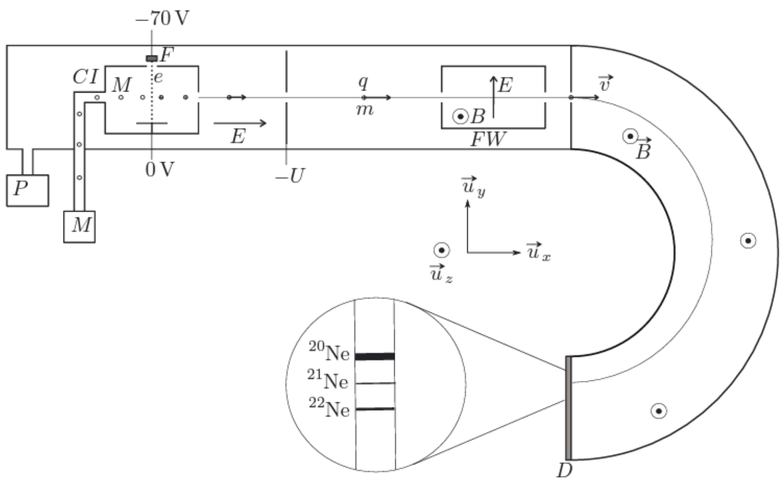
Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)

Chapitre n°13 Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétique, uniformes et stationnaires

La spectrométrie de masse est une méthode d'analyse physico-chimique permettant de détecter, d'identifier et de quantifier des atomes ou des molécules par mesure de leur masse. Son principe réside dans la séparation en phase gazeuse de molécules ou atomes chargés (ions) en fonction de leur rapport m/q (masse/charge) par action d'un champ électrique et d'un champ magnétique. Quels rôles jouent ces deux champs ?

Une pompe à vide (P) maintient l'ensemble du spectromètre à une pression de l'ordre de 10^{-4} Pa (soit 10^{-9} bar). Les molécules ou atomes à étudier (M) sont introduits sous forme gazeuse dans la chambre d'ionisation (CI). Des électrons sont émis par un filament de tungstène (F) porté à incandescence et accélérés grâce à une différence de potentielle de -70 V établie entre la chambre et le filament. Lorsqu'ils entrent en collision avec les atomes ou les molécules, des cations atomiques ou des fragments ionisés (des molécules) se forment.
Les ions ainsi formés entrent dans la zone d'accélération où ils sont accélérés par un champ électrique produit par une différence de potentiel $-U$ de l'ordre de -1 kV à -10 kV.
Les ions entrent ensuite dans une zone où règne un champ magnétique uniforme et stationnaire qui va dévier la trajectoire des ions. La position du point d'impact sur le détecteur dépend de la vitesse v et du rapport q/m.



Pré-requis

- Terminale : Thème Mouvement et interactions
  - Champ électrique créé par un condensateur plan.
  - Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme : mouvement plan, équations horaires, équation de la trajectoire, principe de l'accélérateur linéaire de particules chargées, aspects énergétiques.
- PCSI : Thème Mouvement et interactions
  - Chapitre n°10 : Description et paramétrage du mouvement d'un point
  - Chapitre n°11 : Lois de Newton
  - Chapitre n°12 : Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

Objectifs du chapitre

L'objet de ce chapitre est l'étude du mouvement de particules chargées, dans un référentiel galiléen, soumises à un champ électrique ou magnétique stationnaire (permanent), c'est-à-dire indépendant du temps (on parle de champ électrostatique ou magnétostatique) et uniforme, c'est-à-dire indépendant de la position considérée. Les applications de cette étude sont nombreuses, nous en détaillerons quelques-unes dans le cours et en TD.
Nous nous placerons dans le cadre de la **mécanique classique non relativiste**, valable tant que la vitesse v des particules chargées reste très inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide ($v \ll c$). Cette condition est restrictive car les particules accélérées par des champs électriques peuvent facilement atteindre des vitesses proches de celle de la lumière. Des effets relativistes expliquent alors les écarts entre le modèle théorique classique et les observations expérimentales (cf approche documentaire).

Plan du cours

Ai-je bien appris mon cours ?

1 – ☺ – ☹ – Donner des ordres de grandeur de champs électriques et magnétiques.

2 – ☺ – ☹ – Comparer numériquement les forces électrique et magnétique avec le poids des particules chargées, et conclure.

3 – ☺ – ☹ – Exprimer la puissance de la force de Lorentz. Que peut-on dire du champ électrique et du champ magnétique quant à leur influence sur l'énergie cinétique ?

4 – ☺ – ☹ – Établir l'équation du mouvement d'une particule chargée plongée dans un champ électrique uniforme et permanent. Établir les équations horaires et l'équation cartésienne de la trajectoire.

5 – ☺ – ☹ – À l'aide d'un théorème énergétique, exprimer la vitesse d'une particule accélérée par une différence de potentiel.

6 – ☺ – ☹ – Établir les équations différentielles du mouvement d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique. Résoudre le système d'équation différentielle.
Quelle est la trajectoire de la particule chargée ? Quels sont son rayon de la trajectoire et le sens de parcours selon le signe de la charge ?

I Force de Lorentz

I.1 Force de Lorentz

Hendrik Antoon LORENTZ (1835-1928) est un physicien néerlandais qui s'est illustré par ses travaux théoriques sur la nature de la lumière et la constitution de la matière. Il est co-lauréat avec Pieter Zeeman du prix Nobel de physique de 1902. La majorité de ses travaux portèrent sur l'électromagnétisme.

À connaître : Force de Lorentz

Une particule chargée de charge électrique q soumise à un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et à un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ subit une action mécanique, modélisée par la force de Lorentz :

$$\overrightarrow{f_L} = q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v}(M/\mathscr{R}) \wedge \overrightarrow{B}\right)$$

- la charge q en Coulomb (C) ;
- le champ électrique E en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$;
- le champ magnétique B en tesla (T)

À connaître : Charges électriques

Charge élémentaire : $e \approx 1,602 \times 10^{-19}$ C

Charge d'un proton : c'est la charge élémentaire, $q_{\text{proton}} = +e$

Charge d'un électron : c'est l'opposé de la charge élémentaire, $q_{\text{électron}} = -e$

Charge d'un ion : $q(\mathrm{X^{n+}}) = +ne$; $q(\mathrm{X^{n-}}) = -ne$

À connaître : Ordres de grandeur des champs électriques et magnétiques

Dispositif	Valeur du champ
Tube fluorescent	$10\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$
Atmosphère par temps clair	$10^2\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$
Atmosphère par temps orageux	$10^4\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$
Champ disruptif de l'air (foudre)	$3.10^6\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$
Vu par l'électron dans un atome	$10^{12}\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$

Dispositif	Valeur du champ
À la surface de la Terre	5.10^{-5} T
Aimant permanent usuel	0,1 T à 1 T
Bobines pour IRM	3 T

<u>Capacité exigible :</u> **Évaluer les ordres de grandeur de la force électrique et magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.**

Exercice à maîtriser n°1 − Ordres de grandeur

On s'intéresse à un proton (de masse $m = 1,67.10^{-27}$ kg), se déplaçant à la vitesse $v = 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, placé dans un champ électrique de norme $E = 1\ \mathrm{kV \cdot m^{-1}}$, et dans un champ magnétique de norme $B = 1$ mT.

R1. Comparer son poids à la force électrique. Conclure.

R2. Comparer son poids à la force magnétique. Conclure.

Les expériences mettant en jeu des particules chargées dans un champ électrique ou magnétique se passent dans une enceinte où on a fait le vide pour éviter les chocs entre les particules chargées et les molécules d'air. Ainsi **les frottements seront négligés.**

I.2 Puissance de la force de Lorentz et conséquences

Capacité exigible : Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.

Démonstration à maîtriser n°2 – Puissance de la force de Lorentz

R1. Exprimer la puissance de la force de Lorentz.

Solution: La puissance de la force de Lorentz s'exprime selon :

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_L &= \overrightarrow{f_L} \cdot \overrightarrow{v} \\ &= q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{v} \\ &= q\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{v} + \underbrace{q\left(\underbrace{\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}}_{\perp \overrightarrow{v}}\right) \cdot \overrightarrow{v}}_{=0} \end{aligned}$$

La composante magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas.

R2. En appliquant le théorème de la puissance cinétique, conclure sur l'effet du champ électrique et du champ magnétique sur l'énergie cinétique et donc sur la norme de la vitesse.

Solution: D'après le TPC à la particule chargée :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} &= \mathscr{P}_L \\ \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} &= q\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{v} \end{aligned}$$

Ainsi, le champ magnétique ne peut pas modifier l'énergie cinétique de la particule chargée. Une particule chargée plongée uniquement dans un champ magnétique a un mouvement uniforme.
Le champ électrique peut modifier l'énergie cinétique.

À connaître : effets de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sur l'énergie cinétique

- Un **champ électrique peut modifier l'énergie cinétique** d'une particule chargée.
- Un **champ magnétique ne peut pas modifier l'énergie cinétique d'une particule chargée**. Le **mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique est donc uniforme.** *Le champ magnétique peut cependant* ***courber la trajectoire***.

II Mouvement dans un champ électrique

Cadre de l'étude : Une particule chargée est placée dans un champ électrique $\overrightarrow{E}$ **uniforme** (indépendant de la position) et **permanent** (indépendant du temps). Un tel champ électrique est celui qui règne au sein d'un condensateur plan constitué de deux électrodes portant des charges opposées et dont leur taille est grande devant la distance les séparant.

II.1 Équation de la trajectoire

Capacité exigible : Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur-accélération constant.

Exercice à maîtriser n°3 – Trajectoire dans un champ électrique

Une particule chargée de charge q est placée dans un champ électrique $\overrightarrow{E}$ uniforme et permanent.

R1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la particule chargée étudiée.
Que peut-on dire de son vecteur accélération ?

Solution:
Système : particule chargée de charge q et de masse m
Référentiel d'étude : référentiel du laboratoire galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques : force de Lorentz électrique $\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{E}$
Le poids et les frottements sont négligeables devant la force de Lorentz électrique.
D'après le principe fondamental de la dynamique : $m\overrightarrow{a} = q\overrightarrow{E}$, donc $\boxed{\overrightarrow{a} = \frac{q}{m}\overrightarrow{E}}$
$\overrightarrow{E}$ est uniforme et permanent, il est donc constant, donc le vecteur accélération est constant.

Prenons l'axe (Ox) dans la direction et le sens du champ électrique : $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u_x}$.
Le vecteur vitesse initial fait un angle $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec le champ électrique et est contenu dans le plan (Oxy).

R2. En déduire les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.

Solution: On intègre successivement en utilisant les conditions initiales : $\dot{x}(0) = v_0\cos(\alpha)$; $\dot{y}(0) = v_0\sin(\alpha)$; $\dot{z}(0) = 0$ et $x(0) = y(0) = z(0) = 0$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \ddot{x} & = & \frac{qE}{m} \\ \ddot{y} & = & 0 \\ \ddot{z} & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \frac{qE}{m}t + v_0\cos(\alpha) \\ \dot{y} & = & v_0\sin(\alpha) \\ \dot{z} & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \frac{qE}{2m}t^2 + v_0\cos(\alpha)t \\ y(t) & = & v_0\sin(\alpha)t \\ z(t) & = & 0 \end{array}\right.$$

Le mouvement de la particule chargée a lieu dans le plan (Oxy), c'est-à-dire dans le plan défini par le vecteur vitesse initiale et le vecteur champ électrique.

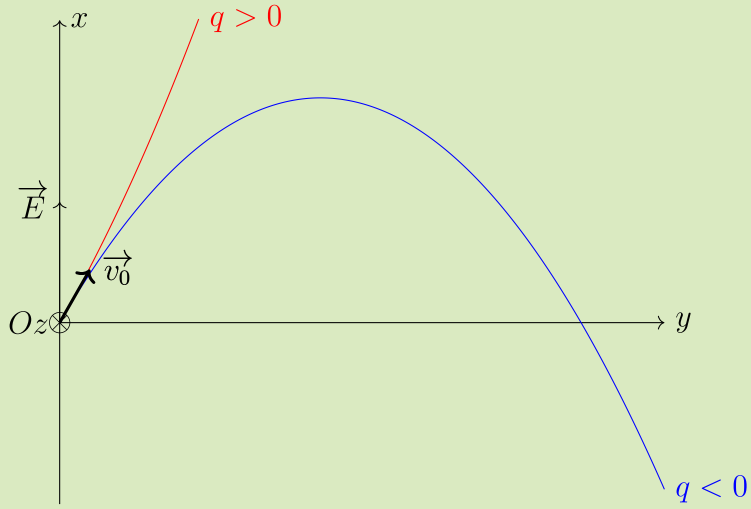
R3. En déduire l'équation $x(y)$ de la trajectoire.

Solution: On isole : $t = \frac{y}{v_0\sin(\alpha)}$ (si $\alpha \neq 0$).

On en déduit l'équation de la trajectoire : $\boxed{x(y) = \frac{qE}{2mv_0^2\sin^2(\alpha)}y^2 + \frac{y}{\tan(\alpha)}}$

R4. Tracer l'allure de la trajectoire, on distinguera le cas $q > 0$ et le cas $q < 0$.

Solution:



R5. Que se passe-t-il si $\alpha = 0$?

Solution: Si $\alpha = 0$, alors $\forall t$, $y(0) = 0$ et $x(0) = \dfrac{qE}{2m}t^2$
Le mouvement est rectiligne selon la direction commune du champ électrique et du vecteur vitesse initiale.

II.2 Énergie potentielle électrostatique

À connaître : Énergie potentielle électrostatique (pour un champ uniforme)

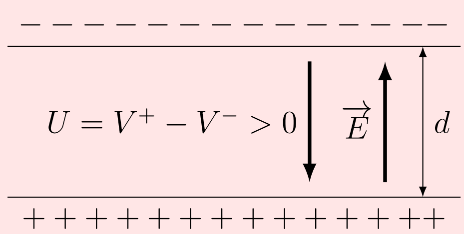
La force électrostatique $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$ est une force conservative. L'énergie potentielle électrostatique associée s'écrit

$$\mathscr{E}_{p,e} = qV$$

où V est le potentiel électrostatique relié au champ électrostatique par $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(V)$.

À connaître : Champ électrique et différence de potentiel

- À l'intérieur d'un condensateur plan soumis à une différence de potentiel U est créé un champ électrique uniforme et permanent : c'est la façon la plus simple d'en créer un.
- Le champ électrique a alors les caractéristiques :
  - direction : perpendiculaire aux deux armatures ;
  - sens : de l'armature de potentiel le plus élevé (armature chargée positivement) vers celle de potentiel le plus faible (armature chargée négativement) ;
  - norme : $\|\overrightarrow{E}\| = \dfrac{|U|}{d}$.



II.3 Accélération d'une particule chargée

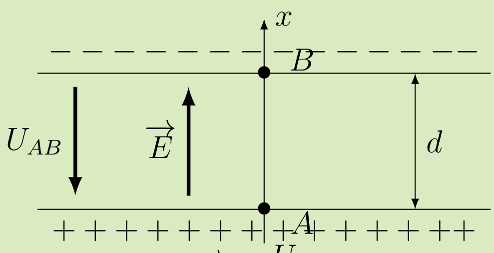
On étudie l'accélération d'une particule chargée par un champ électrique $\overrightarrow{E}$ colinéaire au vecteur vitesse initial de la particule chargée (au moment où elle entre dans la zone où se situe $\overrightarrow{E}$).
<u>**Capacités exigibles :**</u> **Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.**

Exercice à maîtriser n°4 — accélération d'une particule chargée

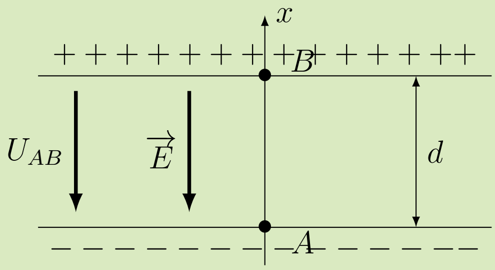
On accélère une particule de charge q en l'injectant en A avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{v_A} = v_A\overrightarrow{u_x}$ (où $v_A > 0$) entre deux électrodes (condensateur plan) soumises à une différence de potentiel U_{AB}, entre lesquelles règnent un champ électrique uniforme et permanent. Elle est récupérée en B.

R1. En utilisant l'expression de la force électrique, déterminer le sens du champ électrique pour accélérer une particule chargée $q > 0$; $q < 0$.

Solution: Initialement, la particule a un mouvement selon $+\overrightarrow{u_x}$.
La particule est accélérée si la puissance de la force de Lorentz est positive. Pour cela, il faut $q\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{v} > 0$
Pour accélérer initialement la particule, si $q > 0$, il faut que $\overrightarrow{E}$ soit dans le sens de $\overrightarrow{v}$, donc selon $+\overrightarrow{u_x}$.
Si $q < 0$, il faut que $\overrightarrow{E}$ soit dans le sens opposé de $\overrightarrow{v}$, donc selon $-\overrightarrow{u_x}$.



$U_{AB} > 0$ et $\overrightarrow{E} = \dfrac{U_{AB}}{d}\overrightarrow{u_x}$ ($E_x > 0$)



$U_{AB} < 0$ et $\overrightarrow{E} = \dfrac{U_{AB}}{d}\overrightarrow{u_x}$ ($E_x < 0$)

R2. En utilisant un théorème énergétique, établir un lien entre la variation d'énergie cinétique $\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_c$ et la différence de potentiel U_{AB}. À quelle condition la particule est-elle accélérée ?

Solution: La particule chargée est soumise uniquement à une force conservative.
On applique le théorème de l'énergie mécanique entre A et B dans le référentiel du laboratoire :

$$\begin{aligned}
\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_m &= 0\\
\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_c + \Delta_{A\to B}\mathscr{E}_p &= 0\\
\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_c + q(V_B - V_A) &= 0\\
\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_c &= q(V_A - V_B)\\
\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_c &= qU_{AB}
\end{aligned}$$

La particule est accélérée ssi $qU_{AB} > 0$. Si $q > 0$, il faut que $U_{AB} > 0$; si $q < 0$, il faut que $U_{AB} < 0$.

R3. Lorsque l'accélération est efficace, $v_A \ll v_B$. Déterminer dans ce cadre l'expression de la vitesse de la particule en B en fonction de sa masse, sa charge et de la tension U_{AB}.

Solution: Avec $v_B \gg v_A$, alors $\dfrac{1}{2}mv_B^2 = qU_{AB}$

Alors $\boxed{v_B = \sqrt{\dfrac{2qU_{AB}}{m}}}$

II.4 Applications

L'application essentielle des champs électriques uniformes et permanents est l'accélération de particules chargées, dans des buts diverses :

- médical : des rayons X sont émis par des électrons ayant été accélérés, ces radiations peuvent alors être utilisées pour le radiodiagnostic ;
- industriel : des rayonnements émis par des électrons accélérés peuvent servir à un contrôle non destructif (par exemple aux rayons X dans le contrôle des bagages), des faisceaux d'électrons accélérés provoquent l'irradiation d'aliments dans le but de stérilisation ;
- de recherche : l'accélération de particules suivie de collisions permet d'engendrer de nouvelles particules et tester les théories en physique des particules ; dans les spectromètres de masse (en association avec un champ magnétique uniforme).

Accélérateur linéaire de Stanford : c'est l'accélérateur linéaire le plus long du monde avec ses 3,2 km.

III Mouvement dans un champ magnétique

Cadre de l'étude : une particule chargée de masse m et de charge q est placée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ **permanent** (indépendant du temps) et **uniforme** (indépendant de la position).

III.1 Observations expérimentales

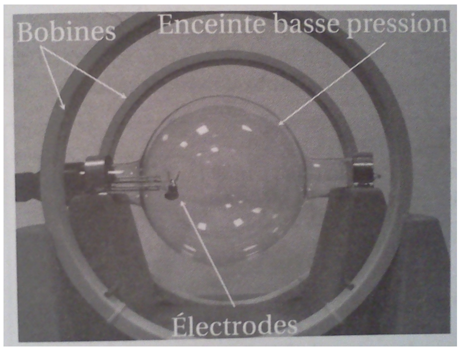
Expérience : Déviation d'une particule chargée

On considère le dispositif expérimental constitué d'une cathode chauffée (à environ 1000 °C) émettant des électrons dans une enceinte où l'air est à une pression très faible.

Le mouvement de ces électrons est mis en évidence par la lumière bleutée émise par les atomes de gaz qu'ils excitent en le rencontrant. On peut

— créer un champ électrique intense, en alimentant une paire d'électrodes, située dans l'enceinte, avec des hautes tensions (de l'ordre du kV), qui permet d'accélérer les électrons ;

— créer un champ magnétique dans l'axe des deux bobines, en faisant circuler un courant (d'intensité de quelques ampères) dans une paire de grandes bobines.



R1. Notez vos observations.

> **Solution:** Les électrons décrivent une trajectoire circulaire dans le plan perpendiculaire au champ magnétique.

R2. Quel est l'effet de l'augmentation de la valeur du champ magnétique sur la trajectoire ?

> **Solution:** Quand on augmente la valeur du champ magnétique, le rayon de la trajectoire diminue.

R3. Quel est l'effet de l'augmentation de la valeur de la vitesse initiale sur la trajectoire ?

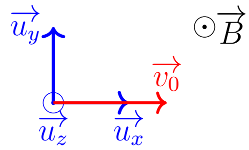
> **Solution:** Quand on augmente la tension d'accélération, la vitesse des électrons augmente et on constate la diminution du rayon de la trajectoire.

III.2 Trajectoire plane

On étudie le mouvement d'une particule chargée dans le référentiel du laboratoire, galiléen à l'échelle de l'expérience. Comme précédemment, le poids et les forces de frottement sont négligés devant la force magnétique.

La particule chargée de charge q est injectée dans la zone où règne le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ avec un vecteur vitesse initial $\overrightarrow{v_0}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$.

On choisit l'axe (Oz) dans le sens du champ magnétique : $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$, avec $B = \|\overrightarrow{B}\| > 0$.
Le vecteur vitesse initial étant perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$, il est contenu dans le plan (Oxy).



Démonstration à maîtriser n°5 – Mouvement plan

R1. Exprimer la force de Lorentz qui s'exerce sur la particule chargée.

> **Solution:** La particule chargée étant soumise qu'à la force magnétique $\overrightarrow{f_B} = q\underbrace{\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}}_{\perp\overrightarrow{B}}$

R2. En exploitant le PFD et la propriété du produit vectoriel, justifier que $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{u_z} = 0$ à tout instant.

> **Solution:** D'après le principe fondamental de la dynamique donne
>
> $$m\overrightarrow{a} = q\underbrace{\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}}_{\perp\overrightarrow{u_z}}$$
>
> Selon $\overrightarrow{u_z}$, aucune force agit, donc $\ddot{z} = 0$
> De plus, la vitesse initiale n'a pas de composante selon $\overrightarrow{u_z}$ (puisqu'elle est orthogonale à $\overrightarrow{u_z}$).
> Ainsi $\boxed{\forall t \;\; \dot{z} = 0}$. Par conséquent, z est constante au cours du mouvement.

R3. En déduire que le mouvement a lieu dans le plan (Oxy) perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$, et contenant $\overrightarrow{v_0}$.

> **Solution:** Le mouvement a donc lieu dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{u_z}$, c'est-à-dire dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$, et contenant $\overrightarrow{v_0}$.

À connaître : Planéité du mouvement dans $\overrightarrow{B}$

Le **mouvement** d'une particule chargée dans un champ magnétique perpendiculaire $\overrightarrow{B}$ au vecteur vitesse initial $\overrightarrow{v_0}$ ($\overrightarrow{B} \perp \overrightarrow{v_0}$) **a lieu dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$ contenant $\overrightarrow{v_0}$**.

Objectif : établir la nature de la trajectoire et le rayon de la trajectoire. Pour cela, nous allons mettre en œuvre deux méthodes.

III.3 Sens du parcours

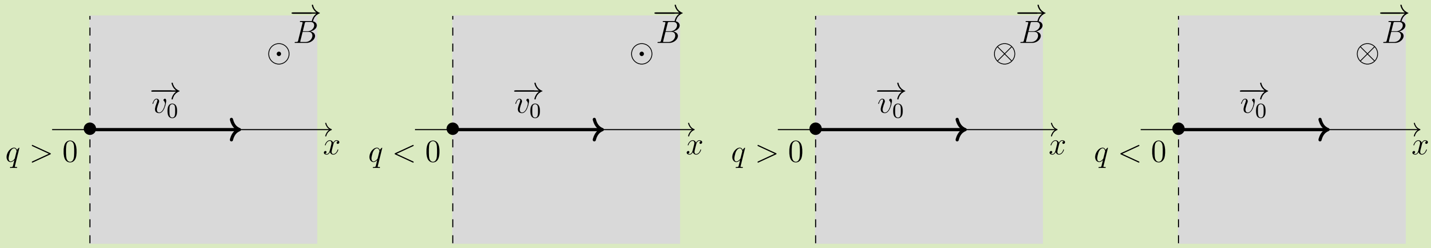
Capacité exigible : Déterminer le rayon de la trajectoire et le sens du parcours.

Exercice à maîtriser n°6 – Sens du parcours

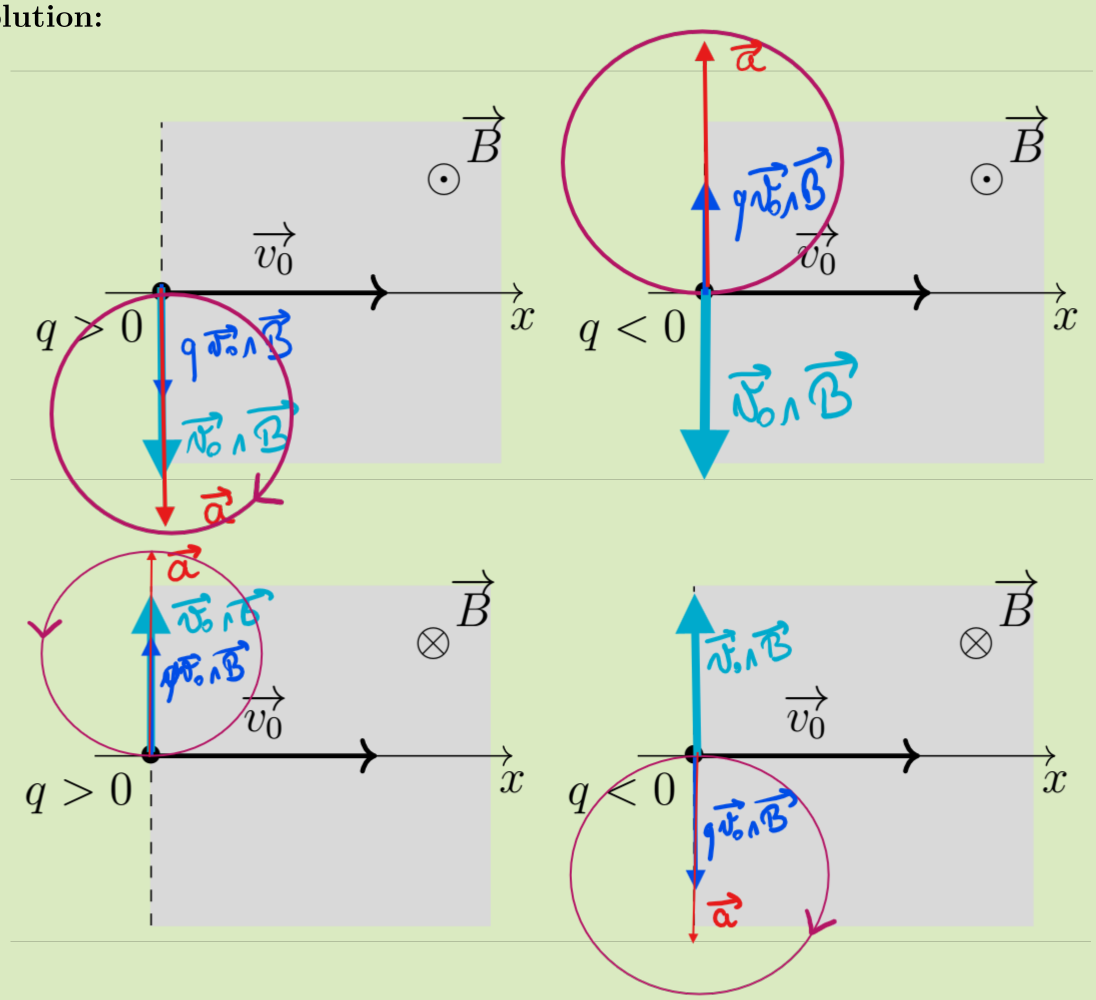
Pour déterminer le sens du parcours, on exploite à nouveau le PFD : $\overrightarrow{a} = \dfrac{q}{m}\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$.

Sur le schéma ci-dessous, indiquer :

- le vecteur $\overrightarrow{v_0} \wedge \overrightarrow{B}$,
- le vecteur $q\overrightarrow{v_0} \wedge \overrightarrow{B}$ en faisant attention au signe de la charge,
- le vecteur accélération de la particule chargée à $t = 0$,
- en déduire le sens du parcours de la trajectoire.



Solution:



III.4 Rayon de la trajectoire

<u>**Capacité exigible :**</u> **Déterminer le rayon de la trajectoire et le sens du parcours.**

Nous envisageons deux méthodes différentes de résolution pour déterminer la nature de la trajectoire et son rayon.

III.4.a) Utilisation de la base de Frenet

Exercice à maîtriser n°7 — 1ère méthode : Utilisation de la base de Frenet

R1. Rappeler les expressions du vecteur vitesse et du vecteur accélération en se plaçant dans la base de Frenet $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$. Compte-tenu de ce qui a été démontré au § I.2, réécrire le vecteur accélération dans la base de Frenet dans ce cadre.

Solution:
Système : particule chargée M de masse m et de charge q
Référentiel d'étude : référentiel du laboratoire considéré galiléen à l'échelle de l'expérience.
Bilan des actions mécaniques : $\overrightarrow{f_B} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$
Le poids est négligeable devant la force magnétique et les frottements sont négligeables car l'expérience est réalisée dans une enceinte où on a fait le vide.
Dans la base de Frenet, le vecteur vitesse s'écrit $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{T}$, avec v la norme du vecteur vitesse et $\overrightarrow{T}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire.
Dans la base de Frenet, le vecteur accélération s'écrit $\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{R(t)}\overrightarrow{N}$, avec $R(t)$ est le rayon de courbure de la trajectoire et $\overrightarrow{N}$ le vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{T}$ et dirigé vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.
Or nous avons montré dans le §I.2 que le champ magnétique ne pouvait pas modifier l'énergie cinétique, donc le mouvement est uniforme, donc $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$.
Ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \frac{v^2}{R(t)}\overrightarrow{N}}$$

R2. Appliquer le PFD pour obtenir une équation différentielle vectorielle qui relie la norme du vecteur vitesse v, le rayon de courbure $R(t)$, les constantes m et q, et les vecteurs $\overrightarrow{N}$, $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{B}$.
Comment sont les trois vecteurs $\overrightarrow{N}$, $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{B}$?

Solution: On applique le PFD à la particule chargée : $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{f_B}$, soit $m\frac{v^2}{R(t)}\overrightarrow{N} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$

Soit $\boxed{m\frac{v^2}{R(t)}\overrightarrow{N} = qv\overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{B}}$

$\overrightarrow{B}$ est orthogonal à $\overrightarrow{T}$ puisque le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$. Par définition du produit vectoriel, $\overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{B}$ est perpendiculaire aux deux vecteurs.
Ainsi $\overrightarrow{N}$ est orthogonal à $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{B}$.

R3. En calculant la norme de l'équation précédente, déterminer le rayon de courbure de la trajectoire de la particule chargée.
Que peut-on dire de ce rayon de courbure ? En déduire la nature de la trajectoire.

Solution: D'après le PFD :

$$\begin{aligned}
\left\| m\frac{v^2}{R(t)}\overrightarrow{N} \right\| &= \left\| qv \underbrace{\overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{B}}_{\text{avec } \overrightarrow{T} \perp \overrightarrow{B}} \right\| \\
m\frac{v^2}{R(t)} &= |q|vB \\
R(t) &= \frac{mv}{|q|B}
\end{aligned}$$

La norme du vecteur vitesse, v, est constante (mouvement uniforme), B également, donc le rayon de courbure de la trajectoire est constant, la trajectoire est donc **circulaire** de rayon $\boxed{R = \frac{mv}{|q|B}}$.

R4. Représenter les trajectoires selon le signe de q. *On fera attention au sens du parcours (cf § III.3).*

III.4.b) Utilisation des coordonnées cartésiennes

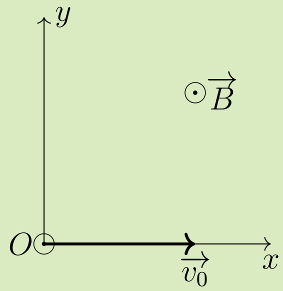
Exercice à maîtriser n°8 – 2ième méthode : Utilisation des coordonnées cartésiennes

En l'absence d'information sur la nature du mouvement, on utilise le système de coordonnées cartésiennes. La particule se trouve initialement en O. L'axe (Ox) est choisi dans le sens du vecteur vitesse initial $\left(\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}\right.$ avec $\left.v_0 > 0\right)$ et l'axe (Oz) dans le sens du vecteur champ magnétique $\left(\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}, \text{ avec } B > 0\right)$.

R1. Établir les équations différentielles du mouvement obtenues par projection du PFD sur les trois axes.

Solution:

Système : particule chargée M de masse m et de charge q
Référentiel d'étude : référentiel du laboratoire considéré galiléen à l'échelle de l'expérience.
Bilan des actions mécaniques : $\overrightarrow{f_B} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$
Le poids est négligeable devant la force magnétique et les frottements sont négligeables car l'expérience est réalisée dans une enceinte où on a fait le vide.



D'après le principe fondamental de la dynamique à $M(m, q)$ dans le référentiel du laboratoire galiléen : $m\overrightarrow{a} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$

$$m\left|\begin{array}{l}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{array}\right. = q\left|\begin{array}{l}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l}0\\ 0\\ B\end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{m\left|\begin{array}{l}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{array}\right. = q\left|\begin{array}{l}B\dot{y}\\ -B\dot{x}\\ 0\end{array}\right.}$$

Les deux projections du PFD donnent un système de deux équations différentielles couplées : $\left\{\begin{array}{lcl} m\ddot{x} & = & qB\dot{y}\\ m\ddot{y} & = & -qB\dot{x}\end{array}\right.$

Il existe plusieurs méthodes de résolution. On en propose une ici.

R2. Intégrer une fois les deux équations différentielles. Déterminer les constantes d'intégration.

Solution: Les deux projections donnent :

$$m\left|\begin{array}{l}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{array}\right. = q\left|\begin{array}{l}B\dot{y}\\ -B\dot{x}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}\dfrac{qB}{m}\dot{y}\\ -\dfrac{qB}{m}\dot{x}\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\dot{x}\\ \dot{y}\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}\dfrac{qB}{m}y + A_1\\ -\dfrac{qB}{m}x + A_2\end{array}\right.$$

Or $\overrightarrow{v}(0) = v_0\overrightarrow{u_x}$, soit $\dot{x}(0) = v_0$ et $\dot{y}(0) = 0$; et la particule chargée est initialement à l'origine du repère $x(0) = 0 = y(0)$
Ainsi $A_1 = v_0$ et $A_2 = 0$

Soit $\boxed{\left|\begin{array}{l}\dot{x}\\ \dot{y}\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}\dfrac{qB}{m}y + v_0 \quad (1)\\ -\dfrac{qB}{m}x \quad (2)\end{array}\right.}$

R3. En utilisant une substitution, établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega_c x = 0$$

Exprimer ω_c, appelée pulsation cyclotron en fonction de m, q et B. Attention q est une grandeur algébrique.

Solution:

$$\begin{cases} \dot{x} & = \dfrac{qB}{m} y + v_0 \\ \dot{y} & = -\dfrac{qB}{m} x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = \dfrac{m}{qB}(\dot{x} - v_0) \\ \dfrac{m}{qB}\ddot{x} & = -\dfrac{qB}{m} x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = \dfrac{m}{qB}(\dot{x} - v_0) \\ \ddot{x} + \left(\dfrac{qB}{m}\right)^2 x & = 0 \end{cases}$$

L'équation différentielle $\ddot{x} + \left(\dfrac{qB}{m}\right)^2 x = 0$ est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_c = \dfrac{|q|B}{m} > 0$

R4. La résoudre complètement (compte tenu des conditions initiales) pour en déduire $x(t)$.

R5. En déduire $y(t)$.

Solution:

— Solution générale : $x(t) = A\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t)$
Or $x(0) = 0$ (particule à l'origine à $t = 0$), donc $A = 0$
et $\dot{x}(0) = v_0 = B\omega_c$
Ainsi $\boxed{x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t)\dfrac{mv_0}{|q|B}\sin(\omega_c t)}$

— On en déduit : $y(t) = \dfrac{m}{qB}\left(v_0\cos(\omega_c t) - v_0\right)$
Soit $\boxed{y(t) = \dfrac{mv_0}{qB}(\cos(\omega_c t) - 1)}$

R6. À partir des équations horaires, déterminer la nature du mouvement, son rayon et les coordonnées de son centre.

Solution: La trajectoire est un cercle de rayon $R = \dfrac{mv_0}{|q|B}$, de centre $\left(x_C = 0; y_C = -\dfrac{mv_0}{qB}\right)$. Le centre est sur l'axe des ordonnées, en $y_C > 0$ si $q < 0$, en $y_C < 0$ si $q > 0$.

R7. En utilisant le fait que $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, obtenir l'équation cartésienne de la trajectoire de la particule chargée. Quelle est la nature du mouvement ? Déterminer ses caractéristiques (son rayon et les coordonnées de son centre).

Solution: $\begin{cases} x(t) = \dfrac{mv_0}{qB}\sin(\omega_c t) \\ y(t) = \dfrac{mv_0}{qB}(\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{mv_0}{qB}\sin(\omega_c t) \\ y + \dfrac{mv_0}{qB} = \dfrac{mv_0}{qB}\cos(\omega_c t) \end{cases} \Rightarrow$

On obtient l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & + & \left(y + \dfrac{mv_0}{qB}\right)^2 & = & \left(\dfrac{mv_0}{qB}\right)^2 \\ (x - x_c)^2 & + & (y - y_c)^2 & = & R^2 \end{array}$$

On obtient l'**équation cartésienne d'un cercle de rayon**

$$R = \left|\frac{mv_0}{qB}\right| = \frac{mv_0}{|q|B}$$

et **de centre**

$$\left(0; -\frac{mv_0}{qB}\right)$$

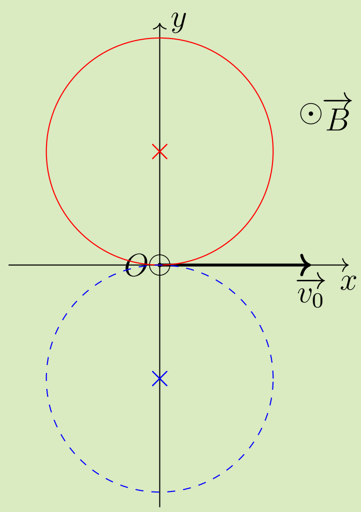
Si $q > 0$, alors $y_c < 0$: c'est la trajectoire en pointillés.
Si $q < 0$, alors $y_c > 0$: c'est la trajectoire en trait plein.

R8. Commenter la dépendance du rayon avec les différents paramètres.

Solution: On retrouve les observations effectuées : le rayon est d'autant plus élevé que le champ magnétique est faible et que la vitesse initiale est élevée. Le rayon est également d'autant plus élevé que la masse de la particule est élevée et que sa charge est faible.

R9. Représenter les trajectoires selon le signe de q. *On fera attention au sens du parcours (cf § III.3).*

Solution:

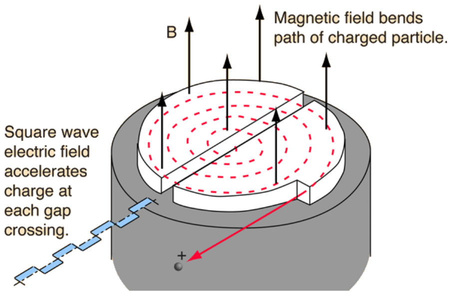


III.5 Applications

Le champ magnétique afin de modifier la trajectoire de particules chargées est utilisé :

- dans un **spectromètre de masse** afin de séparer les ions de rapport $\frac{q}{m}$ différente. Un spectromètre de masse utilise les propriétés des mouvements des particules (après ionisation) dans des champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ pour analyser les ions présents dans un faisceau ou mettre en évidence la présence d'isotopes et déterminer leurs proportions. Les isotopes sont tout d'abord ionisés, puis accélérés par $\overrightarrow{E}$, ils atteignent des vitesses différentes selon leur masse.Puis ils sont déviés par le champ magnétique, le rayon de la trajectoire dépendant de leurs masses. Ainsi des isotopes différents sont récupérés en des positions différentes.

- dans les **accélérateurs de particules**. En effet l'accélération par un champ électrique seul dans les accélérateurs linéaires nécessite la production d'un champ E uniforme dans une grande zone d'espace, ce qui est difficile à mettre en œuvre. On utilise alors un champ magnétique afin de courber les trajectoires et ainsi faire passer la particule un grand nombre de fois dans la zone accélératrice. C'est le cas dans les cyclotrons et les synchrotrons.
  L'inconvénient des **cyclotrons** est qu'ils nécessitent la production d'un champ magnétique uniforme dans une grande zone d'espace (sur la surface du cyclotron).



Les **synchrotrons** associent des zones où règne un champ électrique dans lesquelles les particules sont accélérés et d'autres où règne un champ magnétique dans lesquelles les trajectoires sont courbées pour les replier sur elles-mêmes. Le rayon de la trajectoire des particules accélérés est constant et la production des champs est localisée sur la périphérie du cercle. C'est le cas du LHC (Large Hadron Collider) du CERN (Centre Européen de la Recherche Nucléaire) qui communique à des protons des énergies de l'ordre de 7 TeV (1 TeV $= 10^{12}$ eV) avec une orbite circulaire de 13 km de rayon, ce qui nécessite des champs magnétiques de 8,3 T obtenu à l'aide d'électro-aimants supraconducteurs.