgénérateur piézoélectrique

Un élément piézoélectrique est collé à une « poutre », qui se met en mouvement sous l'effet de vibrations extérieures. L'élément piézoélectrique transforme l'énergie récupérée en énergie électrique, ce qui constitue une source autonome de puissance.

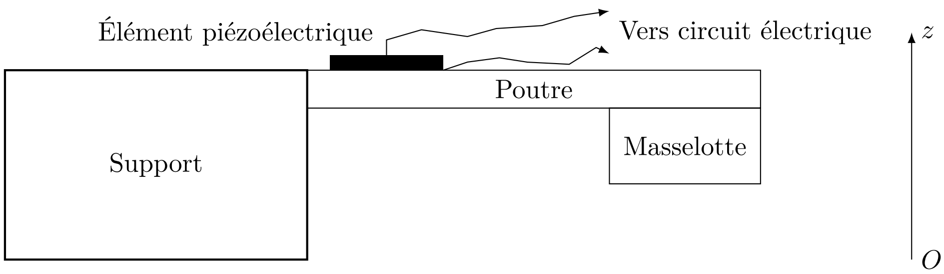


FIGURE 2

On appelle $\overrightarrow{F_E}$ la force excitatrice ambiante, supposée sinusoïdale : $\overrightarrow{F_E} = F_E\overrightarrow{u_x} = F_0\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$. On travaille dans un référentiel terrestre. On se place en régime sinusoïdal forcé.
Le déplacement vertical du centre d'inertie de la poutre peut être modélisé par l'équation mécanique :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = \frac{F_E}{M}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$ et $Q = \dfrac{\sqrt{kM}}{\alpha}$.

On pose $z(t) = \Re\left(\underline{Z_m}e^{j\omega t}\right)$.

Q7. **Établir** l'expression de l'amplitude complexe $\underline{Z_m}$ en fonction de F_0, M, ω_0, Q et ω.

On introduit pour la suite la pulsation réduite $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

Q8. **Exprimer** l'amplitude Z_m du mouvement de la masse M.

Q9. **Montrer** qu'il se produit une résonance en une pulsation ω_r que l'on exprimera en fonction de ω_0 et Q, à une condition sur Q que l'on exprimera.

Dans toute la suite, on se place à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$.

Q10. **Déterminer** à cette pulsation l'expression de l'amplitude complexe en fonction de M, k, α et F_0.
En déduire l'amplitude et la phase à l'origine des temps.

Q11. **En déduire** l'expression réelle de $z(t)$, puis l'expression de la vitesse $v_z(t)$ en fonction de F_0, α et ω_0.