Tu peux le faire
Ne doute pas de tes capacités
N'abandonne pas et reste concentré.e
Crois en toi
Tu as les ressources en toi pour réussir
Fais de ton mieux.
Ne lâche rien

Lundi 26 janvier 2026 — *Durée : 4 heures*

Devoir Surveillé n°7 (2) — Mécanique

La calculatrice est INTERDITE

Check-list à cocher !

Sur la forme :	
Ma copie est rédigée sur des copies doubles.	❏
Prendre une nouvelle copie double pour chaque exercice.	❏
Ma copie est propre.	❏
Chaque réponse commence par une phrase / des mots.	❏
Les résultats littéraux sont encadrés, les applications numériques soulignées.	❏
Un long trait horizontal est tiré entre chaque question.	❏
Les pages sont numérotées.	❏
Sur le fond :	
Les expressions littérales sont homogènes.	❏
Les applications numériques sont suivies d'une unité adaptée.	❏

Ce sujet comporte 4 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de 11 pages.

Contenu du DS :

Données numériques

- $g = 10\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
- $10^{-1{,}25} \simeq 0,056$
- $(80/3,6)^2 \simeq 5 \times 10^2$; $(80 \times 3,6)^2 \simeq 8 \times 10^4$
- $2^{1/6} \approx 1,1$; $2^{1/12} \approx 1,1$; $2^{-1/6} \approx 0,9$; $2^{-1/12} \approx 0,9$
- Vecteur gradient en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \overrightarrow{u_z}$$

- Développement de Taylor au premier ordre au voisinage de x_0 : $f(x) \approx f(x_0) + \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \times (x - x_0)$

  Lois de Coulomb.

  On note T la norme de la composante tangentielle et N la norme de la composante normale de la réaction du support.

  - En l'absence de glissement, $T < \mu_s N$, où μ_s est le coefficient de frottement statique.
  - En présence de glissement, $T = \mu_d N$, où μ_d est le coefficient de frottement dynamique.

Exercice n°1 TP *(Durée ∼ 10 min)*

Suite à l'expérience de la chute de la bille de rayon R dans du miel, on obtient la série de valeurs suivantes pour la viscosité η, qui intervient dans la force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta R\overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse.

```
eta = [4.35812022, 4.46859186, 4.9553637 , 4.0787473 , 4.84452288,
   5.22699136, 5.31601425, 4.19039548, 4.54784836, 4.11190872]
>>> np.mean(eta)
4.609850412367232
>>> np.std(eta,ddof=1)
0.453027608208495
>>> np.std(eta,ddof=1)/np.sqrt(len(eta))
0.1432599084877237
```

Q1. Quelle est l'unité de η ? On l'exprimera à l'aide uniquement des kg, m et s.

Q2. Quelle grandeur calcule `np.mean(eta)` ? Quelle grandeur calcule `np.std(eta,ddoff=1)` ? Quelle grandeur calcule `np.std(eta,ddoff=1)/np.sqrt(len(eta))` ?

Q3. Écrire le résultat de l'expérience en étant vigilant.e sur le nombre de chiffres significatifs.

Exercice n°2 Gouttes de pluie *(Durée ∼ 1h10)*

Partie I Vitesse des gouttes de pluie

On s'intéresse à la chute dans l'air d'une goutte d'eau de diamètre D et de masse volumique $\rho = 1,0 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On prendra pour l'air une masse volumique égale à $\rho_a = 1,3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. L'axe Oz est vertical descendant. L'accélération de la pesanteur vaut $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{e_z}$ avec $g = 9,8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Q1. Définir « référentiel galiléen ». Définir et exprimer le poids d'une goutte d'eau, en fonction uniquement des données ρ, D et $\overrightarrow{e_z}$.

Q2. On admet que la seule autre force mise en jeu est la force de frottement, due à l'air, proportionnelle au carré de la vitesse v de la goutte. Elle s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{\text{frott}}} = -C\pi\rho_a D^2 v^2 \overrightarrow{e_z} \text{ avec } C = 6,0 \cdot 10^{-2}.$$

Vérifier l'homogénéité de cette formule.

Q3. En appliquant la seconde loi de Newton à la goutte dans le référentiel terrestre, montrer que sa vitesse limite, donc indépendante du temps, s'écrit :

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\overrightarrow{e_z}$$

où K est un coefficient à exprimer en fonction de ρ, ρ_a, C et de g.

Gunn et Kinzer ont mesuré en 1949 avec précision des vitesses limites de gouttes de différents diamètres. Les résultats de leurs mesures avec les barres d'incertitudes sont reportés sur la figure 1 en trait plein ainsi que la représentation de la relation obtenue en Q3 en traits pointillés.

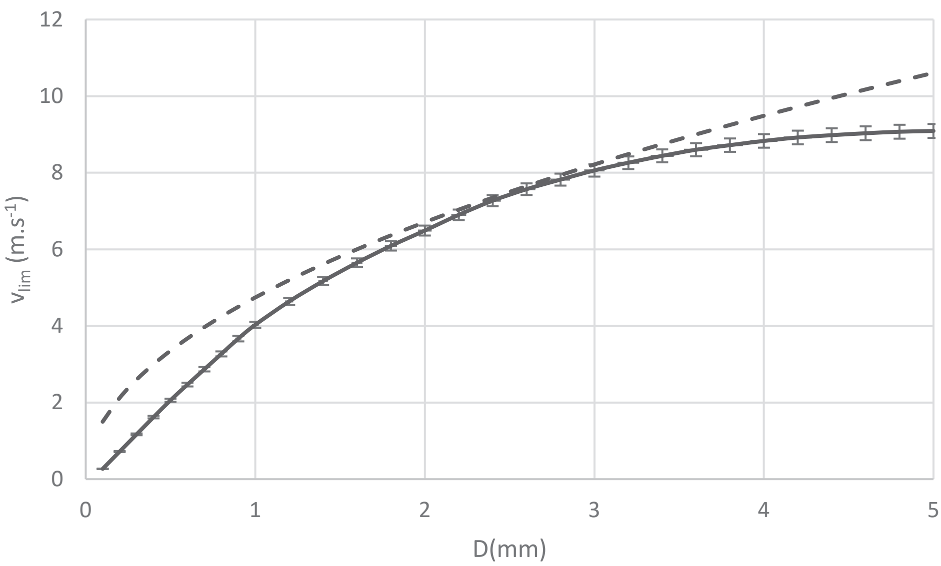


Figure 1 – Influence du diamètre sur la vitesse limite

Q4. Pour quelle(s) raison(s) le modèle théorique élaboré aux questions de Q1 à Q3 n'est-il pas validé pour toutes les tailles de gouttes ?

Partie II Disdromètre à impact avec platine

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation : $\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\overrightarrow{e_z}$, avec $K = 150\ \text{m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$.

On s'intéresse à un disdromètre à impact. Il se compose d'une platine sensible recevant les gouttes de pluie de masse $m(D)$ ayant atteint leur vitesse limite et d'un système de traitement permettant la mesure de celle-ci.

On modélise la platine par un disque plan horizontal, de rayon R et de masse M, relié à un support fixe par l'intermédiaire d'une suspension, modélisée par un système masse-ressort amorti.

On note k la raideur du ressort liant la platine au support, ℓ_0 sa longueur à vide et λ le coefficient de frottement traduisant l'amortissement du disque : la force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de la platine, s'écrit donc platine $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v_{\text{platine}}}$

La goutte exerce, lors de son impact sur la platine, une force $\overrightarrow{F(t)} = F(t)\overrightarrow{e_z}$ verticale sur celle-ci.

Le référentiel lié au support est supposé galiléen.

Le déplacement de la platine du disdromètre par rapport à sa position d'équilibre est $Z(t)$ (figure 2).

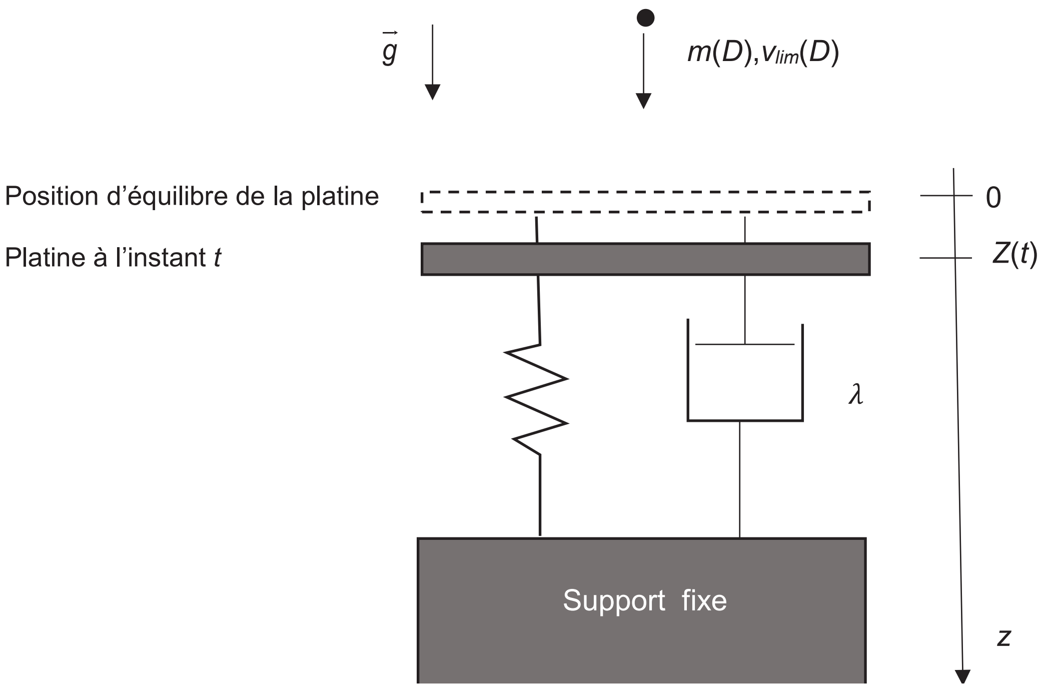


FIGURE 2 – Modélisation du disdromètre à impact à platine

Q5. Exprimer la longueur $\ell_{\text{éq}}$ du ressort à l'équilibre de la platine, sans impact de goutte. Vérifier la cohérence physique en comparant $\ell_{\text{éq}}$ à ℓ_0.

Q6. Montrer que l'équation liant $Z(t)$ à $F(t)$ est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} + \beta Z(t) = \frac{F(t)}{M}$$

et exprimer les coefficients γ et β (on vérifiera bien qu'ils sont tous les deux positifs !) en fonction de k, M et λ.

La force $F(t)$ est modélisée par :

- $F = F_0 = m(D)\dfrac{v_{\text{lim}}(D)}{\tau(D)}$ pour $0 < t < \tau$
- $F = 0$ pour $t > \tau$.

Q7. Donner la signification physique de τ et justifier que son ordre de grandeur est :

$$\tau(D) \approx \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}$$

On utilise en pratique un facteur correctif $\xi = 0,65$ tel que :

$$\tau(D) = \xi \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}.$$

Calculer τ pour $D = 2,5$ mm.

On se place à $0 \leq t \leq \tau(D)$ et on souhaite que la réponse du disdromètre soit la plus rapide possible.

Q8. Quelle doit être la relation entre les coefficients β et γ ?

On se place dans ce cas.

Q9. Le système étant à l'équilibre avant la chute de la goutte, montrer que la réponse du disdromètre s'écrit alors pour $0 \leq t \leq \tau$:

$$Z(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \left(1 + \gamma\frac{t}{2}\right)e^{-\gamma t/2}\right]$$

Q10. Comment choisir γ pour réaliser $Z(\tau) = \dfrac{F_0}{k}$? Montrer alors que $Z(\tau)$ est proportionnel à D^α et donner la valeur de α.

Q11. Tracer l'allure de $Z(t)$ pour $0 \leq t \leq 2\tau$.

Q12. Comment la mesure de $Z(t)$ permet-elle de connaître D ?

Exercice n°3 Parc d'attraction *(Durée ∼ 1h45)*

Partie I Étude d'un toboggan rectiligne *(Durée ∼ 30 min)*

Un toboggan aquatique est un type de toboggan dans lequel un mince filet d'eau assure un glissement du passager avec de faibles frottements. Il en existe de diverses formes, et cette première partie propose d'étudier leur dimensionnement.

On s'intéresse à un toboggan rectiligne, comme celui de la figure 3. La différence de hauteur entre le point de départ et le point d'arrivée est notée h, et le passager démarre en haut (au point A) avec une vitesse initiale nulle. On note g l'intensité de la pesanteur et m la masse du passager. On note v_B la vitesse du passager à l'arrivée (au point B).

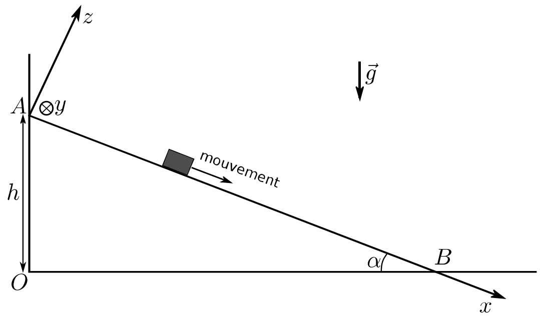


Figure 3 – Gauche : photographie du toboggan "le géant" du parc de Wavelsland. Pour ce toboggan, qui est le plus haut de France, $h = 33$ m et $\alpha \simeq 45°$. Droite : modélisation retenue pour l'étude du toboggan.

Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

Q1. En utilisant une approche énergétique, exprimer la vitesse atteinte au point B par le passager, en fonction de h et de g.

On admet que l'application numérique donne $v_B = 92$ km/h.

Q2. Ce résultat dépend-il de la forme du toboggan, à h constant ?

On prend maintenant en compte les frottements. On utilisera le repère cartésien indiqué sur la figure 3 (droite), avec $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ les vecteurs unitaires de la base. Le mouvement a lieu selon $\overrightarrow{e_x}$ seulement. La résultante exercée par le toboggan sur le passager s'écrit : $\overrightarrow{R} = N\overrightarrow{e_z} - T\overrightarrow{e_x}$, où $T > 0$ représente les frottements.
On utilise la loi de Coulomb : tout au long du mouvement, on a la relation $T = \mu \times N$ avec μ une constante positive appelée coefficient de frottement.
On suppose l'inclinaison du toboggan suffisante pour qu'il y ait mouvement.

Q3. À l'aide d'un théorème énergétique, établir l'expression de la vitesse atteinte par le passager en B, en fonction de μ, h, g et de l'angle α.

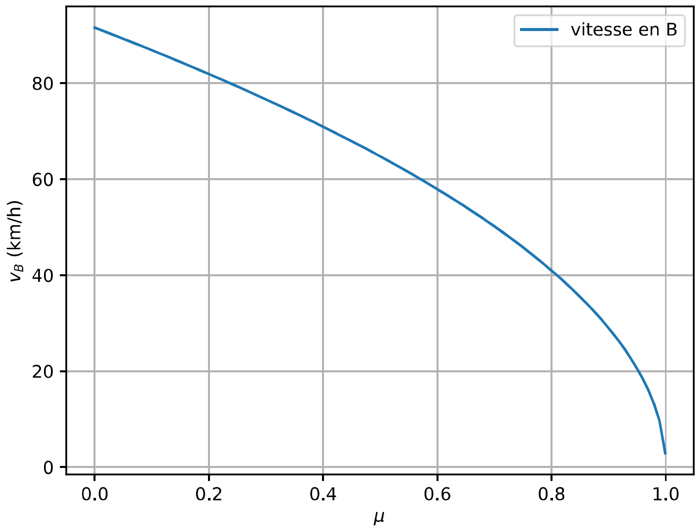


FIGURE 4 – Tracé de l'expression de v_B obtenue dans l'énoncé en fonction du coefficient de frottement μ, pour $\alpha = 45°$.

Q4. La figure 4 montre un tracé de l'expression précédente de v_B en fonction de μ. La direction du parc d'attraction indique que la vitesse maximale atteinte dans son toboggan est de 80 km/h. En déduire une estimation de la valeur du coefficient de frottement passager-toboggan.

En bas du toboggan se trouve une longue piste horizontale, dans laquelle le passager va ralentir jusqu'à atteindre une vitesse nulle. On souhaite dimensionner la longueur de cette piste.

Q5. À l'aide des données précédentes et d'un raisonnement énergétique, indiquer quelle doit être la longueur L de la piste. On attend une expression et une valeur numérique.

Partie II Étude d'un virage *(Durée ~ 40 min)*

On s'intéresse maintenant à un toboggan possédant un virage. Il est d'abord nécessaire d'établir quelques résultats préliminaires.

Partie II.1 Préliminaire : Étude des oscillations dans une cuvette

Cette sous-partie est indépendante du reste. On considère une masse m (point M) astreinte à glisser dans une cuvette de rayon a. Le mouvement a lieu dans le plan Oxy de la figure 5. On néglige tout frottement. On note $\vec{g}$ le vecteur pesanteur et g sa norme. On utilise les coordonnées polaires représentées sur la figure 5, avec les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

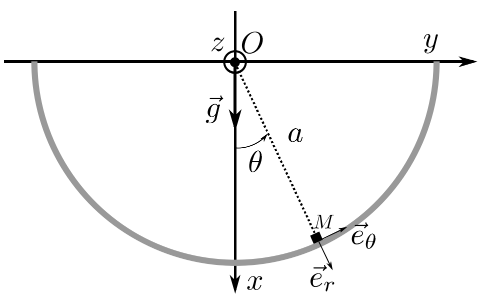


FIGURE 5 – Le point M glisse sans frottement le long d'un support cylindrique (arc de cercle grisé). Il n'y a pas de mouvement selon Oz.

Q6. En utilisant un théorème énergétique approprié, montrer que θ vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\sin(\theta) = 0$$

Q7. Proposer une approximation qui permet de résoudre cette équation.
Sous cette hypothèse, résoudre l'équation. On supposera qu'initialement $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

Q8. Tracer l'allure de la solution $\theta(t)$. On fera apparaître les valeurs maximales et minimales atteintes.

Q9. Toujours sous l'hypothèse précédente, donner l'expression de la période des oscillations en fonction de a et de g.

Partie II.2 Retour au cas du virage dans le toboggan

On étudie un cas où le passager du toboggan arrive avec une vitesse v_0 à l'entrée d'un virage de rayon R_0. Le toboggan a une forme de gouttière, et l'effet du virage va être de faire monter le passager le long de la gouttière. La question est de savoir jusqu'où il va monter : il faut en effet dimensionner la gouttière pour que le passager ne soit pas éjecté !

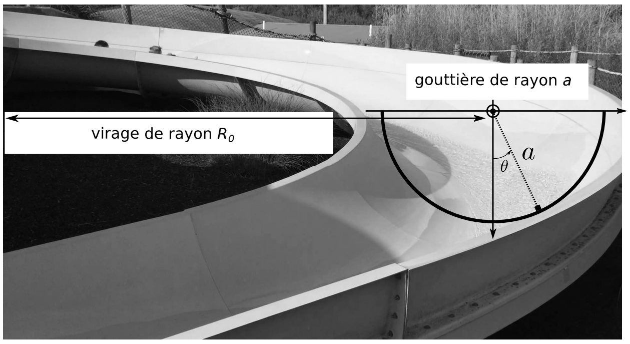
On suppose le virage horizontal. On repère par θ la position angulaire du passager dans un plan Oxy représenté figure 6. On **se place dans l'approximation où ce plan Oxy, qui se déplace avec le passager, le fait à une vitesse v_0 qui reste constante.**

Les informations importantes pour la résolution du problème sont les suivantes :

— Il est possible de mener l'étude dans le référentiel lié au plan Oxy (figure 6, droite), en mouvement dans le référentiel terrestre.

— Le référentiel dans lequel le plan Oxy est fixe n'est pas galiléen. L'étude peut être menée dans ce référentiel en ajoutant au bilan des forces qui s'exercent sur le passager une force supplémentaire qui s'écrit $\overrightarrow{F_{ie}} = \dfrac{mv_0^2}{R_0}\overrightarrow{e_y}$, appelée force d'inertie d'entraînement.

— **On néglige tout frottement dans cette partie**.



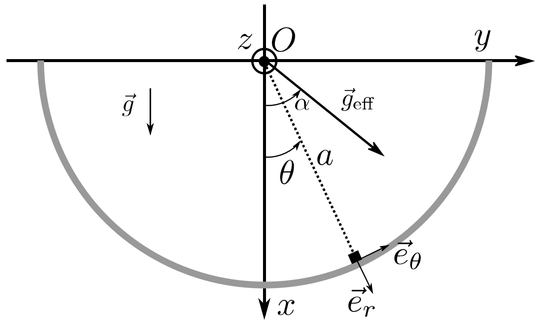


FIGURE 6 – Gauche : photographie d'un virage. Droite : repère dans le plan de la gouttière.

Q10. Montrer que la somme des forces qui s'exercent sur le passager s'écrit $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{N} = m\overrightarrow{g}_{\text{eff}} + \overrightarrow{N}$, avec $\overrightarrow{g}_{\text{eff}}$ une pesanteur "effective" dont on donnera la norme en fonction de g, R_0 et v_0.

Q11. Donner également l'expression de l'angle α entre $\overrightarrow{g}_{\text{eff}}$ et l'axe Ox, en fonction de g, R_0 et v_0.

Par exemple, si $v_0 = 25$ km/h et $R_0 = 4$ m, on obtient $\|\overrightarrow{g}_{\text{eff}}\| = 15,5$ m/s^2 et $\alpha = 51°$. On se place dans ce cas dans la suite.

Q12. Le passager entre dans le virage avec $\theta(0) = 0$.

En utilisant une analogie avec ce qui a été vu dans la Partie II.1, indiquer entre quelles valeurs extrêmes va varier θ dans la suite du mouvement. Il n'est pas nécessaire de faire de calculs compliqués pour répondre à cette question.

Conclure alors sur le dimensionnement de la gouttière dans ce cas ci.

Partie III Toboggan hélicoïdal *(Durée ∼ 35 min)*

On étudie le toboggan représenté sur la figure ci-dessous :

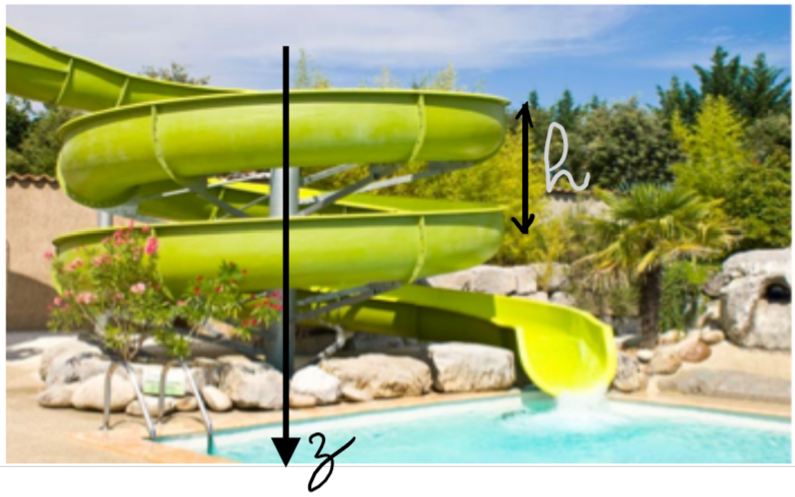


FIGURE 7 – Toboggan hélicoïdal

Pour l'étude du mouvement, on propose le modèle suivant :

— L'enfant de masse $m = 50$ kg, est assimilé à un point matériel M.

— Le toboggan, de forme hélicoïdale, débute en A et se termine en B après 3 tours exactement ; il s'enroule sur un cylindre vertical de rayon $R = 5$ m.

— **On néglige tout frottement.**

— À chaque tour complet, l'enfant descend d'une hauteur h .

Le point M, initialement immobile en A, est repéré par ses coordonnées cylindriques z étant la cote du point M sur l'axe de symétrie de la trajectoire, choisi vertical descendant.

L'origine O de l'axe Oz est choisie à l'intersection de cet axe et du plan horizontal passant par A.

Q13. Quelles sont les coordonnées cylindriques d'un point M ?
Faire un schéma définissant les coordonnées cylindriques, et indiquer dessus la base cylindrique.

Les équations de la trajectoire sont données par les relations : $r(\theta) = R$ et $z(\theta) = \gamma \cdot \theta$ où γ est une constante positive.

Q14. Exprimer h en fonction de γ.

Q15. Déterminer la vitesse v_s de l'enfant en sortie de toboggan en fonction de g et h.

Q16. Exprimer le vecteur position et le vecteur vitesse du point M en fonction de R, z et de leurs dérivées temporelles $\dot{\theta}$, $\dot{z}$.

Q17. Montrer que l'énergie mécanique de l'enfant peut se mettre sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}\alpha\dot{z}^2 - \beta z$, où α et β sont des constantes à expliciter en fonction des données.

Q18. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$ et en déduire la durée T de la descente en fonction de α, β et h.

Q19. Si on prend en compte une force de frottement de norme constante F, exprimer l'énergie perdue par l'enfant au cours de la descente, en fonction de F, R et γ.

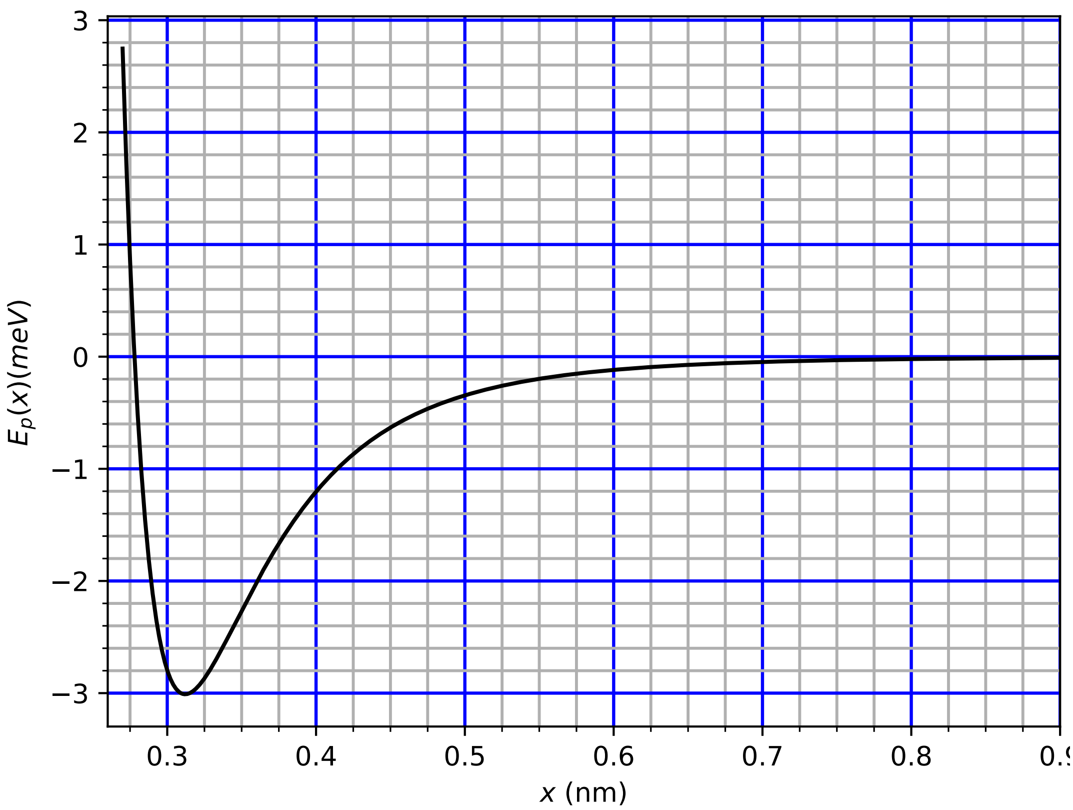
Exercice n°4 Interaction entre des atomes de Néon *(Durée ∼ 45 min)*

On considère un atome de Néon de masse m interagissant avec un autre atome de Néon supposé fixe dans un référentiel galiléen. Le problème est vu de façon unidimensionnelle selon x, l'atome fixe étant situé en l'origine O.

L'énergie potentielle correspondant à la force d'interaction $\overrightarrow{F}$ qui s'exerce entre les deux atomes est modélisée par le potentiel de Lennard-Jones :

$$\mathscr{E}_P(x) = 4\mathscr{E}_0 \left[\left(\frac{d}{x}\right)^{12} - \left(\frac{d}{x}\right)^{6} \right]$$

où x désigne la distance intermoléculaire et σ est une distance caractéristique. L'énergie potentielle est prise nulle lorsque $x \to \infty$, c'est-à-dire lorsque les deux atomes sont infiniment éloignés.
On donne le graphe représentatif de $\mathscr{E}_p(x)$.



Q1. Discuter les différents mouvements possibles à l'aide du graphe de la fonction $\mathscr{E}_p(x)$ selon si l'énergie mécanique de l'atome de néon est positive ou négative. *La réponse doit être justifiée.* **Le graphe du document réponse devra être complété et rendu avec votre copie.**

Q2. Établir l'expression de la distance d'équilibre x_0 entre les deux noyaux, en fonction de d. Est-elle une position stable ? Que représente la quantité $\mathscr{E}_0$?

Q3. En exploitant le graphe et la question précédente, déterminer les valeurs de d et $\mathscr{E}_0$.

Q4. Déterminer l'expression de la force d'interaction entre les deux atomes $\overrightarrow{F} = F_x(x)\overrightarrow{u_x}$.

Q5. Montrer que, au voisinage de la position d'équilibre, $F_x(x)$ peut se mettre sous la forme $F(x_0 + \varepsilon) = -k\varepsilon$ avec k une constante et $\varepsilon \ll x_0$.

On mettra k sous la forme $k = \dfrac{\tilde{k}}{x_0^2}$ où $\tilde{k}$ sera exprimé en fonction de E_0.

Q6. Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage de la position d'équilibre stable. Commenter.

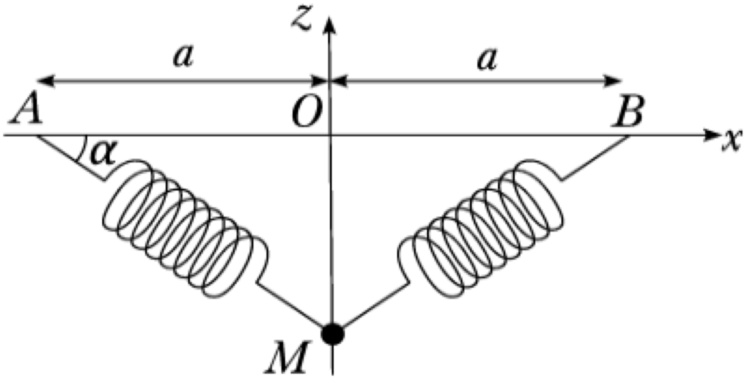
Q7. Exprimer alors la période T_0 des petites oscillations de m autour de la position d'équilibre, en fonction de m, d et $\mathscr{E}_0$.

Exercice n°5 Deux résolutions de problème pour vous occuper

Cet exercice ne doit être abordé que si TOUT LE RESTE du sujet a été fait.

Partie I Saut à ski à l'élastique

Une nouvelle discipline est apparue récemment : le saut à ski à l'élastique. On s'intéresse à un skieur attaché à deux élastiques réalisant un saut dans le vide. Les élastiques seront modélisés par des ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide négligeable dont les points d'attache A et B sont distants de $2a$ et le skieur sera modélisé par un point matériel de masse m.



Déterminer la (les) position(s) d'équilibre z_{eq} du skieur et étudier sa (leur) stabilité.

Partie II Looping

Une petite bille est posée à une hauteur h du sol sur une rampe de lancement inclinée qui débouche sur un looping (guide circulaire dans le plan vertical.

Déterminer la hauteur minimale à laquelle il faut placer la petite bille pour qu'elle puisse effectuer un tour complet de looping sans décoller du guide circulaire.