

? Pour le LUNDI 23 février 2026

Devoir Maison n°12 – Mécanique



Remarque – Le travail des DM

- Le cours doit être ouvert sous les yeux, et la rédaction identique à celle du cours.
- Si vous rencontrez des difficultés, posez-moi des questions, y compris le soir, le week-end ou durant les vacances).

Travail à faire :

- ♫ si vous êtes en difficulté, ou avez un retard important dans le travail du cours : exercices n°1 et 3
- ♫ ♫ si vous n'êtes pas en difficulté, : exercices n°1, 2 et 3.
- ♫ ♫ ♫ si vous êtes à l'aise : exercices n°1, 2 et 4.

Exercice n°1 Était-elle il en infraction ?

⚠ Remarque – Comment aborder cet exercice ?

En respectant l'ordre des étapes ci-dessous :

1. Apprendre parfaitement les parties I, II et IV du chapitre n°12.
2. Refaire les exercices n°3, n°6, n°7 du chapitre n°12.
3. Traiter cet exercice, avec le cours sous les yeux.

Les causes d'accidents sont nombreuses et variées. Afin d'incriminer ou non un éventuel excès de vitesse * lors de la sortie de route liée à un dépassement incontrôlé et décrite sur la photographie (figure 1) , on vous demande de déterminer, à l'aide d'une méthode énergétique, l'expression littérale, puis numérique de la vitesse du véhicule en début de la phase de freinage.

Dans cet exercice, il vous est demandé de faire preuve d'autonomie. Toute démarche même partielle de résolution sera prise en compte, pourvu qu'elle soit cohérente. Toutes données pertinentes et nécessaires à la résolution de cette question pourront être introduites par le candidat.



FIGURE 1 – Sortie de route

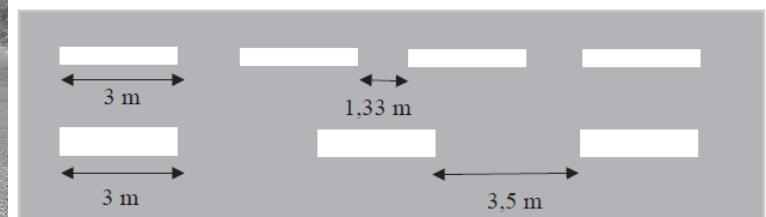


FIGURE 2 – Législation de marquage au sol

Les éléments légaux de marquage au sol sont représentés sur la figure 2.

Par temps sec, le coefficient de frottement solide est $f = 0,8$.

*. La limite est de 80 km/h en Drôme sur une telle route.

Exercice n°2 Molécule de CO

⚠ Remarque – Comment aborder cet exercice ?

En respectant l'ordre des étapes ci-dessous :

1. Travailler parfaitement la partie V du chapitre n°12.
2. Refaire les exercices n°9, n°10, n°12 du chapitre n°12.
3. Relire votre copie, le corrigé, mes commentaires,... du DS n°7 - exercice sur le Néon.
4. Traiter cet exercice, avec le cours sous les yeux.

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux masses ponctuelles m_C pour l'atome de carbone et m pour l'atome d'oxygène. Pour simplifier, on considérera que **l'atome de carbone est fixe dans le référentiel du laboratoire, galiléen, et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes le long d'un axe (Ox).**

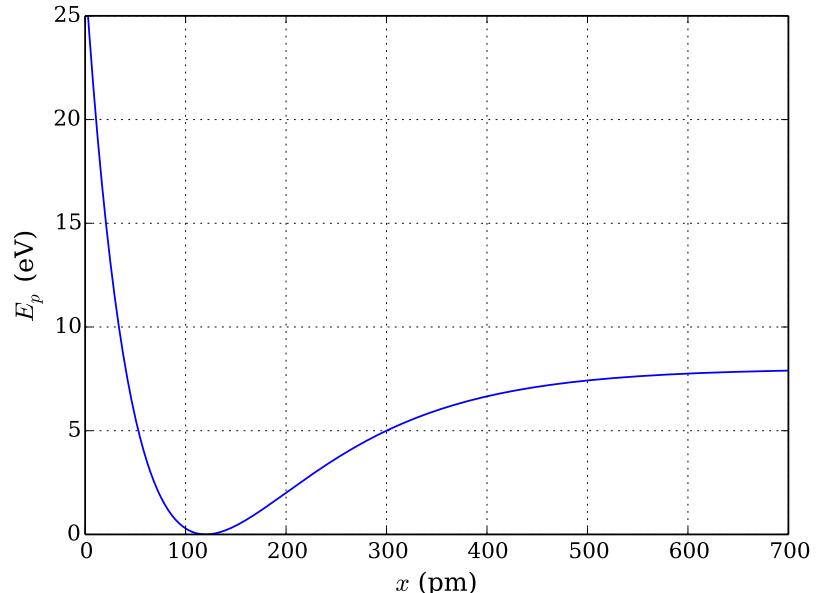
L'attraction gravitationnelle est négligeable à cette échelle.

L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique :

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_0 \left(1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right)^2$$

où x est la distance des noyaux des deux atomes et où \mathcal{E}_0 , β et x_0 sont des constantes positives.

On donne le graphe de $\mathcal{E}_p(x)$ ci-contre.



- Déterminer la limite de \mathcal{E}_p en l'infini. En déduire, grâce au graphique, la valeur de \mathcal{E}_0 , en eV puis en joules.
- Déterminer l'expression de $\mathcal{E}_p(x_0)$. En déduire, grâce au graphique, la valeur de x_0 . Comment appelle-t-on la position x_0 ?
- Que peut-on dire de l'énergie mécanique au cours du mouvement ?
Quelle inégalité vérifient l'énergie mécanique et l'énergie potentielle ?
- À partir de l'analyse du graphe et de la question précédente, analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est inférieure à \mathcal{E}_0 . Compléter le graphe et décrire précisément les positions accessibles à l'atome d'oxygène.
- Analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est supérieure à \mathcal{E}_0 . Compléter le graphe et décrire précisément les positions accessibles à l'atome d'oxygène.

On s'intéresse au mouvement de vibration de la molécule de CO au voisinage de x_0 .

On pourra poser $\varepsilon = \beta(x - x_0)$, et on rappelle qu'au premier ordre : $e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon$.

- En effectuant un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle d'interaction au voisinage de x_0 (pour $\varepsilon \ll 1$), montrer qu'elle s'écrit $\mathcal{E}_p(x) \approx \mathcal{E}_0 \beta^2 (x - x_0)^2$.
- À l'aide du théorème de la puissance mécanique, établir l'équation du mouvement au voisinage de la position d'équilibre. Comment appelle-t-on un système répondant à une telle équation différentielle ?
- En déduire l'expression de la fréquence des petites oscillations de la molécule de monoxyde de carbone autour de sa position d'équilibre.
Faire l'application numérique, avec $\beta = 9.10^{-3} \text{ pm}^{-1}$; $M(O) = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Exercice n°3 Un accélérateur de particule : le LHC ()

⚠ Remarque – Comment aborder cet exercice ?

En respectant l'ordre des étapes ci-dessous :

1. Apprendre parfaitement le chapitre n°13.
2. Refaire les exercices n°1, 2, 4, 6 et 7 du chapitre n°13.
3. Traiter cet exercice, avec le cours sous les yeux.

Le Grand Collisionneur de Hadrons (Large Hadron Collider ; LHC) est entré en fonctionnement en 2008. Il est situé dans un anneau de **27 kilomètres de circonference** et enterré à 100 m sous terre à la frontière franco-suisse, près de Genève. Le LHC est désormais le plus puissant des accélérateurs de particules au monde.

Dans les accélérateurs de particules, des protons (ou des ions) de très haute énergie circulant dans deux faisceaux tournant à contre-sens se choquent les uns contre les autres, dans le but de rechercher des indices de la supersymétrie, de la matière noire et de l'origine de la masse des particules élémentaires. Les faisceaux se composent de paquets contenant des centaines de milliards de protons chacun.

Voyageant quasiment à la vitesse de la lumière, ils sont injectés, accélérés, et maintenus en circulation pendant des heures, guidés par des milliers d'aimants supraconducteurs puissants.

L'**énergie cinétique des protons (7 TeV)** est transformée au moment du choc en une myriade de particules exotiques, que les détecteurs observent avec attention. Le 04 juillet 2012, les chercheurs ont annoncé l'observation du boson de Higgs dont l'existence était prédicta par le modèle standard.

Les aimants utilisés, de 15 m de long et d'environ 35 tonnes, produisent en leur cœur un **champ magnétique environ 200 000 fois plus grand que le champ magnétique terrestre**. Le LHC en nécessite 1232.

Aide aux calculs

$\frac{1,6}{1,67} \approx 1$	$\frac{7}{9} \approx 0,8$	$\frac{24}{27} \approx 0,9$
$\sqrt{10^5 + 9 \cdot 10^6} \approx 3,0 \cdot 10^3$	Si $x \ll 1$, alors $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$	$0,9\pi \approx 2,8$

Dans cet exercice, nous étudions la trajectoire des protons dans le Large Hadron Collider. Le LHC est formé d'une succession d'accélérateurs, d'énergies toujours croissantes. Chaque accélérateur injecte un faisceau dans la machine suivante, qui prend le relais pour porter ce faisceau à une énergie encore plus élevée, et ainsi de suite. Tous les accélérateurs de particules sont composés de la même façon : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions.

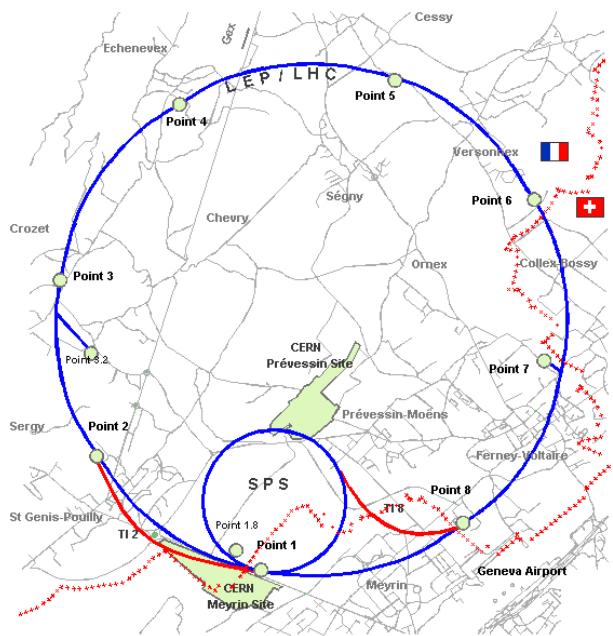


FIGURE 3 – Site du CERN, dans les environs de Genève. Le grand cercle représente la position du tunnel du LHC.

Partie A Particule dans un champ électrique constant et uniforme

- Q1. Quelle est la force que subit un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E} ?
- Q2. Montrer que l'on peut négliger le poids du proton devant la force générée par un champ $E = 100 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$.

Q3. En utilisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à un proton, exprimer le vecteur accélération du proton dans une zone de l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E} .
Que peut-on dire du vecteur accélération ?

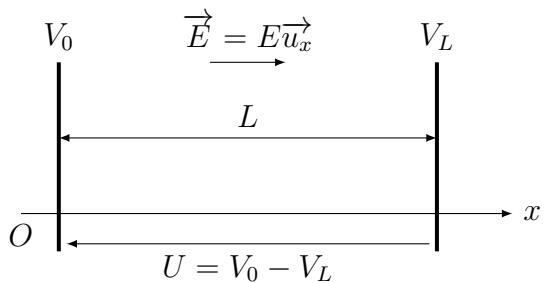


FIGURE 4 – Schéma du dispositif d'accélération des protons

Q4. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle d'une particule chargée de charge q en fonction du potentiel électrostatique V .

On admet qu'en considérant que le potentiel V_0 du plan $x = 0$ est nul, le potentiel du plan $x = L$ s'écrit $V_L = -EL$.

Q5. En supposant que le proton entre dans la zone de champ avec une énergie cinétique négligeable, exprimer l'énergie cinétique du proton sortant de la zone d'accélération, en fonction de la tension U .

Partie B Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

L'accélérateur linéaire 2 (Linac 2) constitue le point de départ des protons utilisés dans les expériences menées au CERN.

Les protons passent dans une série de conducteurs métalliques coaxiaux. On considère que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs (représenté par les rectangles ci-dessous). Ces protons sont accélérés par une tension maximale U_c toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. Les protons sont injectés en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ parallèle à l'axe de l'accélérateur et générée par une tension pré-accélératrice U_0 .

Source de protons
pré-accélérés par
une tension U_0

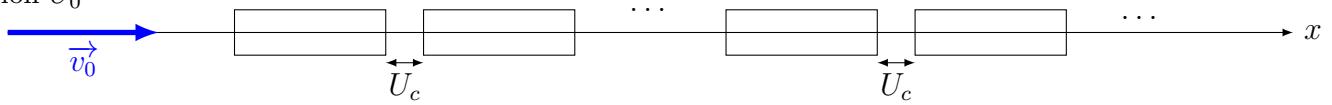


FIGURE 5 – Le linac 2

Q6. Exprimer l'énergie cinétique du proton, puis sa vitesse v_0 en O , en fonction de U_0 , e et m_p . (U_0 est la tension qui accélère les protons à partir d'une vitesse nulle, pour les faire atteindre une vitesse v_0).

Q7. Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins (par une différence de potentiel U_c) ?

Q8. Exprimer l'énergie cinétique du proton à la sortie du n -ième tube en fonction de U_c et U_0 .

Q9. Calculer la valeur de la vitesse des protons à la sortie du 10^e tube pour $U_0 = 200$ kV, $U_c = 2000$ kV.

Partie C Du linac 2 au synchrotron à protons (PS)

Un élément fondamental du complexe accélérateur est le synchrotron à protons (PS).

Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le PS a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC.

On considère un proton injecté en A dans le synchrotron où règne un champ magnétique statique et uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

À $t = 0$ sa vitesse \vec{v}_0 est perpendiculaire au champ magnétique conformément à la figure 6.

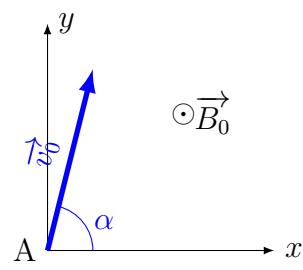


FIGURE 6 – Vitesse du proton dans le champ magnétique

Q10. Donner l'expression vectorielle de la force que subit le proton soumis au champ magnétique \vec{B}_0 .

Q11. Reproduire la figure 6 sur votre copie afin de représenter la force magnétique subie par le proton en A. Exprimer la norme de cette force.

Q12. En proposant des valeurs pour B_0 et v_0 (*on exploitera les données numériques fournies dans le texte en début d'exercice*), calculer un ordre de grandeur de la force précédente et conclure à l'action du poids sur le mouvement du proton.

Q13. Montrer que la puissance de cette force est nulle à chaque instant. En déduire une caractéristique du mouvement du proton.

Le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétique. On admet que la trajectoire du proton est plan, dans le plan perpendiculaire à \vec{B}_0 .

Q14. Définir la base de Frenet et exprimer, dans le cas général, le vecteur vitesse et le vecteur accélération. Faire un schéma pour une trajectoire plane quelconque, en représentant la base et les deux vecteurs cinématiques.

Q15. Utiliser le principe fondamental de la dynamique pour justifier que le mouvement est circulaire et en établir le rayon de la trajectoire en fonction de m_p , B_0 , e et v_0 .

Q16. Représenter l'allure de la trajectoire suivie par les protons sur le schéma de Q11. *On fera attention au sens du mouvement !*

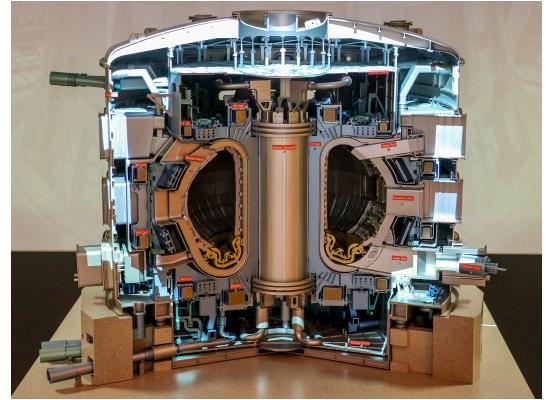
Exercice n°4 Mouvement de particules chargées dans un tokamak

Le réacteur thermonucléaire expérimental international, ou ITER (acronyme de l'anglais International thermonuclear experimental reactor, également mot latin signifiant « chemin » ou « voie »), est un projet international de réacteur nucléaire de recherche civil à fusion nucléaire de type tokamak, situé à proximité immédiate du centre d'études nucléaires de Cadarache à Saint-Paul-lès-Durance (Bouches-du-Rhône, France). Le projet de recherche s'inscrit dans une démarche à long terme visant à l'industrialisation de la fusion nucléaire. Il associe trente-cinq pays : ceux de l'Union européenne ainsi que l'Inde, le Japon, la Chine, la Russie, la Corée du Sud et les États-Unis, ainsi que la Suisse et le Royaume-Uni en tant qu'États associés à la Communauté européenne de l'énergie atomique.

ITER est le plus grand projet scientifique mondial actuel. Par sa complexité, son ambition et son budget hors norme.

Le projet a pour objectif de démontrer que la fusion peut être utilisée comme source d'énergie à grande échelle, non émettrice de CO₂, pour produire de l'électricité.

Le réacteur à fusion thermonucléaire ITER a été conçu pour produire un plasma de fusion équivalent à 500 MW de puissance thermique pendant des durées de 400 à 600 secondes, pour une puissance thermique injectée dans le plasma de 50 MW, soit une multiplication par dix de la puissance thermique. La machine vise par ailleurs à démontrer la faisabilité d'une réaction auto-entretenue, ce qui n'a pas encore été réalisé dans un réacteur de fusion. L'électricité totale consommée par le réacteur et les installations se situera entre 110 et 620 MW de pointe pendant trente secondes. Le réacteur est conçu uniquement pour produire un plasma de fusion, et la chaleur émise par la réaction de fusion sera évacuée dans l'atmosphère sans générer d'électricité.



Pour obtenir la réaction de fusion thermonucléaire contrôlée deutérium-tritium, le plasma doit être confiné. Étant constitué de particules chargées, il subit l'action d'un champ magnétique.

Données : perméabilité absolue du vide

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

charge élémentaire

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

masse d'un électron

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

masse d'un noyau de deutérium D⁺

$$m_D = 2 \times 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

conversion d'énergie

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

grand rayon du tore

$$R_C = 6,2 \text{ m}$$

petit rayon du tore

$$a_T = 2,0 \text{ m}$$

Partie A Mouvement de particules chargées dans un champ magnétique

On commence par étudier le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme.

Le référentiel d'étude, supposé galiléen, est muni d'un repère ($O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$). Le champ magnétique \vec{B} est uniforme, stationnaire et dirigé selon Oz : $\vec{B} = B\vec{u}_z$ où $B > 0$.

La particule étudiée, de masse m , porte une charge $q > 0$.

On pourra introduire, dans la suite du problème, la pulsation cyclotron $\omega_0 = \frac{qB}{m}$.

Tous les frottements seront négligés.

Q1. En proposant des ordres de grandeur raisonnables, montrer que l'on peut négliger le poids de la particule.

Q2. Justifier que le mouvement est uniforme dans le champ magnétique.

Q3. La particule étudiée se trouve initialement en O avec une vitesse initiale colinéaire à \vec{B} : $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z$ avec $v_0 > 0$. Quelle est la nature du mouvement de la particule chargée dans ce cas ?

La particule étudiée a maintenant la vitesse initiale : $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_y$ avec $v_0 > 0$ perpendiculaire à \vec{B} .

Q4. Déterminer les expressions de $\frac{dv_x}{dt}$, $\frac{dv_y}{dt}$ et $\frac{dv_z}{dt}$ en fonction de v_x , v_y et ω_0 .

Q5. En déduire que v_x et v_y vérifient les équations différentielles :
$$\begin{cases} \frac{d^2v_x}{dt^2} + \omega_0^2 v_x = 0 \\ \frac{d^2v_y}{dt^2} + \omega_0^2 v_y = 0 \end{cases}$$

Q6. Résoudre complètement ces équations et trouver les expressions de v_x et v_y en fonction du temps.

Indication : Pour les conditions initiales sur les dérivées, on utilisera les équations établies Q4 exprimées à $t = 0$.

Q7. Intégrer les expressions précédentes et déterminer les coordonnées x , y et z de la particule en fonction du temps.

On donne la position initiale de la particule :
$$\begin{cases} x_0 = -\frac{v_0}{\omega_0} \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

Q8. Montrer que la trajectoire de la particule est un cercle contenu dans le plan Oxy dont on précisera les coordonnées du centre et le rayon, que l'on notera ρ_L (appelé rayon de Larmor).

Q9. Faire un schéma de la trajectoire dans le plan Oxy montrant clairement le sens du mouvement de la particule, la position initiale, le vecteur vitesse initial.

Q10. On considère maintenant une particule dont la vitesse initiale est : $\vec{v}_0 = \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = v_{\perp} \\ v_z = v_{\parallel} \end{cases}$, où v_{\perp} et v_{\parallel} sont des grandeurs positives.

Justifier que la trajectoire de la particule est une hélice dont on exprimera le pas h (=la distance parcourue selon l'axe (Oz) en un tour complet de l'axe) en fonction de v_{\parallel} et ω_0 .

Partie B Trajectoire dans le tokamak (Partie plus difficile)

L'étude précédente a montré que, dans un champ magnétique uniforme, les particules s'enroulaient hélicoïdalement autour des lignes de champ magnétique. Le mécanisme de confinement retenu pour ITER est un confinement magnétique dans une structure toroïdale (en forme de tore) appelée tokamak. L'idée générale du tokamak est de confiner les particules chargées du plasma en les guidant par des lignes de champ magnétique fermées.

Pour piéger des particules chargées soumises à un champ magnétique, il suffit de refermer ses lignes de champ sur elles-mêmes : on obtient ainsi une configuration de champ magnétique toroïdal^a.

On donne l'expression du champ magnétique dans le tokamak en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}_T = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{u}_{\theta}$$

où N est le nombre de spires bobinées sur le tore.

a. Pour visualiser un tore, imaginez une bouée de piscine !

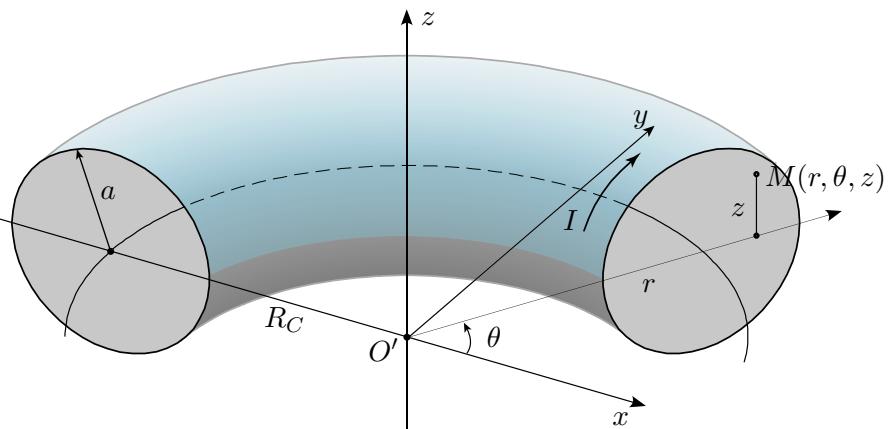


FIGURE 7

Dans ce dispositif, les particules chargées constituant le plasma sont des noyaux de Deutérium D^+ et des électrons.

Les résultats de la **Partie A** ne sont pas directement transposables pour décrire le comportement des particules chargées du plasma, soumises au champ magnétique \vec{B}_T créé, en effet :

- la norme de \vec{B}_T n'est plus uniforme mais dépend de r ,
- les lignes de champ (=courbes tangentes au champ magnétique en chaque endroit) de \vec{B}_T ne sont pas rectilignes mais circulaires.

Cependant, on supposera, en première approximation, qu'une particule chargée effectue toujours un mouvement de révolution autour du son centre guide G et que G se déplace, comme précédemment, suivant les lignes de champ magnétique, maintenant courbées.

On considère un électron ou un noyau D^+ , soumis à \vec{B}_T , tournant autour de leur centre guide G , lorsque G suit la ligne de champ magnétique \vec{B}_T au centre du plasma, en $r = R_C$.

Données :

- $\frac{1}{2}m_e v_{\perp e}^2 = \frac{1}{2}m_D v_{\perp D}^2 = 4\text{keV}$ et $v_{\parallel}^2 = \frac{v_{\perp}^2}{2}$
- $B(R_C) = 4,2 \text{ T}$
- $\frac{12,8}{9,1} \approx 1,6$; $\frac{12,8}{3,4} \approx 4$; $\sqrt{10} \approx 3,2$

Q11. Comparer numériquement les rayons de courbure des trajectoires de ces particules, ρ_L , dans leur mouvement autour du centre guide G par rapport au rayon R_C de la trajectoire de G .

Q12. Calculer numériquement la variation relative $\frac{\Delta B_T}{B_T(R_C)} = \frac{|B_T(R_C + \rho_L) - B_T(R_C)|}{B_T(R_C)}$ de l'amplitude du champ \vec{B}_T sur l'étendue de la trajectoire de ces particules, en fonction de R_C et ρ_L .

Q13. Commenter ces résultats de façon à justifier les approximations exprimées en introduction de cette partie.

L'expérience montre que la non-uniformité du champ \vec{B}_T ainsi que la courbure de ses lignes de champ entraînent une légère dérive transverse de la particule chargée. On admet alors, que pour une particule chargée se déplaçant aux alentours du centre du plasma, en $r = R_C$, la vitesse de dérive de son centre guide G prend la forme :

$$\vec{v}_d(G) = \varepsilon \frac{1}{R_C \omega_0} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varepsilon = +1 \text{ pour un noyau } D^+ \\ \varepsilon = -1 \text{ pour un électron} \end{cases}$$

Q14. Représenter schématiquement l'évolution de la trajectoire d'un noyau D^+ subissant cette dérive lorsqu'il est soumis au champ magnétique \vec{B}_T . Même question pour un électron.

Q15. Application numérique : calculer $\|\vec{v}_d(G)\|$ pour un électron et pour un noyau D^+ se déplaçant autour du centre du plasma, en $r = R_C$.

En déduire le temps t_d mis par une particule chargée, partant du centre du plasma pour atteindre la paroi matérielle du tore, en $\rho = a_T$.

Commentaires.