Pour jeudi 11 décembre 2025

Devoir Maison n°8

I Reprise du DS n°5 (2)

Exercice n°2 Passerelle Millénium Bridge

Q1. L'accélération de la pesanteur est-elle une force ? Que caractérise-t-elle ? Dans quelle force intervient-elle ?

Q2. *Ne pas reprendre entièrement : répondez aux questions ci-dessous.*

(a) Pour $\xi = 0$, quelle équation différentielle obtient-on ? Comment se comporte le système ?

(b) Pour $0 < \xi < 1$, quel est le signe du discriminant de l'équation caractéristique ? quelle est la nature du régime transitoire ?

Q3. *Ne pas refaire*

Q4. (a) Ajouter la force $\overrightarrow{F}$ au bilan des forces de la question Q1.

(b) Pourquoi la force s'exprime-t-elle $\overrightarrow{F} = -\left(F_0 + F_1\cos(\omega t)\right)\overrightarrow{u_z}$

(c) Montrer que X vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1(t)}{m}$$

(d) En déduire que $Y = X + \dfrac{F_0}{m\omega_0^2}$ vérifie :

$$\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1(t)}{m}$$

(e) Passer en complexe pour obtenir $\underline{Y}$ en fonction de $\underline{F_1}$, m, ω_0, ω et ξ.

(f) Introduire $\underline{E} = \dfrac{\underline{F_1}}{m}$ et $\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

(g) En déduire que $\underline{H} = \dfrac{\underline{Y}}{\underline{E}} = \dfrac{-1/\omega_0^2}{1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega}$.

Q5. (a) Étudier $|\underline{H}|$ pour déterminer l'existence de la résonance. *C'est très proche du cours.*

(b) suite du point précédent. *C'est très proche du cours.*

(c) Que peut-on dire de la pulsation de résonance $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$ si $\xi \ll 1$?

(d) En déduire $H(\omega_r)$. *Sans trop de calculs !*

Exercice n°3 Quartz

Travailler le corrigé, et répondre aux questions ci-dessous : je n'attends pas que vous me rendiez tous les calculs. Mais vous pouvez évidemment tout refaire !

Q1. *ne pas refaire, c'est juste du calcul un peu bourrin*

Q2. Pourquoi $\underline{i} = \dfrac{\underline{u_e}}{\underline{Z_q}}$?

Que se passe-t-il pour $\omega = \omega_1$? Pour $\omega = \omega_2$? Pour quelle pulsation y a-t-il résonance en intensité ?
La valeur de l'intensité i_0 a-t-elle un sens à la résonance ? D'où vient cette « anomalie » ?

Q3. *ne pas reprendre*

Q4. Quelle situation reconnaissez-vous ?

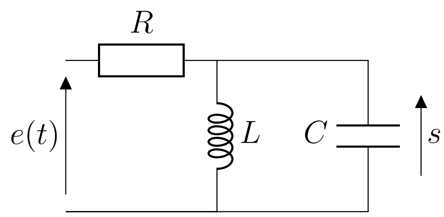
Q5. Pourquoi la résonance correspond à un minimum du dénominateur ? Pourquoi se produit-elle en ω_1 ?

II Exercices du DM

Traiter l'un des deux exercices ci-dessous. Le n°1 est plus proche du cours / plus classique. Le n°2 est plus original.

Exercice n°1 Étude d'un filtre

On étudie le circuit ci-contre alimenté en régime sinusoïdal par un générateur de fem $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.
On étudie la tension aux bornes de l'association parallèle du condensateur et de la bobine.



Q1. Par analyse asymptotique du circuit, déterminer la nature du filtre.

Q2. Établir l'expression de la fonction de transfert et l'écrire sous la forme :

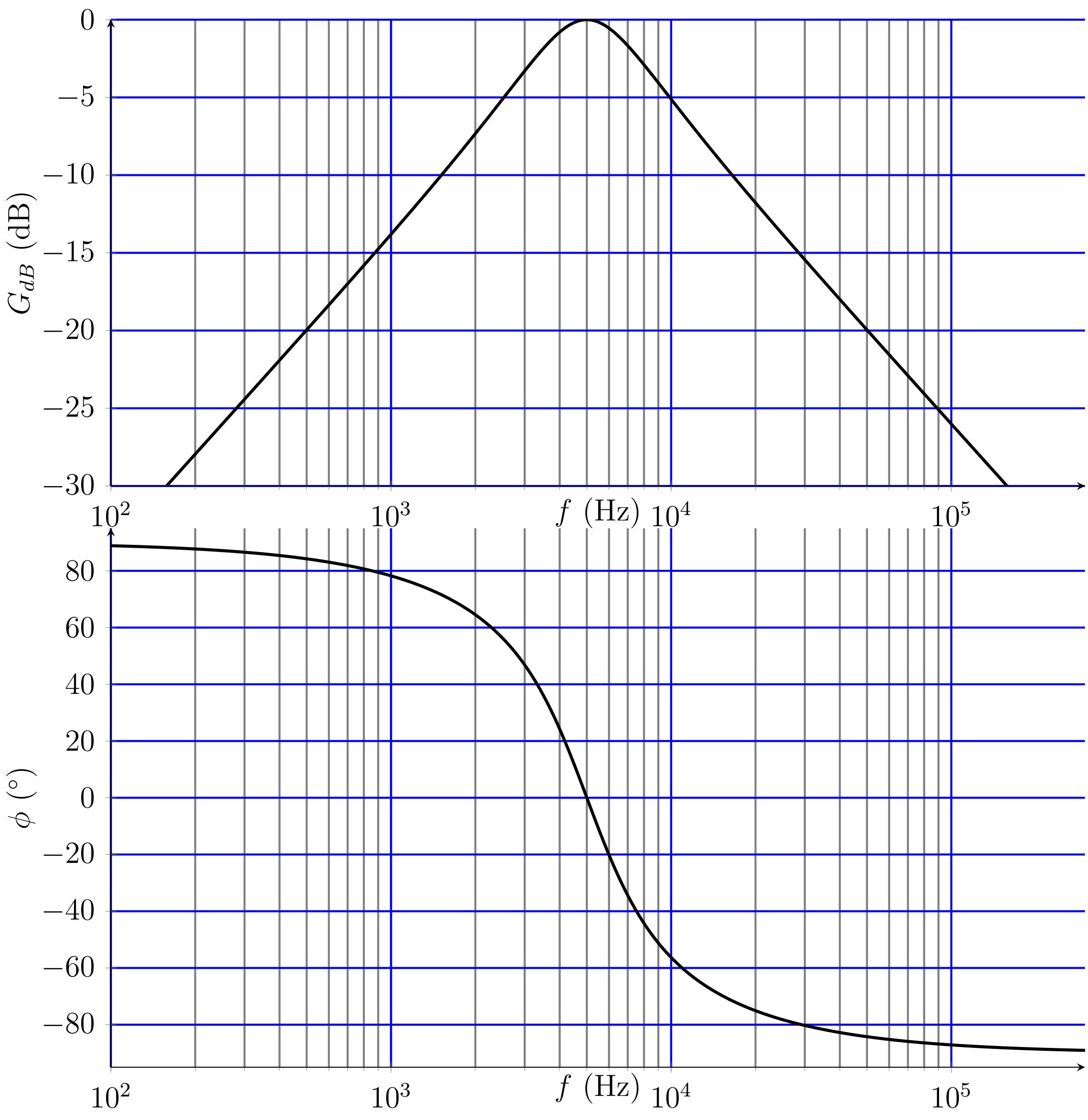
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Identifier les expressions de ω_0 et Q en fonction de R, L et C. *On pourra admettre la forme canonique fournie, et ne pas passer trop de temps dans l'identification de ω_0 et Q.*

Q3. Exprimer le gain de ce filtre.

Q4. Justifier qu'il y a résonance pour une pulsation que l'on établira en fonction de ω_0. Y a-t-il une condition sur le facteur de qualité pour son existence ?

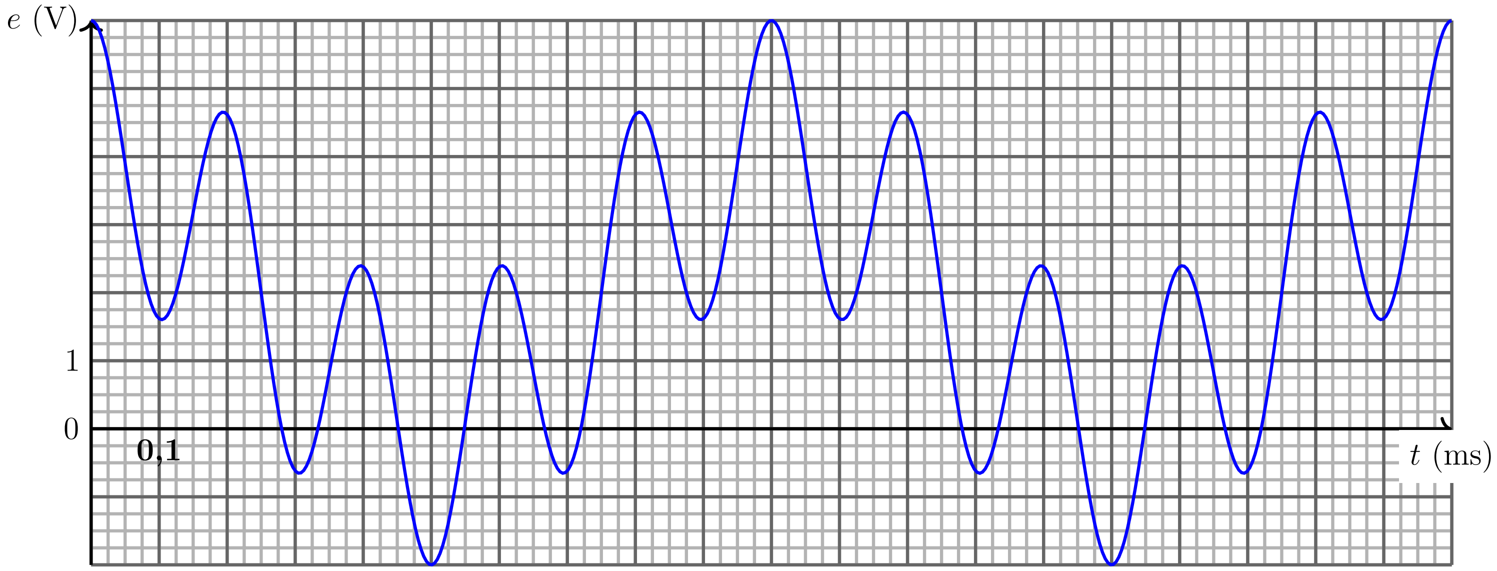
Q5. Exploiter le graphique ci-dessous pour déterminer les valeurs de la fréquence propre f_0 et Q. *La démarche devra être décrite précisément.*



Q6. À partir de la fonction de transfert, déterminer les équations des asymptotes au diagramme de Bode en gain. Comparer au diagramme fourni.

En entrée de ce filtre est envoyé un signal périodique, représenté ci-dessous et d'expression :

$$e(t) = E_0 + E\cos(2\pi f t) + E\cos(2\pi \times 5ft)$$



Q7. Déterminer la fréquence du signal.

Q8. On recherche la tension de sortie sous la forme :

$$s(t) = S_0 + S_1\cos(2\pi f t + \varphi_1) + S_2\cos(2\pi \times 5ft + \varphi_2)$$

(a) Pourquoi $S_0 = 0$?

(b) Par exploitation du diagramme de Bode, déterminer S_1, S_2, φ_1 et φ_2.

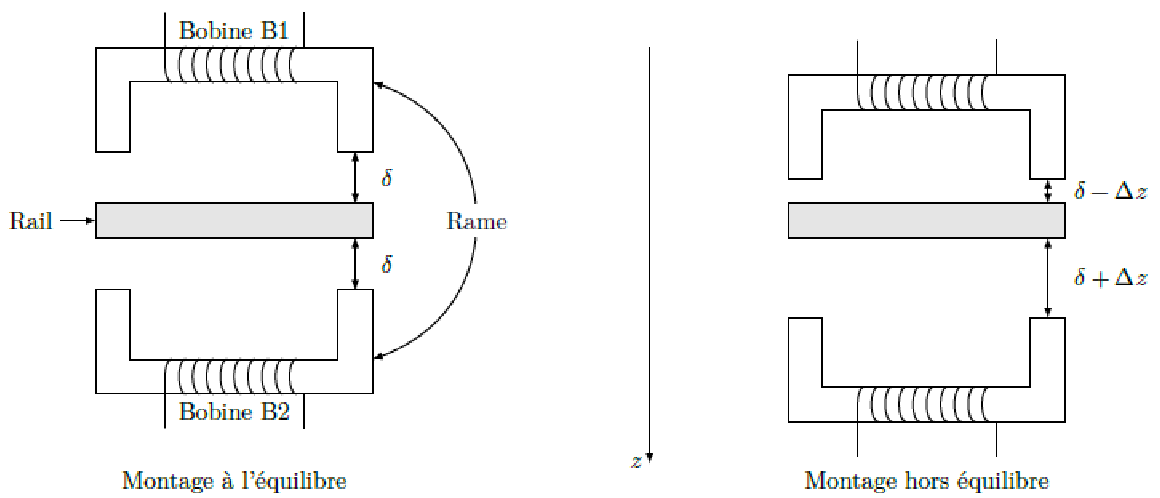
(c) En déduire l'expression complète du signal de sortie.

(d) Représenter l'allure de s.

Exercice n°2 Trains à sustentation magnétique

L'instabilité de l'équilibre de la rame en sustentation nécessite l'asservissement en position. Cet asservissement est réalisé en utilisant un capteur de position. On se propose dans cette partie d'étudier le principe d'un capteur de position à inductance variable.

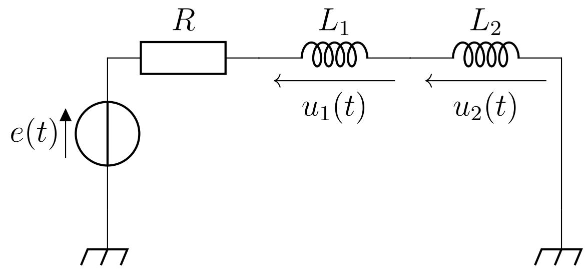
Le capteur comprend un circuit magnétique composé d'un noyau solidaire du rail fixe et de $B1$ et $B2$ en vis-à-vis, solidaires de la rame. Les bobines $B1$ et $B2$ du capteur sont identiques et placées de façon symétrique par rapport au rail lorsque la rame est à l'équilibre.



On envisage une variation Δz de la position du train par rapport à la position d'équilibre $z_e = \delta$, en considérant $\Delta z \ll \delta$, on montre que $L_1 = L_e\left(1+\dfrac{\Delta z}{\delta}\right)$ et $L_2 = L_e\left(1-\dfrac{\Delta z}{\delta}\right)$.

Mesure des variations d'inductance

Les bobines $B1$ et $B2$ qui se situent de part et d'autre du rail sont d'inductance respective L_1 et L_2.
Elles sont alimentées par un générateur délivrant une tension électrique $e(t) = E\cos(\omega t)$, de pulsation ω, en série avec une résistance R.
On néglige ici les résistances des deux bobines.



Q1. Déterminer les expressions des tensions électriques complexes $\underline{u_1}$ et $\underline{u_2}$ en fonction de R, L_1, L_2, ω et $\underline{e}(t)$.

Ces deux tensions u_1 et u_2 sont placées en entrée d'un montage soustracteur qui délivre en sortie une tension $\underline{u_s} = \underline{u_1} - \underline{u_2}$.

Q2. Établir la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{e}}$ et la mettre sous la forme $\underline{H}(j\omega) = H_0\dfrac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ où H_0 et ω_0 sont des fonctions de L_e, R, Δz et δ, que l'on déterminera.

Q3. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de $\underline{H}(j\omega)$ en fonction de $\dfrac{\omega}{\omega_0}$. *La réponse devra être parfaitement justifiée à partir de l'étude précise de la fonction de transfert.*
Pour le diagramme de Bode en phase, deux cas devront être distingués selon le signe de Δz.

Q4. De quel type de filtre s'agit-il ?

Q5. Quelle est la signification de la pulsation ω_0 ?

Q6. Dans quelle gamme de fréquences doit-on travailler pour que $\underline{H}(j\omega)$ soit indépendant de ω et proportionnel au déplacement de la rame ?
On a $R = 750\ \Omega$, $L_e = 60$ mH et une fréquence d'utilisation $f = 4$ kHz.

Q7. Montrer que le signal de sortie peut se mettre sous la forme $u_s(t) = E\dfrac{\Delta z}{\delta}\cos(\omega t + \varphi)$.

Q8. Exprimer et calculer le déphasage φ.

Électronique de conditionnement

On souhaite obtenir un signal continu image de la position z de la rame.
On utilise pour cela un multiplieur analogique, avec une constante de multiplication K_m. En sortie du multiplieur, la tension s'écrit $s_m(t) = K_m \times e(t) \times u_s(t)$.

Q9. Exprimer la tension électrique $s_m(t)$ à la sortie du multiplieur et donner sa décomposition spectrale (linéariser $s_m(t)$).
Préciser le terme représentatif de la position z de la rame.

Q10. Quel montage doit-on placer à la sortie du multiplieur pour récupérer une tension continue S_m proportionnelle au déplacement Δz ? Préciser la nature et les caractéristiques du montage.

Q11. Exprimer la sensibilité du capteur définie par $\dfrac{S_m}{\Delta z}$.

Q12. *Application numérique* Le capteur permet de mesurer la tension de sortie à 10 mV près. En déduire le plus petit écart relatif par rapport à la position d'équilibre. On prendra $E = 6,00$ V, $K_m = 1,00\ \text{V}^{-1}$.