Sujet n°1 Raphaël

Question de cours

Pendule simple : On considère un point matériel $M(m)$ attaché à l'extrémité d'un fil inextensible. On étudie son mouvement dans un plan vertical.

1 - Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ (pris entre la verticale descendante et le fil).

2 - La linéariser dans le cas où les mouvements sont de faibles amplitudes.
Identifier la situation, et la résoudre (avec des conditions initiales fournies par l'interrogateur).

Exercice n°1 Freinage

Une voiture, animée d'une vitesse $v_0 = 90\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur une trajectoire rectiligne freine avec une décélération constante de norme $a_0 = 4.2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Calculer la durée et la distance de freinage.

Exercice n°2 Trajectoire

L'équation horaire du mouvement d'un point en coordonnées polaires est la suivante : $r = be^{\frac{-t}{\tau}}$ et $\theta = \omega t$.

1 - Exprimer la vitesse et l'accélération de ce point.

2 - En déduire leur norme.

3 - Déterminer l'angle entre le vecteur position et le vecteur vitesse.

Sujet n°2 Lylian

Question de cours

On étudie le mouvement dans l'air d'un objet de masse m. On prend en compte les frottements fluides modélisés par $\overrightarrow{f} = -\frac{1}{2}\rho C_x S v \overrightarrow{v}$ où ρ est la masse volumique du fluide, S l'aire du solide selon la direction perpendiculaire au déplacement. Le coefficient C_x, appelé coefficient de traînée dépend principalement de la forme de l'objet. On choisit l'axe (Oz) vertical descendant.

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par v_z au cours d'une chute verticale. *ATTENTION au signes !*

2 - Sans résoudre l'équation différentielle, déterminer la vitesse limite.

3 - Établir l'équation différentielle adimensionnée vérifiée par $V^* = \frac{v_z}{v_{\text{lim}}}$ et $t^* = \frac{t}{\tau}$, montrer qu'elle s'écrit : $\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}t^*} + V^* = 1$ et identifier la constante de temps caractéristique du mouvement.

Exercice n°1 Cardïode

On considère un point mobile M se déplaçant le long d'une courbe d'équation polaire $r(\theta) = a(1 + \cos(\theta))$ appelée cardioïde.

1 - En plaçant les points correspondants à $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{3}, \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{2\pi}{3}, \theta = \pi, \theta = \frac{4\pi}{3} \ldots \theta = 2\pi$ dans le plan Oxy, représenter la cardioïde.

2 - En un point P quelconque de la cardioïde, représenter θ, r ainsi que les vecteurs de base $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$.

La cardioïde est parcourue à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ constante. A $t = 0, \theta(0) = 0$.

3 - Déterminer le vecteur vitesse du point M dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$.

4 - Représenter la vitesse $\vec{v}(M)$ du point M lorsqu'il se situe au point P de la cardioïde.

5 - En quel point de la trajectoire la norme v de la vitesse de M est-elle maximale ?

6 - Déterminer le vecteur accélération du point M dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$.

Exercice n°2 Freinage

Combien de g ressent un conducteur qui freine sur une distance de 10 m alors qu'il roulait à $50\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$?

Sujet n°3 François

Question de cours

Lois de Coulomb

- Sans glissement : $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| < f_s \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$
- En cas de glissement : $\overrightarrow{R_T}$ est dans le sens opposé au vecteur vitesse de glissement et $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f_d \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$

On étudie le mouvement d'une pierre de curling, lancée, à l'instant $t = 0$, à la vitesse $v_0 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Elle décrit un mouvement rectiligne.
Les frottements dûs à la glace sont modélisés par les lois de Coulomb sur le frottement solide de coefficient de frottement $f = 0,015$.

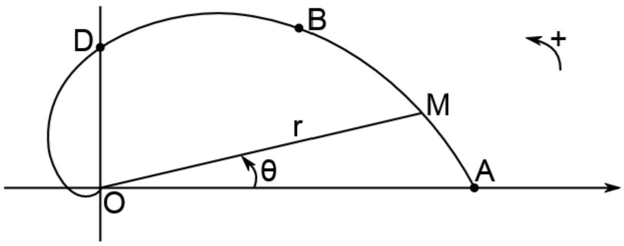
1 - Par application du PFD, exprimer la norme de la réaction normale. En déduire la norme, puis l'expression du vecteur $\overrightarrow{R_T}$.

2 - Obtenir l'équation du mouvement, puis l'intégrer deux fois pour obtenir l'équation horaire qui donne la position de la pierre en fonction du temps.

3 - Déterminer l'instant t_f d'arrêt de la pierre, puis la distance parcourue avant son arrêt.

Exercice n°1 Une trajectoire polaire

On repère la position d'un animal (point matériel M de masse m) se déplaçant dans un plan par ses coordonnées polaires r et θ de pôle O. L'allure de la trajectoire pour θ variant de 0 à 2π est la suivante :



Il décrit une spirale logarithmique d'équation $r = ae^{-\theta}$ dans le sens des θ croissants, avec a constante positive. Le mouvement est défini par la loi horaire : $\theta = \omega t$ où la vitesse angulaire ω est une constante positive.

1 - Reproduire la figure ci-dessus et dessiner aux points A, B et D les vecteurs de la base locale $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$.

2 - Exprimer dans cette base locale les vecteurs vitesse et accélération du point matériel.

3 - Calculer la norme du vecteur vitesse. Le mouvement est-il uniforme ?

4 - Donner les composantes du vecteur vitesse aux points $A(\theta = 0)$ et $D\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de a et de ω, et celles du vecteur accélération aux mêmes points en fonction de a et ω^2.

5 - En précisant l'échelle choisie pour $a\omega$ et $a\omega^2$, dessiner les vecteurs vitesses et accélération aux points A et D. Commenter.

Exercice n°2 Distance de sécurité

Deux voitures, distantes de $d = 80$ m, se suivent en roulant à la vitesse $v = 130 \text{ km.h}^{-1}$. A $t_0 = 0$ s , la voiture A_1 de tête freine avec une décélération constante $a = -10,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La voiture A_2, qui suit, freine à $t_1 = 3$ s avec une décélération $b = -15,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1 - Déterminer les équations horaires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des voitures pour différents intervalles de temps que l'on explicitera.

2 - Y-a-t-il collision entre les deux voitures ? Si oui, déterminer l'instant τ, le lieu x_0 du choc et la vitesse relative v_{rel} du choc.

Sujet n°4 Chiara

Question de cours

Lois de Coulomb

- Sans glissement : $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| < f_s\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$
- En cas de glissement : $\overrightarrow{R_T}$ est dans le sens opposé au vecteur vitesse de glissement et $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f_d\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$

On considère une luge placée sur un pente enneigée inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. On souhaite déterminer la condition entre α et le coefficient de frottement statique pour que la luge ne glisse pas.

1 - Réaliser un schéma du problème, sur lequel on indiquera la base adaptée judicieusement placée.

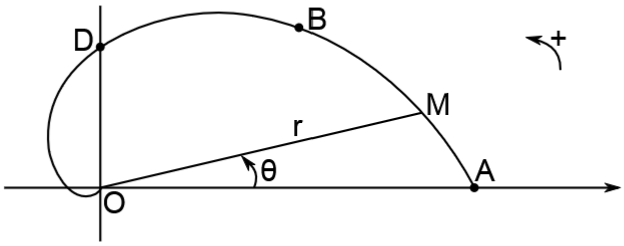
2 - Après avoir effectuer un bilan des forces, écrire la conséquence de l'équilibre.

3 - En déduire les expressions des composantes des réactions normale et tangentielle.

4 - En exploitant la loi de Coulomb, déterminer la condition sur l'angle pour que la luge puisse ne pas glisser.

Exercice n°1 Une trajectoire polaire

On repère la position d'un animal (point matériel M de masse m) se déplaçant dans un plan par ses coordonnées polaires r et θ de pôle O. L'allure de la trajectoire pour θ variant de 0 à 2π est la suivante :



Il décrit une spirale logarithmique d'équation $r = ae^{-\theta}$ dans le sens des θ croissants, avec a constante positive. Le mouvement est défini par la loi horaire : $\theta = \omega t$ où la vitesse angulaire ω est une constante positive.

1 - Reproduire la figure ci-dessus et dessiner aux points A, B et D les vecteurs de la base locale $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$.

2 - Exprimer dans cette base locale les vecteurs vitesse et accélération du point matériel.

3 - Calculer la norme du vecteur vitesse. Le mouvement est-il uniforme ?

4 - Donner les composantes du vecteur vitesse aux points $A(\theta = 0)$ et $D\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de a et de ω, et celles du vecteur accélération aux mêmes points en fonction de a et ω^2.

5 - En précisant l'échelle choisie pour $a\omega$ et $a\omega^2$, dessiner les vecteurs vitesses et accélération aux points A et D. Commenter.

Exercice n°2 Freinage

Combien de g ressent un conducteur qui freine sur une distance de 10 m alors qu'il roulait à 50 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$?

Sujet n°5 Isabelle

Question de cours

Une bille en acier (de masse volumique ρ_a) de rayon R est lâchée dans un cylindre rempli d'huile (de masse volumique ρ_h). Pour une sphère de rayon R dans un fluide de viscosité η, la force de frottement fluide est modélisée par la formule de Stokes : $\overrightarrow{f} = -6\pi R\eta\overrightarrow{v}$. On choisit l'axe (Oz) vertical descendant.

1 - Exprimer la poussée d'Archimède.

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée v_z au cours d'une chute verticale.

3 - Sans résoudre l'équation différentielle, déterminer la vitesse limite.

4 - Mettre l'équation différentielle sous forme canonique pour identifier la constante de temps caractéristique τ.

Exercice n°1 Mouvement hélicoïdal

Un mobile M décrit une hélice circulaire d'axe OZ. On le repère par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z). L'équation de la trajectoire est $\begin{cases} r = a \\ \theta = \omega \cdot t \\ h = H \cdot \left(1 - \frac{\omega \cdot t}{4.\pi}\right) \end{cases}$ avec a, ω et H constantes positives. On lâche le mobile à l'instant $t = 0$ et il effectue n tours avant d'atteindre le plan $z = 0$.

1 - Déterminer le nombre n de tours effectués.

2 - Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}$ du mobile, dans la base $\mathfrak{B}\left\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\right\}$.

3 - Exprimer la norme v du vecteur vitesse

4 - Exprimer le vecteur accélération et commenter.

Exercice n°2 Distance de sécurité

Deux voitures, distantes de $d = 80$ m, se suivent en roulant à la vitesse $v = 130$ km.h^{-1}. A $t_0 = 0$ s , la voiture A_1 de tête freine avec une décélération constante $a = -10,0$ m $\cdot$ s^{-2}. La voiture A_2, qui suit, freine à $t_1 = 3$ s avec une décélération $b = -15,0$ m $\cdot$ s^{-2}.

1 - Déterminer les équations horaires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des voitures pour différents intervalles de temps que l'on explicitera.

2 - Y-a-t-il collision entre les deux voitures ? Si oui, déterminer l'instant τ, le lieu x_0 du choc et la vitesse relative v_{rel} du choc.

Sujet n°6 Apolline

Question de cours

Pendule simple : On considère un point matériel $M(m)$ attaché à l'extrémité d'un fil inextensible. On étudie son mouvement dans un plan vertical.

1 - Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ (pris entre la verticale descendante et le fil).

2 - La linéariser dans le cas où les mouvements sont de faibles amplitudes.
Identifier la situation, et la résoudre (avec des conditions initiales fournies par l'interrogateur).

Exercice n°1 Distance de sécurité

Deux voitures, distantes de $d = 80$ m, se suivent en roulant à la vitesse $v = 130$ km.h^{-1}. A $t_0 = 0$ s , la voiture A_1 de tête freine avec une décélération constante $a = -10,0\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$. La voiture A_2, qui suit, freine à $t_1 = 3$ s avec une décélération $b = -15,0\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

1 - Déterminer les équations horaires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des voitures pour différents intervalles de temps que l'on explicitera.

2 - Y-a-t-il collision entre les deux voitures ? Si oui, déterminer l'instant τ, le lieu x_0 du choc et la vitesse relative v_{rel} du choc.

Exercice n°2 Tour de manège

Un forain se déplace sur son manège depuis la périphérie vers son axe de rotation Oz. Le manège tourne autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{u}_z$, avec $\omega_0 = 1,0\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}$ repéré par (O, x, y, z).

La grande expérience du forain lui permet de se déplacer selon un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $v_0 = 1,0\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ par rapport au manège.

Nous étudions le mouvement du forain assimilé à un point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ en le repérant par ses coordonnées polaires r et θ. À l'instant initial, nous considérons que $r(0) = R = 5,0$ m et $\theta(0) = 0$. Le forain s'arrête lorsque $r = R_{\min} = 0,50$ m.

1 - Déterminer les lois $r(t)$ et $\theta(t)$.

2 - Déterminer la vitesse et l'accélération de M à tout instant dans le référentiel $\mathscr{R}$.

3 - À quelle date sa vitesse dans $\mathscr{R}$ est-elle maximale ? Calculer cette vitesse maximale.

4 - À quelle date son accélération dans $\mathscr{R}$ est-elle maximale ? Calculer cette accélération maximale.