Tu peux le faire
Ne doute pas de tes capacités
N'abandonne pas et reste concentré.e
Crois en toi
Tu as les ressources en toi pour réussir
Fais de ton mieux.
Ne lâche rien

Lundi 1er décembre 2025 — *Durée : 2 heures*

Devoir Surveillé n°5 (2) — Oscillateurs amortis

La calculatrice est INTERDITE

Check-list à cocher !

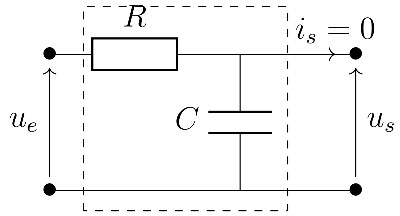
Sur la forme :	
Ma copie est rédigée sur des copies doubles.	❏
Prendre une nouvelle copie double pour chaque exercice.	❏
Ma copie est propre.	❏
Chaque réponse commence par une phrase / des mots.	❏
Les résultats littéraux sont encadrés, les applications numériques soulignées.	❏
Un long trait horizontal est tiré entre chaque question.	❏
Les pages sont numérotées.	❏
Sur le fond :	
Les expressions littérales sont homogènes.	❏
Les applications numériques sont suivies d'une unité adaptée.	❏

Ce sujet comporte 3 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de 6 pages.

Contenu du DS :

Exercice n°1 Questions de cours sur les filtres *(Durée ∼ 30 min)*

On étudie le filtre ci-contre constitué d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C, alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t)$.



Q1. **Définir** la fonction de transfert du filtre ci-dessus.

Q2. **Établir** l'expression de la fonction de transfert du filtre ci-dessus.

On admet qu'elle s'écrit $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$ où ω_c est la pulsation de coupure.

Q3. **Définir** le gain en décibels.

Q4. **Déterminer** les équations des asymptotes aux diagrammes de Bode en gain et en phase à basse fréquence.

Q5. **Déterminer** les équations des asymptotes aux diagrammes de Bode en gain et en phase à haute fréquence.

Q6. **Représenter** le diagramme de Bode asymptotique. On pourra prendre $\omega_c = 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Exercice n°2 Passerelle Millénium Bridge *(Durée ∼ 1 heure)*

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du Hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaires pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés.
L'objectif de ce problème est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.

À l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les grandeurs complexes sont soulignées : $\underline{z} \in \mathbb{C}$.
Un point sur une grandeur indique la dérivée par rapport au temps de cette grandeur $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

Un oscillateur est constitué d'une masse m, dont le centre d'inertie G est repéré par la position x dans le référentiel galiléen $(O, \overrightarrow{e_x})$ - voir figure ci-contre.
L'origine O se situe au niveau du sol.
L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité α, exerçant sur m une force de frottement $\overrightarrow{F_f} = -\alpha\dot{x}\overrightarrow{e_x}$.
À tout instant t, on assimile la distance OG à la longueur $\ell(t)$ du ressort.
L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_x}$ avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

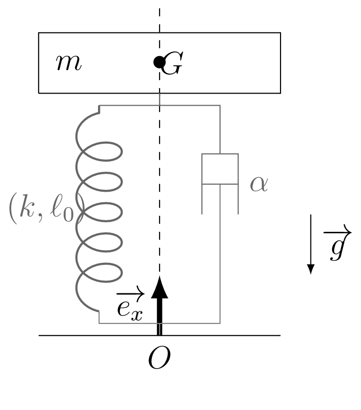


FIGURE 1 – Oscillateur

Q1. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

dans laquelle on a introduit la fonction $X(t) = x(t) - \tilde{x}$ où $\tilde{x}$ est une constante que l'on déterminera en fonction de g, ω_0 et ℓ_0. On précisera les expressions et significations de ω_0 et ξ.

Q2. Dans le régime libre, le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles $X(0) = X_0 \neq 0$ et $\dot{X}(0) = V_0 \neq 0$.
Déterminer les solutions du régime libre (en fonction de ω_0, ξ, X_0, V_0 et t) pour les cas $\xi = 0$ et $0 < \xi < 1$ et préciser leur comportement.

Q3. Dans certains cas, le vent peut induire sur le système une force proportionnelle au vecteur vitesse que l'on écrit $\overrightarrow{F_v} = \beta\dot{x}\overrightarrow{e_x}$, avec $\beta > 0$. Quelle peut-être la conséquence de ce phénomène ?

Différents cas peuvent être examinés pour l'excitation (ou forçage) $F(t)$ de l'oscillateur étudié lors des deux premières questions. Nous nous placerons dans l'optique d'une passerelle piétonne.
L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans cette partie.

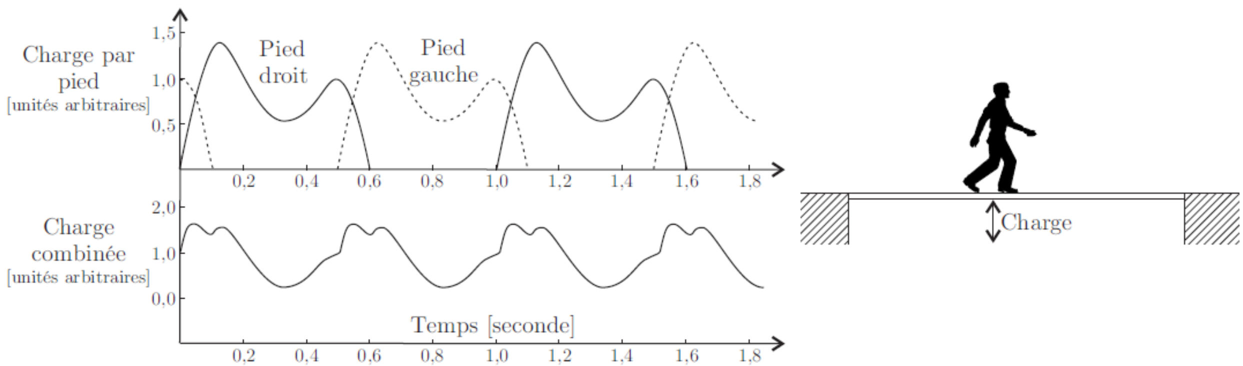


FIGURE 2 – Forçage d'une passerelle par la marche d'un piéton

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représenterons cette force, appelée charge, par un vecteur périodique $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_0} + \overrightarrow{F_1}\cos(2\pi f t)$.
Le vecteur $\overrightarrow{F_0}$ correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence f correspond à celle d'une marche normale. Nous considérerons que $\overrightarrow{F_1} = 0,4\overrightarrow{F_0}$.Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme $-\overrightarrow{e_x}$.
On note $F_0 = \left\|\overrightarrow{F_0}\right\|$ le module de la force statique, $Y(t) = X(t) + \dfrac{F_0}{m\omega_0^2}$ la réponse en déplacement de l'oscillateur et $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$ sa représentation complexe.

Q4. (a) Que devient l'équation de l'oscillateur en $Y(t)$ sous le forçage piéton ?
(b) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$, rapport de la représentation complexe de la réponse en déplacement $\underline{Y}$ sur la représentation complexe de l'excitation $\underline{E} = \dfrac{F_1}{m}$. On exprimera $\underline{H} = \dfrac{\underline{Y}}{\underline{E}}$ en fonction de ξ, ω_0 et $\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

Q5. (a) Sous quelle condition portant sur ξ un phénomène de résonance peut-il se produire ?
(b) Pour quelle pulsation ω_r , obtient-on alors ce phénomène ?
(c) Exprimer le gain en amplitude à la résonance $\left|\underline{H}\right|(\omega_r)$ dans la limite $\xi \ll 1$.

Q6. En se plaçant dans l'hypothèse $\xi \ll 1$ et à partir d'une analyse de la courbe 1 de la figure 3, déterminer un ordre de grandeur de ξ ainsi que la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur modélisant le Millennium Bridge avant la mise en place des amortisseurs harmoniques.
On fera attention avec le fait qu'en ordonnée, est reporté, en dB, $\omega_0^2\left|\underline{H}\right|$, c'est-à-dire $20\log\left(\omega_0^2\left|\underline{H}\right|\right)$.

Q7. Pourquoi est-il important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique ?

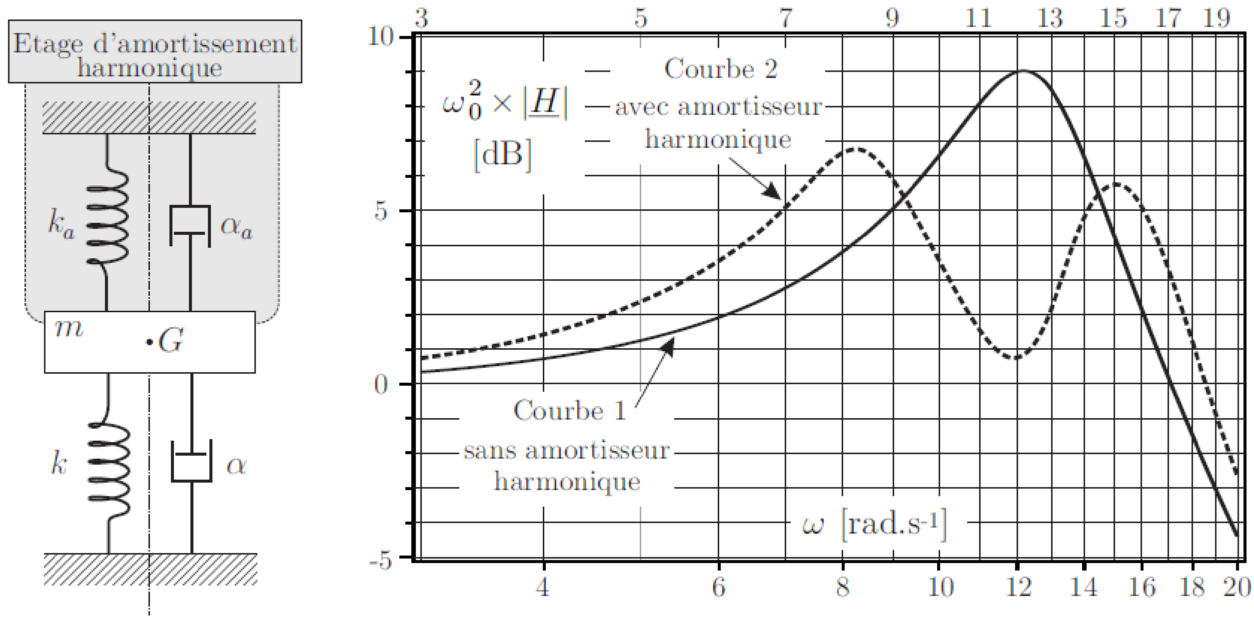


Figure 3 – Schéma et réponse d'un amortisseur harmonique appliqué au modèle du Millennium Bridge

Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation. On calcule alors le spectre de ces signaux en les échantillonnant en $N = 300$ points équidistants sur un intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$.

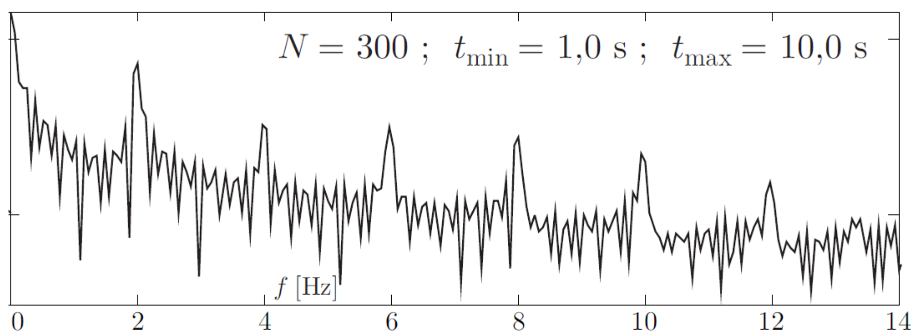
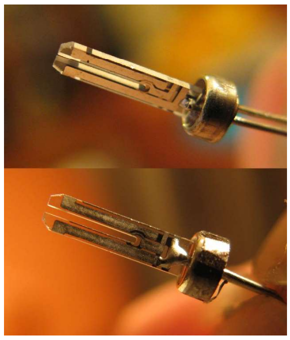


Figure 4 – Spectre des signaux correspondants à la marche du piéton

Q8. Interpréter le spectre obtenu.
Déterminer la fréquence du forçage. En déduire la fréquence caractéristique de la marche étudiée.

Q9. À partir d'une exploitation des données fournies dans le sujet, expliquer l'origine du problème concernant le Millennium Bridge et justifier que l'installation d'amortisseurs harmoniques ait pu le résoudre.

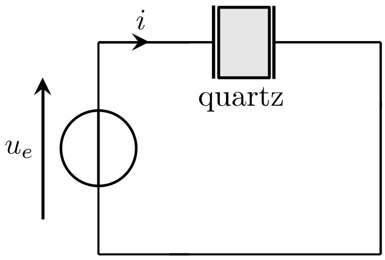
Exercice n°3 Horloge à quartz *(Durée ∼ 45 min)*



Quartz servant dans une montre.
ource : https://en.wikipedia.org/wiki/Quartz_clock

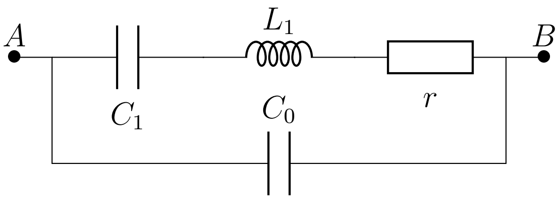
La première horloge à quartz est conçue en 1927 par les laboratoires Bell. La première montre-bracelet est commercialisée en 1969.
Le quartz est un cristal piézoélectrique : lorsqu'il est soumis à une différence de potentiel il se déforme, et inversement s'il est contraint mécaniquement alors une différence de potentiel apparaît entre ses faces.
Un cristal de quartz taillé en diapason – comme sur la figure ci-contre – vibre mécaniquement à une fréquence bien précise. Il est inséré dans un circuit électronique, avec une électrode métallisée sur chacune de ses faces. Cette précision dans la fréquence de vibration, associée au couplage électrique par l'effet piézoélectrique, permet d'obtenir des circuits électroniques résonants avec des facteurs de qualité très élevés, et donc des oscillateurs très précis.

I Étude du quartz



Pour étudier la résonance très sélective du quartz, on le place dans le montage ci-contre.
On dispose également d'un dispositif, non représenté, qui délivre une tension U_s égale à l'amplitude du courant i multipliée par une résistance $R = 47\ \text{k}\Omega$: si $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$, alors $U_s = R i_0$.

L'étude se fait en régime sinusoïdal forcé, et on utilise le formalisme complexe. On note les grandeurs complexes en les soulignant. Par exemple $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$ est représenté par $\underline{i}(t) = i_0 \exp\{j(\omega t + \varphi)\}$.



Électriquement, le comportement du quartz peut être modélisé par un condensateur C_0 (capacité des électrodes séparées par un diélectrique et des fils de liaisons) en parallèle avec un circuit série r, L_1 et C_1 qui correspond aux grandeurs motionnelles. Ce circuit série r, L_1, C_1 représente le couplage électromécanique lié à l'effet piézoélectrique.

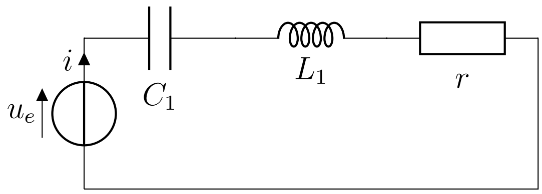
On étudie les résonances en intensité dans le quartz.

Pour repérer la résonance, on néglige d'abord tout effet dissipatif : dans les deux questions qui suivent, $r = 0$.

Q1. **Montrer que** l'impédance $\underline{Z}_q$ équivalente au dipôle A-B vérifie $\dfrac{1}{\underline{Z}_q} = jC_{\text{éq}}\,\omega \dfrac{1-\omega^2/\omega_2^2}{1-\omega^2/\omega_1^2}$, avec $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ et ω_2 et $C_{\text{éq}}$ dont on donnera les expressions en fonction de C_0, C_1 et L_1.

Q2. **En déduire** l'expression de la fréquence f_r de résonance en intensité du circuit d'étude du quartz.

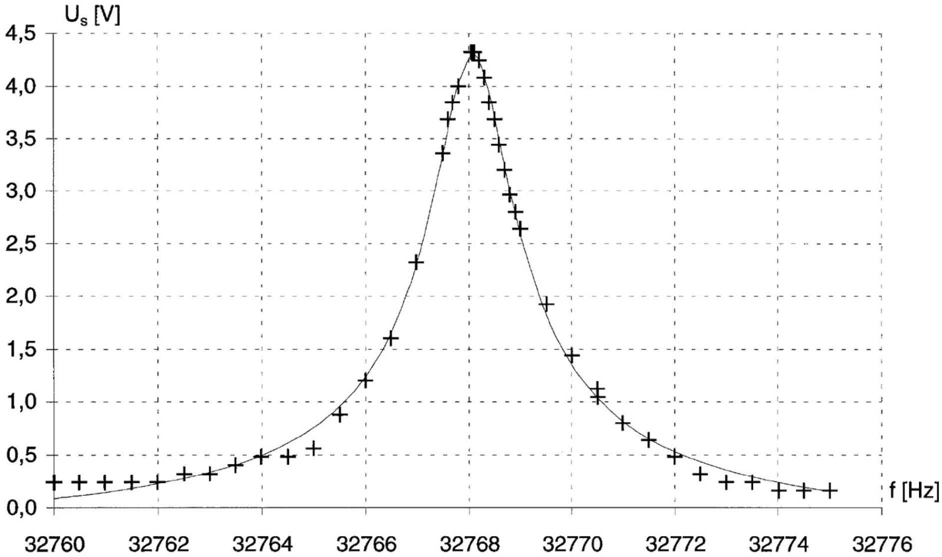
Q3. **Tracer l'allure** de i_0 en fonction de ω. Faire apparaître les pulsations particulières, et nommer les phénomènes se produisant. Commenter.



Les questions qui précèdent montrent que c'est la branche L_1, C_1, r qui est responsable de la résonance. Pour simplifier, on étudie donc le quartz en enlevant dans le modèle la capacité C_0. On obtient alors le circuit ci-contre.

Q4. **Montrer que** $\underline{i} = \dfrac{\underline{u_e}/r}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_1} - \dfrac{\omega_1}{\omega}\right)}$ où on exprimera Q.

La courbe ci-dessous donne, pour chaque point, la valeur de U_s pour une fréquence f donnée du signal $u_e(t)$. On rappelle que $U_s = R \times i_0$. L'amplitude du signal u_e est $u_0 = 0,20$ V.



source : Deiber et al., Bull. U. Phys. 799, 1997

Q5. **En exploitant le graphe**, **déterminer** la valeur de r et du facteur de qualité Q. *La réponse devra être justifier précisément.*
La résonance est-elle aiguë ?

On retiendra les valeurs approchées $r = 2$ kΩ, $Q = 20000$ et $\omega_1 = 2.10^5$ rad $\cdot$ s^{-1}.

Q6. **Déterminer** la valeur de L_1. **Commenter**.

II Utilisation dans une montre

Le quartz permet ainsi de concevoir un circuit filtre passe-bande avec un facteur de qualité très élevé.

Q7. Si on laisse le circuit précédent osciller de façon libre, donner une estimation du temps pendant lequel les oscillations perdurent. Ceci est-il raisonnable pour fabriquer une horloge ?

Le quartz est en réalité inséré dans un circuit dit « oscillateur », qui entretient ses oscillations. Le facteur de qualité élevé permet d'avoir un signal quasi-harmonique dont la fréquence est précisément contrôlée et vaut, dans le cas présent, 32768 Hz.

Q8. On peut remarquer que $32768 = 2^{15}$. Quelle peut-être la raison d'un tel choix pour la fabrication d'une montre ?