Tu peux le faire
Ne doute pas de tes capacités
N'abandonne pas et reste concentré.e
Crois en toi
Tu as les ressources en toi pour réussir
Fais de ton mieux.
Ne lâche rien

Lundi 26 janvier 2026 — *Durée : 4 heures*

Devoir Surveillé n°7 (1) — Mécanique

La calculatrice est INTERDITE

Check-list à cocher !

Sur la forme :	
Ma copie est rédigée sur des copies doubles.	❏
Prendre une nouvelle copie double pour chaque exercice.	❏
Ma copie est propre.	❏
Chaque réponse commence par une phrase / des mots.	❏
Les résultats littéraux sont encadrés, les applications numériques soulignées.	❏
Un long trait horizontal est tiré entre chaque question.	❏
Les pages sont numérotées.	❏
Sur le fond :	
Les expressions littérales sont homogènes.	❏
Les applications numériques sont suivies d'une unité adaptée.	❏

Ce sujet comporte 6 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de 8 pages.

Contenu du DS :

Exercice n°1 TP *(Durée ∼ 10 min)* 2
Exercice n°2 Bulles de champagne *(Durée ∼ 50 min)* 3
Exercice n°3 Étude d'un toboggan rectiligne *(Durée ∼ 1h15)* 4
Exercice n°4 Étude des oscillations dans une cuvette *(Durée ∼ 45 min)* 6
Exercice n°5 Interaction entre des atomes de Néon *(Durée ∼ 30 min)* 7
Exercice n°6 Toboggan hélicoïdal *(Durée ∼ 30 min)* 8

Données numériques

- $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- $\ln(100) = 4,6$
- $10^{-1,25} \simeq 0,056$
- $(80/3,6)^2 \simeq 5 \times 10^2$; $(80 \times 3,6)^2 \simeq 8 \times 10^4$
- $2^{1/6} \approx 1,1$; $2^{1/12} \approx 1,1$; $2^{-1/6} \approx 0,9$; $2^{-1/12} \approx 0,9$
- Lois de Coulomb.
  On note T la norme de la composante tangentielle et N la norme de la composante normale de la réaction du support.
  - En l'absence de glissement, $T < \mu_s N$, où μ_s est le coefficient de frottement statique.
  - En présence de glissement, $T = \mu_d N$, où μ_d est le coefficient de frottement dynamique.

Exercice n°1 TP *(Durée ∼ 10 min)*

Suite à l'expérience de la chute de la bille de rayon R dans du miel, on obtient la série de valeurs suivantes pour la viscosité η, qui intervient dans la force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta R\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse.

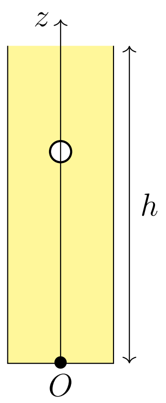
```
eta = [4.35812022, 4.46859186, 4.9553637 , 4.0787473 , 4.84452288,
   5.22699136, 5.31601425, 4.19039548, 4.54784836, 4.11190872]
>>> np.mean(eta)
4.609850412367232
>>> np.std(eta,ddof=1)
0.453027608208495
>>> np.std(eta,ddof=1)/np.sqrt(len(eta))
0.1432599084877237
```

Q1. Quelle est l'unité de η ? On l'exprimera à l'aide uniquement des kg, m et s.

Q2. Quelle grandeur calcule `np.mean(eta)` ? Quelle grandeur calcule `np.std(eta,ddoff=1)` ? Quelle grandeur calcule `np.std(eta,ddoff=1)/np.sqrt(len(eta))` ?

Q3. Écrire le résultat de l'expérience en étant vigilant.e sur le nombre de chiffres significatifs.

Exercice n°2 Bulles de champagne *(Durée ∼ 50 min)*



Dans cet exercice, on cherche à calculer le temps que met une bulle qui se forme en bas d'une coupe de champagne [a] pour arriver à la surface. Les bulles de champagne sont constituées de dioxyde de carbone CO_2. Celui-ci, initialement dissout dans le champagne quand la bouteille est fermée, repasse à l'état gazeux quand on ouvre la bouteille (puisque la pression diminue alors brusquement).
La bulle étudiée est sphérique de diamètre constant $D = 1,0$ mm.
Elle apparait à $t = 0$ sans vitesse initiale en bas de la coupe à l'altitude $z = 0$ (axe (Oz) ascendant), puis remonte jusqu'à la surface.
La hauteur de la coupe est $h = 10$ cm.

a. L'abus de l'alcool est dangereux pour la santé.

Au cours de son ascension, la bulle est freinée par une force de frottement visqueux $\vec{f} = -k\vec{v}$, où le coefficient k est donné par la formule de Stokes : $k = 6\pi\eta r$, dans laquelle r est le rayon de la bulle et η la viscosité du champagne : $\eta = 1,0 \times 10^{-3}$ Pa · s.

La masse volumique du champagne est quasiment égale à celle de l'eau, soit $\rho_{\text{eau}} = 1,0 \times 10^3$ kg · m^{-3}.

La bulle de champagne est constituée de CO_2 de masse volumique $\rho_{CO_2} = 1,8$ kg · m^{-3} dans les conditions de l'expérience.

Q1. **Rappeler** l'expression du volume d'une sphère de rayon r.

Q2. **Exprimer** le poids et la poussée d'Archimède qui s'exercent sur la bulle de champagne.

Q3. **Établir** l'équation vérifiée par la composante v_z du vecteur vitesse de la bulle.

Q4. **Expliquer** qualitativement pourquoi la bulle de champagne va atteindre une vitesse limite au cours de son ascension.
Déterminer ensuite l'expression de v_{lim} en fonction des données de l'énoncé (r, η, $\rho_{\text{eau}} - \rho_{CO_2}$, g).
Faire l'application numérique.

Q5. **Montrer** que l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{v_z}{\tau} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}$$

et identifier τ (en fonction de r, η, et ρ_{eau}, ρ_{CO_2}).

Q6. **Résoudre complètement** l'équation différentielle satisfaite par $v_z(t)$.

Q7. Au bout de combien de temps la bulle a-t-elle atteint sa vitesse limite, à 1% près ? Vous établirez une expression littérale puis vous ferez l'application numérique.

Q8. **Déterminer l'équation horaire** du mouvement $z(t)$.

Q9. Compte tenu de la valeur trouvée à la question Q7, justifier qu'on peut considérer que $z(t) \approx v_{\text{lim}}t$.
Calculer alors le temps T que met la bille pour arriver à la surface.

Exercice n°3 Étude d'un toboggan rectiligne *(Durée ∼ 1h15)*

Partie I Questions de cours autour de l'énergie

Q1. **Donner la définition** du travail d'une force $\overrightarrow{f}$ quelconque entre A et B. Quelle est son unité ?

Q2. **Donner la définition** d'une force conservative.

Q3. **Donner l'expression** du travail d'une force conservative entre A et B et la variation de l'énergie potentielle.

Q4. **Énoncer le théorème** de l'énergie mécanique.

Un toboggan aquatique est un type de toboggan dans lequel un mince filet d'eau assure un glissement du passager avec de faibles frottements. Il en existe de diverses formes, et cette première partie propose d'étudier leur dimensionnement.

On s'intéresse à un toboggan rectiligne, comme celui de la figure 1. La différence de hauteur entre le point de départ et le point d'arrivée est notée h, et le passager démarre en haut (au point A) avec une vitesse initiale nulle. On note g l'intensité de la pesanteur et m la masse du passager. On note v_B la vitesse du passager à l'arrivée (au point B).

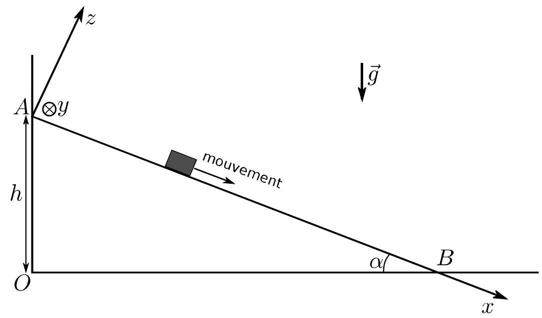


FIGURE 1 – Gauche : photographie du toboggan "le géant" du parc de Wavelsland. Pour ce toboggan, qui est le plus haut de France, $h = 33$ m et $\alpha \simeq 45°$. Droite : modélisation retenue pour l'étude du toboggan.

Partie II Sans frottement

Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

Q5. **Effectuer un bilan des forces** précis, et préciser les forces qui sont conservatives ou non.

Q6. **Exprimer** le travail de l'unique force non conservative entre A et B.

Q7. Que peut-on dire de l'énergie mécanique ?

Q8. En utilisant une approche énergétique, **exprimer** la vitesse atteinte au point B par le passager, en fonction de h et de g.

On admet que l'application numérique donne $v_B = 92$ km/h.

Q9. Ce résultat dépend-il de la forme du toboggan, à h constant ?

Partie III Prise en compte des frottements

On prend maintenant en compte les frottements. On utilisera le repère cartésien indiqué sur la figure 1 (droite), avec $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ les vecteurs unitaires de la base. Le mouvement a lieu selon $\overrightarrow{e_x}$ seulement.

La résultante exercée par le toboggan sur le passager s'écrit : $\overrightarrow{R} = N\overrightarrow{e_z} - T\overrightarrow{e_x}$, où $T > 0$ représente les frottements solides.

On suppose l'inclinaison du toboggan suffisante pour qu'il y ait mouvement, et on note μ le coefficient de frottement dynamique.

Q10. (a) **Projeter** le poids dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$

(b) **Écrire** le principe fondamental de la dynamique.

(c) **Le projeter** dans la direction perpendiculaire au mouvement, et en déduire l'expression de N en fonction de m, g, et de l'angle α.

(d) **En déduire** l'expression de T en fonction de μ, m, g, et de l'angle α.

Q11. **Exprimer** le travail de la force $\overrightarrow{R}$ en fonction de μ, m, g et de la distance AB, puis en fonction de μ, m, g, h et de l'angle α.

Q12. À l'aide de ce qui précède et d'un théorème énergétique, **établir l'expression** de la vitesse atteinte par le passager en B, en fonction de μ, h, g et de l'angle α.

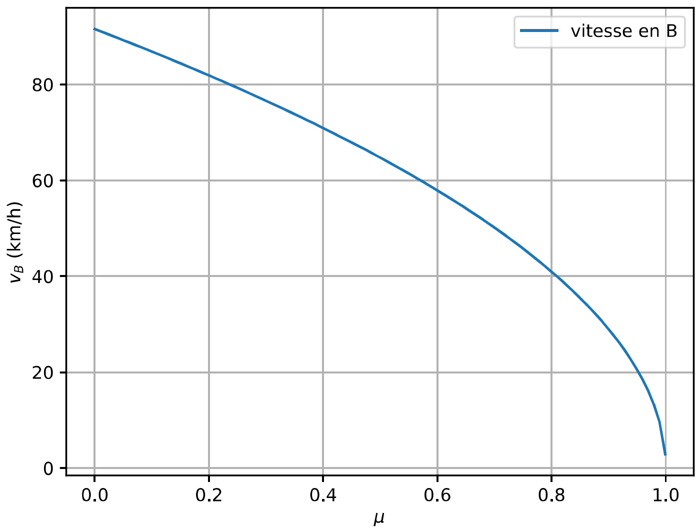


FIGURE 2 – Tracé de l'expression de v_B obtenue dans l'énoncé en fonction du coefficient de frottement μ, pour $\alpha = 45°$.

Q13. La figure 2 montre un tracé de l'expression précédente de v_B en fonction de μ. La direction du parc d'attraction indique que la vitesse maximale atteinte dans son toboggan est de 80 km/h. **En déduire** une estimation de la valeur du coefficient de frottement passager-toboggan.

Partie IV Arrivée en bas de la piste

En bas du toboggan se trouve une longue piste horizontale, dans laquelle le passager va ralentir jusqu'à atteindre une vitesse nulle. On souhaite dimensionner la longueur de cette piste. Les frottements agissent toujours.

Q14. À l'aide des d'un raisonnement énergétique, **déterminer la longueur** L de la piste en fonction de v_B, μ et g.

On attend une expression puis une valeur numérique.

Exercice n°4 Étude des oscillations dans une cuvette *(Durée ∼ 45 min)*

On considère une masse m (point M) astreinte à glisser dans une cuvette de rayon a. Le mouvement a lieu dans le plan Oxy de la figure 3. On néglige tout frottement. On note $\overrightarrow{g}$ le vecteur pesanteur et g sa norme. On utilise les coordonnées polaires représentées sur la figure 3, avec les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e}_r$ et $\overrightarrow{e}_\theta$.

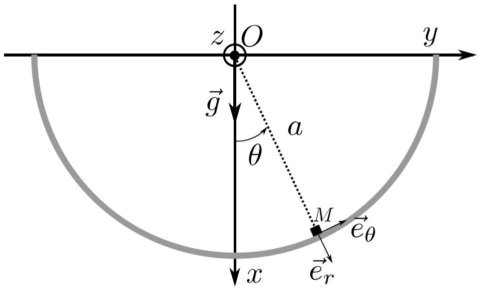


FIGURE 3 – Le point M glisse sans frottement le long d'un support cylindrique (arc de cercle grisé). Il n'y a pas de mouvement selon Oz.

Q1. **Effectuer** un bilan des forces, les **représenter** sur un schéma.

On souhaite obtenir l'équation différentielle du mouvement de deux façons.

Partie I Première méthode : avec le principe fondamental de la dynamique

Q2. Après avoir écrit le principe fondamental de la dynamique, **établir** l'équation différentielle du mouvement reliant θ et $\ddot{\theta}$.

Partie II Deuxième méthode : avec l'énergie

Q3. **Exprimer** l'énergie mécanique de M en fonction de m, g, a, θ, $\dot{\theta}$.

Q4. **Donner** la définition de la puissance d'une force. Quelle est **son unité** ?

Q5. **Énoncer** le théorème de la puissance mécanique.

Q6. En utilisant le théorème de la puissance mécanique, **montrer que** θ vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\sin(\theta) = 0$$

Partie III Résolution

Q7. **Proposer** une approximation qui permet de résoudre cette équation.
Sous cette hypothèse, **résoudre** l'équation. On supposera qu'initialement $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

Q8. **Tracer** l'allure de la solution $\theta(t)$. On fera apparaître les valeurs maximales et minimales atteintes.

Q9. Toujours sous l'hypothèse précédente, **donner l'expression** de la période des oscillations en fonction de a et de g.

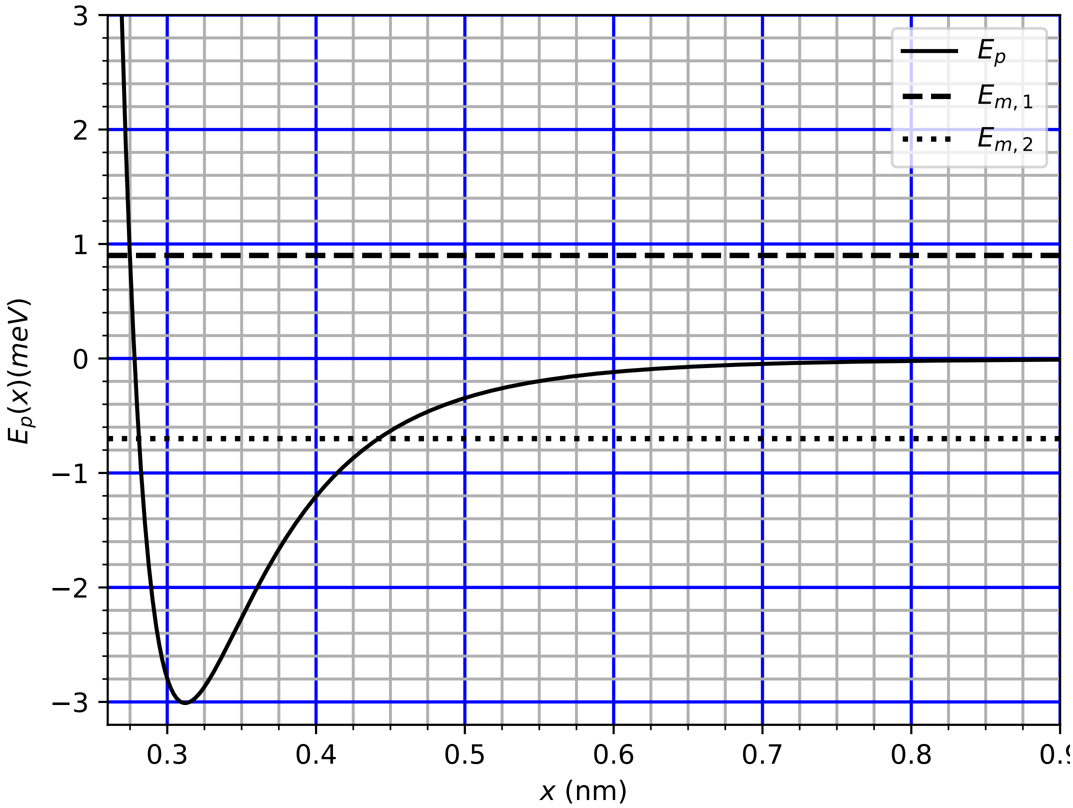
Exercice n°5 Interaction entre des atomes de Néon *(Durée ∼ 30 min)*

On considère un atome de Néon de masse m interagissant avec un autre atome de Néon supposé fixe dans un référentiel galiléen. Le problème est vu de façon unidimensionnelle selon x, l'atome fixe étant situé en l'origine O.

L'énergie potentielle correspondant à la force d'interaction $\overrightarrow{F}$ qui s'exerce entre les deux atomes est modélisée par le potentiel de Lennard-Jones :

$$\mathscr{E}_P(x) = 4\mathscr{E}_0\left[\left(\frac{d}{x}\right)^{12} - \left(\frac{d}{x}\right)^{6}\right]$$

où x désigne la distance intermoléculaire et σ est une distance caractéristique. L'énergie potentielle est prise nulle lorsque $x \to \infty$, c'est-à-dire lorsque les deux atomes sont infiniment éloignés.
On donne le graphe représentatif de $\mathscr{E}_p(x)$.



Q1. Justifier que l'énergie mécanique de l'atome de néon se conserve.

Q2. Différents mouvements possibles :

(a) À partir de la définition de l'énergie mécanique, donner l'inégalité qui relie $\mathscr{E}_m$ et $\mathscr{E}_p(x)$.

(b) Comment graphiquement (connaissant les courbes représentatives de $\mathscr{E}_m$ et $\mathscr{E}_p$) détermine-t-on les positions accessibles à l'atome de carbone ?

Dans les deux questions suivantes, les termes « borné », « non borné », « oscillations périodiques » doivent apparaître.

(c) Déterminer les positions accessibles à l'atome de néon, si l'énergie mécanique vaut $\mathscr{E}_{m,1}$. Décrire son mouvement. Quelles sont les positions de vitesse nulle ?

(d) Déterminer les positions accessibles à l'atome de néon, si l'énergie mécanique vaut $\mathscr{E}_{m,2}$. Décrire son mouvement. Quelles sont les positions de vitesse nulle ?

Le graphe du document réponse devra être complété et rendu avec votre copie.

Q3. Équilibre ?

(a) Comment est l'énergie potentielle en une position d'équilibre ?

(b) À partir de l'expression de $\mathscr{E}_p(x)$, montrer que la distance d'équilibre x_0 s'exprime selon $x_0 = 2^{1/6}d$.

(c) Exprimer $\mathscr{E}_p(x_0)$ en fonction de $\mathscr{E}_0$ uniquement.

Q4. Stabilité ?

(a) Comment est l'énergie potentielle en une position d'équilibre stable ? instable ?

(b) D'après le graphe, x_0 est-elle une position d'équilibre stable ou instable ?

Q5. En exploitant le graphe et les questions précédentes, déterminer les valeurs de d et $\mathscr{E}_0$.

Exercice n°6 Toboggan hélicoïdal *(Durée ∼ 30 min)*

On étudie le toboggan représenté sur la figure ci-dessous :

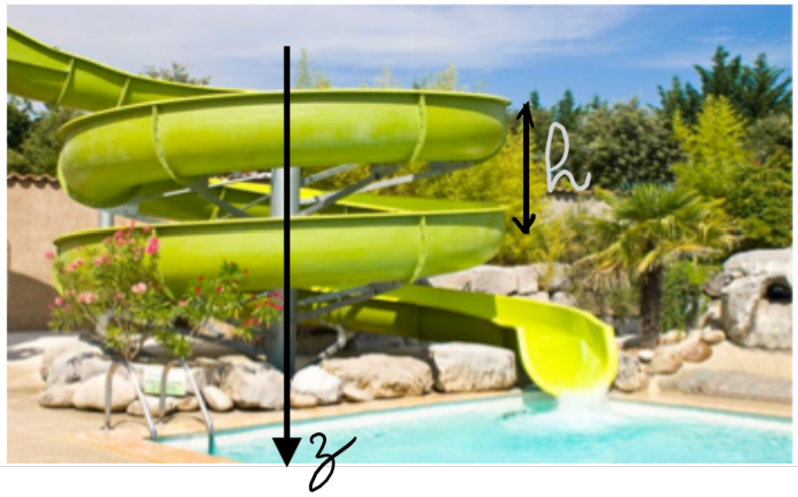


FIGURE 4 – Toboggan hélicoïdal

Pour l'étude du mouvement, on propose le modèle suivant :

- L'enfant de masse $m = 50$ kg, est assimilé à un point matériel M.
- Le toboggan, de forme hélicoïdale, débute en A et se termine en B après 3 tours exactement ; il s'enroule sur un cylindre vertical de rayon $R = 5$ m.
- À chaque tour complet, l'enfant descend d'une hauteur h .

Le point M, initialement immobile en A, est repéré par ses coordonnées cylindriques z étant la cote du point M sur l'axe de symétrie de la trajectoire, choisi vertical descendant.

L'origine O de l'axe Oz est choisie à l'intersection de cet axe et du plan horizontal passant par A.

On étudie le mouvement de l'enfant uniquement d'un **point de vue cinématique**.

Q1. Quelles sont les coordonnées cylindriques d'un point M ?

Faire un schéma définissant les coordonnées cylindriques, et indiquer dessus la base cylindrique.

Les équations horaires de l'enfant sont : $\begin{cases} r(t) &= R \\ \theta(t) &= \omega t \\ z(t) &= H - v_0 t \end{cases}$ où H, R, ω, v_0 sont des constantes positives.

Q2. **Exprimer** le vecteur position de l'enfant $\overrightarrow{OE}$.

Q3. **Exprimer** le vecteur vitesse de l'enfant en coordonnées cylindriques, en fonction des constantes du problèmes et des vecteurs de la base cylindrique.

Q4. **Exprimer** la norme du vecteur vitesse et conclure sur la nature du mouvement.

Q5. **Exprimer** le vecteur accélération de l'enfant en coordonnées cylindriques, en fonction des constantes du problèmes et des vecteurs de la base cylindrique.

Q6. Sachant que l'enfant fait exactement trois tours au cours de la descente, à quel instant arrive-t-il en bas ? Avec quelle vitesse (=on exprimera sa norme en fonction de h, v_0 et ω) ?