Pour le jeudi 22 janvier 2026

Devoir Maison n°11 — Mécanique

Travail à faire :

- ♪ si vous êtes en difficulté (régulièrement moins de 8 aux DS) : exercice n°1.
- ♪ ♪ si vous n'êtes pas en difficulté, mais pas très à l'aise (entre 8 et 14 à la plupart des DS) : exercice n°2.
- ♪ ♪ ♪ si vous êtes à l'aise (plus de 14 à la plupart des DS) : exercice n°3.

Exercice n°1 Mesure de coefficients de frottements

On rappelle ci-dessous les lois de Coulomb, en notant f_s et f_g les coefficients statiques et dynamiques du frottement et $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ les composantes tangentielle et normale de la réaction.

- En mode statique (absence de glissement donc adhérence), la norme de la composante tangentielle $\|\overrightarrow{T}\|$ est inférieure à la quantité $f_s\|\overrightarrow{N}\|$ dans laquelle $\|\overrightarrow{N}\|$ représente la norme de la composante normale $\overrightarrow{N}$ de la réaction : $\|\overrightarrow{T}\| \leq f_s\|\overrightarrow{N}\|$.
- En mode dynamique (présence de glissement), on a alors l'égalité $\|\overrightarrow{T}\| = f_g\|\overrightarrow{N}\|$ avec une composante tangentielle toujours opposée à la vitesse de glissement : $\overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{v_g} < 0$ et $\overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{v_g} = 0$.

Partie A Mesure du coefficient de frottement dynamique

On souhaite mesurer le coefficient de frottement dynamique d'une trousse sur une table horizontale. On communique une vitesse $v_0 =$ à la trousse à l'instant $t = 0$. Elle se trouve à l'origine du repère cartésien choisi. On choisit l'axe (Ox) dans la direction et le mouvement de la trousse.

Il est assez aisé de mesurer la distance D parcourue par la trousse avant de s'arrêter.

Q1. Effectuer la rédaction complète d'un exercice de mécanique.

Q2. Établir l'expression de $\|\overrightarrow{N}\|$, puis de $\|\overrightarrow{T}\|$. En déduire $\overrightarrow{T}$ en justifiant le signe.

Q3. En déduire que la composante de l'accélération s'écrit $\ddot{x} = -f_d g$.

Q4. Établir l'équation horaire de la trousse.

Q5. Déterminer l'expression de l'instant t_f d'arrêt de la trousse en fonction de v_0, f_d et g. En déduire la distance en fonction des mêmes données.

Q6. En déduire l'expression de f_d compte tenu des données de l'énoncé.

Q7. L'expérience est effectuée 10 fois et on obtient les 10 valeurs de f_d suivantes :

n°	1	2	3	4	5
f_d	0.66616418	0.63335882	0.6397244	0.6222114	0.63639974

n°	6	7	8	9	10
f_d	0.61419986	0.60191961	0.65060754	0.67982929	0.68657665

En déduire le résultat de l'expérience : valeur et incertitude de f_d.

Indications :

— L'utilisation de python est encouragée.

— Écriture sur votre copie les étapes / calculs nécessaires.

— Recopier sur votre copie les lignes de codes saisies sur python.

— Faire attention aux nombres de chiffres significatifs du résultat.

Partie B Mesure du coefficient de frottement statique

Traiter la question Q10 **la partie C** de l'exercice n°2.

Exercice n°2 Mesure de coefficients de frottements

Partie A Lois de Coulomb relatives au glissement

On rappelle ci-dessous les lois de Coulomb, en notant f_s et f_g les coefficients statiques et dynamiques du frottement et $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ les composantes tangentielle et normale de la réaction.

- En mode statique (absence de glissement donc adhérence), la norme de la composante tangentielle $\|\overrightarrow{T}\|$ est inférieure à la quantité $f_s\|\overrightarrow{N}\|$ dans laquelle $\|\overrightarrow{N}\|$ représente la norme de la composante normale $\overrightarrow{N}$ de la réaction : $\|\overrightarrow{T}\| \leq f_s\|\overrightarrow{N}\|$.
- En mode dynamique (présence de glissement), on a alors l'égalité $\|\overrightarrow{T}\| = f_g\|\overrightarrow{N}\|$ avec une composante tangentielle toujours opposée à la vitesse de glissement : $\overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{v_g} < 0$ et $\overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{v_g} = 0$.

Q1. Définir ce qu'on appelle la vitesse de glissement $\overrightarrow{v_g}$ d'un solide par rapport à un autre en un point de contact.

Q2. Expliquer à quelle condition on passe de l'adhérence au glissement.

Q3. Expliquer à quelle condition on passe du glissement à l'adhérence.

Partie B Mesure du coefficient de frottement dynamique

On utilise le dispositif représenté sur la figure 1. Un solide 1 de masse M est lié, par un fil inextensible et supposé sans masse, à un solide 2 de masse αM ($\alpha > 1 > f_s$). Le fil sans masse de longueur L passe sur la gorge d'une poulie idéale. Le solide 1 se déplace sur un support fixe S horizontal. On appelle H l'altitude du centre de masse du solide 2 au-dessus d'un support horizontal S'.

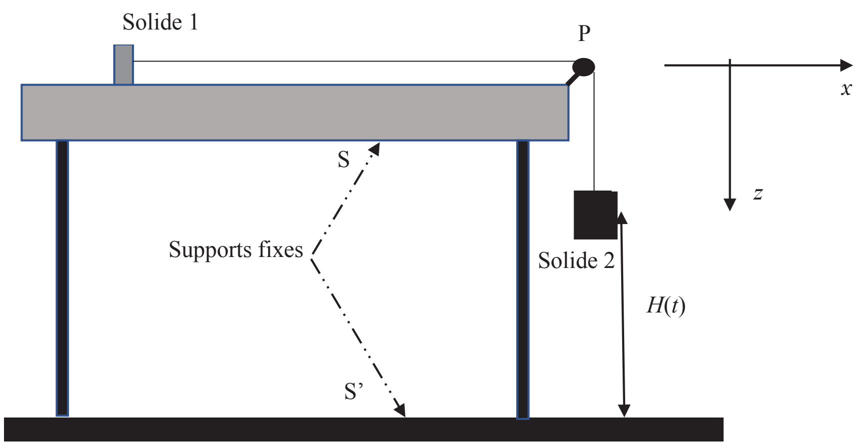

FIGURE 1 – Premier dispositif : mesure du coefficient de frottement dynamique.

À l'état initial, les solides sont tous immobiles, le solide 1 est à l'abscisse $X(t=0) = X_0$ et le solide 2 est à l'altitude $H(t=0) = H_0$.

On veut dans cette expérience déterminer la valeur du coefficient f_g de frottement relatif au glissement entre le matériau constitutif de S et celui du solide 1. On mesure la distance D parcourue par le solide 1 sur le support S, sachant que le solide 2 touche S' avant que le solide 1 ne s'arrête.

Consignes : on note g l'accélération de la pesanteur. On notera systématiquement T et N les normes des composantes tangentielle et normale de la réaction du support S sur le solide 1 (figure 1), avec f_g le coefficient de frottement dynamique. On supposera l'appui du solide 1 uniformément réparti avec une même valeur du coefficient de frottement en tout point de la surface de contact.

On décrit les deux phases du mouvement :

- **Phase 1** : S_1 glisse sur S et accélère. Le fil est tendu. Elle s'arrête lorsque S_2 atteint S'.
- **Phase 2** : Le fil n'est plus tendu, la tension du fil n'agit plus sur S_1 et le solide S_1 freine jusqu'à s'arrêter.

.

Partie B.a) Phase 1

Q4. La nature « idéale » de la poulie et du fil permet de considérer que la norme F de la tension du fil est conservée tout le long du fil.

(a) Appliquer le théorème de la résultante cinétique (= le principe fondamental de la dynamique) au solide 1 pour écrire deux relations : l'une reliant N, M, g ; l'autre reliant l'accélération horizontale $\ddot{X}$ du solide 1, T et F.

(b) Appliquer le théorème de la résultante cinétique au solide 2 pour écrire une relation qui lie F, M, g, α et l'accélération verticale $\ddot{Z}$ du solide 2.

(c) Traduire la loi de Coulomb pour exprimer $\overrightarrow{T}$.

Q5. (a) Exprimer le lien entre $\ddot{X}$ et $\ddot{Z}$ en le justifiant dans cette première phase.

(b) Établir dans cette phase la vitesse $\dot{X}(t)$ en fonction de α, f_g et g.

(c) Établir dans cette phase l'équation horaire $X(t)$ en fonction de X_0, α, f_g et g.

Q6. Fin de la phase

(a) En exploitant le fait que S_2 atteint S' à la fin de la phase 1 (à l'instant noté t_1) et que le fil est inextensible, déterminer la relation entre $X(t_1)$, H_0 et X_0. *Un schéma à $t = 0$ et t_1 complété avec les différentes distances permettra de trouver la relation.*

(b) Quelle est la durée t_1 de cette première phase ?

(c) Quelle est la vitesse correspondante atteinte V_1 ?

Partie B.b) Phase 2

Q7. Exprimer $X(t)$ dans cette phase en fonction de t, t_1, V_1, X_0, H_0, g et f_g.
On l'écrira astucieusement sous la forme d'un polynôme en $(t - t_1)$.

Q8. La phase 2 prend fin à l'instant t_2 auquel le solide 2 s'arrête en ayant parcouru une distance D.

(a) Relier $X(t_2)$, D et X_0.

(b) Déterminer l'instant t_2 en fonction de t_1, V_1, f_g et g.

(c) En exploitant les réponses précédentes, établir l'expression de f_g en fonction de α, H_0 et D.

Q9. On réalise l'expérience plusieurs fois de suite, en partant toujours de la valeur de $H_0 = 40,0$ cm. La masse du solide 1 vaut $M = 50$ g et celle du solide 2 vaut $\alpha M = 60$ g. Calculer la valeur du coefficient de frottement f_g sachant qu'on a trouvé une valeur moyenne de la distance D égale à $\langle D \rangle = 1,50$ m.

Partie C Mesure du coefficient de frottement statique

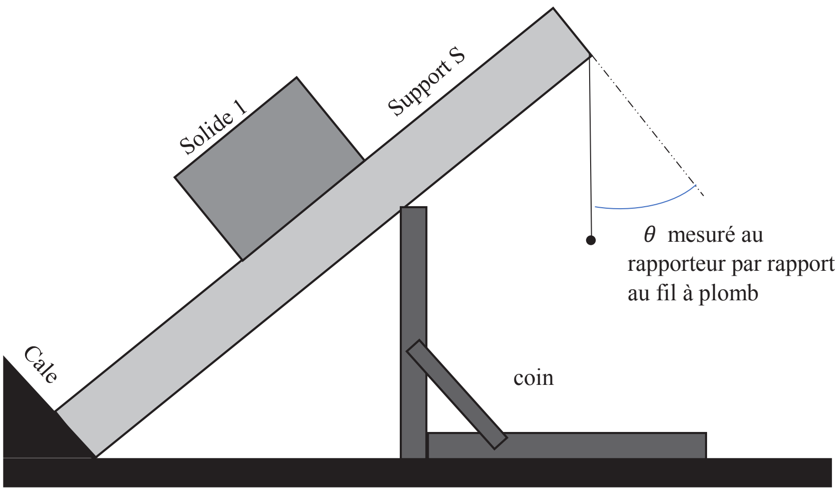

FIGURE 2 – Second dispositif : mesure du coefficient de frottement statique.

Q10. On pose maintenant le solide 1 sur le support S qui fait un angle θ avec le plan horizontal. Le dispositif est représenté sur la figure 2. On fait augmenter, à partir d'une valeur faible, l'angle θ en déplaçant lentement un coin et on mesure pour quelle valeur $\theta = \theta_{\text{lim}}$ le solide 1 se met à glisser. Montrer que cette expérience permet de mesurer le coefficient de frottement f_s.

Q11. On réalise plusieurs essais successifs de décrochement :

n° expérience	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
θ_{lim} (°)	28.9	29.7	28.6	31.2	29.0	28.5	29.2	28.9	30.0	27.6

En déduire la valeur du coefficient de frottement mesuré, associé à son incertitude.

Indications :

— L'utilisation de python est encouragée.

— Écriture sur votre copie les étapes / calculs nécessaires.

— Recopier sur votre copie les lignes de codes saisies sur python.

— Faire attention aux nombres de chiffres significatifs du résultat.

Exercice n°3 Le crissement de la craie

Les crissements et grincements qui caractérisent certains frottements sont des oscillations de relaxation. La fréquence des relaxations est aussi celle de l'onde sonore émise, qui est souvent désagréable à entendre, notamment à cause de sa position dans la gamme des sons aigus.

Partie A Les lois de Coulomb

Nous allons en donner une description très simplifiée, dans le cadre des lois, dites de Coulomb, qui régissent le frottement de glissement d'un solide (Σ) en translation relativement à un support fixe (F). Nous supposerons ici l'existence (figure 3) d'une surface de contact plane entre (Σ) et (F).

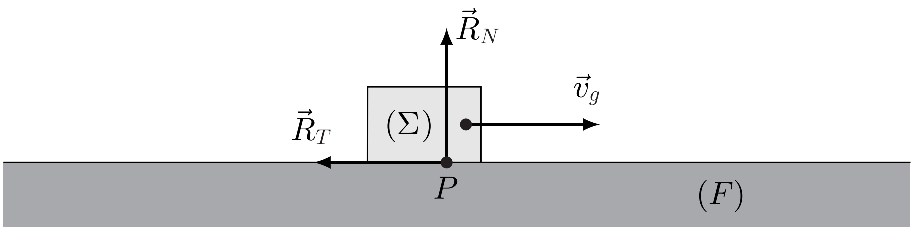

FIGURE 3 – Lois de Coulomb du frottement de glissement

Ces lois décrivent la force de contact $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$ exercée par le support (F) sur le solide (Σ). Il s'agit d'une force exercée en un point P de la surface de contact des deux solides ; elle peut être décomposée en une partie $\overrightarrow{R_T}$ colinéaire à la surface de contact des deux solides et une autre $\overrightarrow{R_N}$ perpendiculaire à celle-ci.

Les lois de Coulomb distinguent deux situations :

- Lorsque (Σ) est en mouvement à la vitesse $\overrightarrow{v_g}$ (dite vitesse de glissement), $\overrightarrow{R_T}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v_g}$, de sens inverse et de norme proportionnelle à celle de $\overrightarrow{R_N}$, $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f_d \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$, où le coefficient $f_d > 0$ porte le nom de coefficient de frottement dynamique ; il reste constant pendant tout le mouvement et ne dépend que de l'état de surface des deux solides en contact.
- Lorsque le mouvement de (Σ) cesse, $\overrightarrow{v_g} = \overrightarrow{0}$ et la composante tangentielle vérifie nécessairement la condition $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| \leqslant f_s \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$ où le coefficient f_s porte le nom de coefficient de frottement statique ; lui aussi ne dépend que de l'état de surface des solides.

Partie B Le modèle de crissement

Lorsqu'on appuie une craie sur un tableau noir avant de la déplacer, on entend parfois distinctement le bruit du crissement lors du déplacement de la craie.

Pour étudier cette situation, on modélise (figure 4) la craie et son appui par un solide rectangulaire (Σ) de masse M attaché à un ressort ; le tableau noir par un support fixe (F) confondu avec le plan horizontal (Oxy) ; le déplacement, par le mouvement à vitesse constante v_0 de l'extrémité A du ressort élastique de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

Le ressort reste constamment parallèle à l'axe (Ox), à $t = 0$ il est à sa longueur naturelle ℓ_0. L'autre extrémité du ressort, notée H, est liée au mobile (Σ) ; c'est sa vitesse que l'on souhaite étudier. À l'instant $t = 0$, on a $x_H(0) = -\ell_0$.

On note enfin $f_s > f_d$ les coefficients de frottement statique et dynamique de la craie sur le tableau et $g = \|\overrightarrow{g}\|$ l'accélération de la pesanteur.

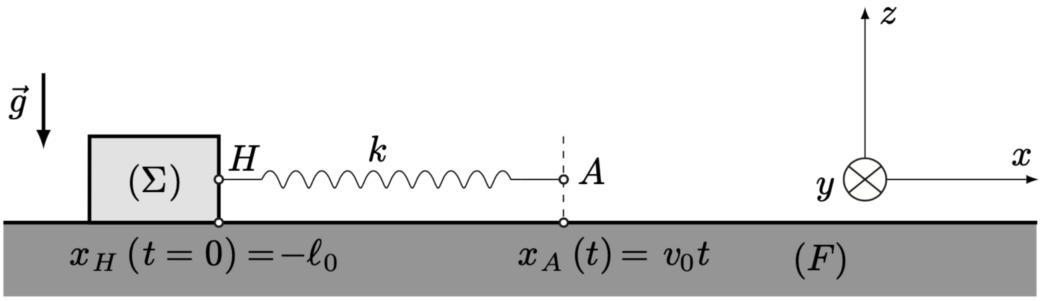

FIGURE 4 – Un modèle pour le crissement

Q1. Exprimer la force de traction exercée par le ressort sur le mobile en fonction de k, v_0, t et de $X_H(t) = x_H(t) + \ell_0$.
Exprimer aussi la composante normale $\overrightarrow{R_N}$ de la force de contact exercée sur la craie.

Q2. En déduire qu'à partir de $t = 0$ la craie reste immobile jusqu'à l'instant $t = t_0$ que l'on déterminera en fonction de f_s, M, g, k et v_0.

Q3. On pose $t' = t - t_0$. Préciser les valeurs de x_A, de X_H et de sa dérivée $V_H = \dfrac{\mathrm{d}X_H}{\mathrm{d}t'}$ à l'instant $t' = 0$ avant d'expliciter l'équation différentielle vérifiée par $X_H(t')$ sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 X_H}{\mathrm{d}t'^2} + \omega^2 X_H = \omega^2 v_0 t' + \gamma$$

où l'on exprimera les constantes ω et γ en fonction de k, M, g, f_s et f_d.

Partie C Étude du mouvement de crissement

La suite du mouvement du mobile se poursuit en alternant les étapes d'immobilité et de glissement ; le mouvement ainsi observé est périodique de pulsation Ω et il est la cause du bruit de crissement, par exemple, de la craie sur un tableau.

On pourra se reporter au formulaire donné à la fin de cette partie.

Q4. Déterminer les expressions de $X_H(t')$ et $V_H(t')$ en fonction de t', v_0, ω et $\alpha = \dfrac{\gamma}{\omega v_0}$.

Q5. Montrer que V_H peut s'écrire sous la forme $V_H(t') = v_0(1 + A\cos(\omega t' + \varphi))$, on exprimera A, $\tan(\varphi)$, $\cos(\varphi)$, $\sin(\varphi)$ en fonction de α. À quel intervalle appartient φ ? En déduire que $\varphi = \arctan(\alpha) - \pi$.

On note $t'_{\max}$ le premier instant où V_H atteint sa valeur maximale $V_{\max}$ et $\theta_{\max} = \omega t'_{\max}$.

Q6. Sans nécessairement exprimer $t'_{\max}$, montrer que $V_{\max} = v_0\left(1 + \sqrt{1+\alpha^2}\right)$.
Tracer l'allure de la courbe donnant $V_H(t')$.

Q7. *(Question plus difficile, peut être admise)* Montrer alors que cette vitesse s'annule à nouveau à un instant $t'_1 > 0$ correspondant à l'angle $\theta_1 = \omega t'_1$, montrer que $\theta_1 = 2\pi - 2\arctan(\alpha)$. On admettra dans la suite que $0 < \alpha < 1$.

La première mise en mouvement du mobile (Σ) correspond à l'intervalle $0 \leqslant t' \leqslant t'_1$. À l'issue de cette phase, il s'immobilise alors pendant un laps de temps avant de redémarrer par la suite. On rappelle que longueur du ressort est donnée à chaque instant par $\ell = x_A - x_H$.

On peut montrer qu'à l'instant t'_1 : $\ell\,(t'_1) = \ell(t' = 0) - 2\alpha v_0/\omega$.

Q8. *(Question plus difficile, peut être admise)* Montrer que la durée t'_2 qui devra alors s'écouler avant que le mobile se remette en mouvement vaut $t'_2 = \dfrac{2\alpha}{v_0}$

Q9. Compléter le tracé de la question précédente en faisant apparaître une période T complète du mouvement du mobile ; préciser sur ce schéma dans quelle phase du mouvement il y a *augmentation continue d'une contrainte* et dans quelle phase il y a *relâchement subit* de celle-ci.

Exprimer Ω en fonction de t'_1 et t'_2 puis en fonction de ω, α et θ_1.

Q10. Pour estimer les ordres de grandeur du phénomène, on prend $\alpha = \pi/6$ avec un frottement caractérisé par $f_s \simeq 1$ et $f_d \simeq 0,6$ pour une vitesse de traction du ressort $v_0 = 1$ cm/s.

On prendra $g \simeq 10$ m/s^2. En déduire la valeur de Ω.

Quel lien existe-t-il entre cette pulsation et celle du son émis ?

Préciser et justifier le domaine fréquentiel du crissement.

Formulaires et données numériques

- $C\cos(x+\varphi) = C\cos(\varphi)\cos(x) - C\sin(\varphi)\sin(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$, avec $C = \sqrt{A^2+B^2}$ et $\tan(\varphi) = -\dfrac{B}{A}$
- Si $t = \tan\theta$ alors $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $\sin^2\theta = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.
- On rappelle par ailleurs que $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$.
- On pourra prendre $\sqrt{3} \simeq 1,73$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,58$, $\pi \simeq 3,14$ et $2/\pi \simeq 0,64$.