

## Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)

### TD n°16 Théorème du moment cinétique pour le point matériel

| Exercice n°                                                                                                | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|
| Capacités                                                                                                  |   |   |   |   |   |   |
| Maîtriser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.                                            |   |   |   |   |   |   |
| Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.                |   |   |   |   |   |   |
| Utiliser le théorème scalaire ou le théorème en un point fixe du moment cinétique en référentiel galiléen. |   |   |   |   |   |   |
| Reconnaître les cas de conservation du moment cinétique.                                                   |   |   |   |   |   |   |

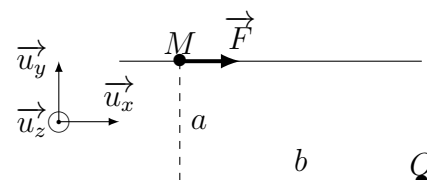
### Parcours possibles

- 🎵 Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, n°2, n°3 (Q1 à Q4 uniquement).
- 🎵 🎵 Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°1, n°3.
- 🎵 🎵 🎵 Si vous êtes à l'aise : exercices n°3, 4, 5 et 6.

### I Exercices d'application directe du cours

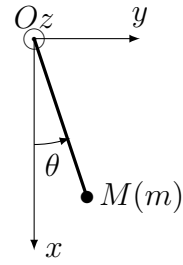
#### Exercice n°1 QCM 🎵

- Q1. Les moments par rapport à un point sont des vecteurs. ☐ Vrai ☐ Faux
- Q2. Les moments par rapport à un axe sont des vecteurs. ☐ Vrai ☐ Faux
- Q3. Le moment d'une force a les mêmes dimensions qu'une énergie. ☐ Vrai ☐ Faux
- Q4. Le bras de levier est la distance entre le point d'application d'une force et l'axe considéré.  
☐ Vrai ☐ Faux
- Q5. À quelle autre(s) grandeur(s) physique(s) rencontrée(s) dans le cours de mécanique est homogène le moment d'une force ? ☐ vitesse ☐ énergie ☐ puissance ☐ travail
- Q6. Le moment cinétique par rapport à  $O$  d'un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , de vitesse  $\vec{v}$  et subissant une force  $\vec{F}$  :
- ☐ s'écrit  $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$  ;
  - ☐ s'écrit  $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$  ;
  - ☐ est nul si sa trajectoire est une droite passant par le point  $O$ .
- Q7. Une force dont la droite d'action est normale à un axe  $(\Delta)$  est appliquée à un point matériel. Son moment par rapport à  $(\Delta)$  :
- ☐ a la même dimension que le travail d'une force ;
  - ☐ permet de savoir si la force modifie la vitesse du point matériel ;
  - ☐ a un module inversement proportionnel à son bras de levier par rapport à  $(\Delta)$ .
- Q8. Le moment  $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$  de la force  $\vec{F}$  d'intensité  $F$  par rapport au point  $O$  est :
- ☐  $Fa\vec{u}_z$    ☐  $-Fb\vec{u}_y$    ☐  $-Fb\vec{u}_z$    ☐  $-Fa\vec{u}_z$



## Exercice n°2 Exercice de cours : Pendule simple 🎵

On étudie le pendule simple : un point matériel  $M$  est accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur  $\ell$ . On note  $O$  le point d'attache du fil.



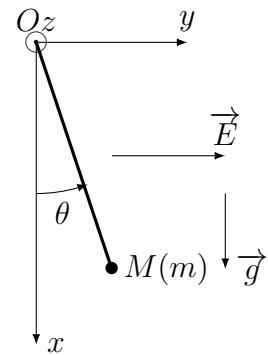
- Q1. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par  $\theta$  en utilisant le théorème du moment cinétique par rapport à  $O$ .
- Q2. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par  $\theta$  en utilisant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe  $Oz$ .
- Q3. La résoudre complètement, après linéarisation justifiée, si à  $t = 0$ ,  $\theta(0) = \theta_0 \ll 1$  rad et  $\dot{\theta}(0) = 0$ .

## Exercice n°3 Pendule électrostatique 🎵

Un pendule électrostatique est constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium et suspendue à une potence par un fil de masse négligeable. La boule est préalablement chargée avec une charge électrique  $Q = 2,3 \cdot 10^{-4}$  C. L'ensemble est placé entre deux plaques de cuivre planes et parallèles soumises à une différence de potentiel telle qu'elles génèrent un champ électrique uniforme  $\vec{E} = E\vec{u}_y$  avec  $E = 500$  V  $\cdot$  m $^{-1}$ .

La longueur du pendule est  $OM = R = 10$  cm et la masse de la boule assimilée à un point  $M$  est  $m = 20$  g.

L'accélération de la pesanteur est  $g = 9,8$  m  $\cdot$  s $^{-2}$ .



- Q1. Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur le pendule et les représenter sur le schéma.  
Exprimer le moment de ces forces par rapport à l'axe  $(Oz)$  en utilisant le bras de levier.
- Q2. Que peut-on dire de la somme des moments à l'équilibre ?
- Q3. Déterminer la position d'équilibre  $\theta_e$  du pendule.
- Q4. Appliquer le théorème du moment cinétique à  $M$  par rapport à l'axe  $(Oz)$ .

(Questions plus difficiles)

On écarte le pendule légèrement de sa position d'équilibre. On pose  $\varepsilon = \theta - \theta_e$ .

On rappelle que pour  $|\varepsilon| \ll \theta_e$ , on a  $\cos(\theta_e + \varepsilon) \approx \cos(\theta_e) - \varepsilon \sin(\theta_e)$  et  $\sin(\theta_e + \varepsilon) \approx \sin(\theta_e) + \varepsilon \cos(\theta_e)$ .

- Q5. 🎵 🎵 🎵 Établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des petites oscillations, vérifiée par  $\varepsilon$ .
- Q6. 🎵 En déduire l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  des oscillations puis calculer sa période propre  $T_0$ .

## II Exercices d'approfondissement

### Exercice n°4 Masse accrochée à une ficelle ♪ ♪ ♪

Le point  $M$  de masse  $m$  se déplace sans frottement sur un plan horizontal. Il est attaché à un fil inextensible, sans masse et de longueur  $\ell$ . Le fil passe par un trou pratiqué dans le plan horizontal en  $O$ . L'autre extrémité du fil est déplacée à la vitesse  $\vec{v} = -v_0 \vec{u}_z$ , l'axe  $Oz$  étant l'axe vertical ascendant.

Q1. Faire un schéma du dispositif.

Q2. Donner une relation entre la cote  $z$  de l'extrémité du fil et la distance  $\rho = OM$ . En déduire une relation entre les dérivées premières de  $z$  et de  $\rho$ .

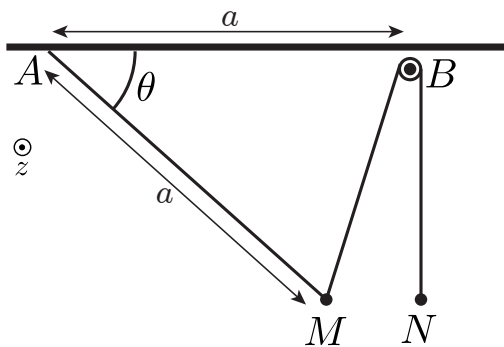
Q3. Montrer que le moment cinétique de  $M$  est constant.

Q4. Sachant que la masse est lancée avec une vitesse angulaire  $\omega_0$  à partir de la distance  $d$  du point  $O$ , déterminer  $\rho(t)$  et  $\omega(t)$ .

Q5. En déduire  $\theta(t)$  si  $\theta(0) = 0$ , puis  $\rho(\theta)$ . Tracer l'allure de la trajectoire de  $M$ .

### Exercice n°5 Équilibre ♪ ♪ ♪

Soit un fil inextensible et sans masse, fixé en  $A$  à un socle horizontal et passant en  $B$  sur une poulie parfaite, de très petites dimensions, avec  $AB = a$ . Sur le fil, en un point  $M$  tel que  $AM = a$ , est attachée une masse ponctuelle  $m$  et, au bout du fil, est aussi accrochée une masse  $m'$  en  $N$ . Le dispositif est placé verticalement dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$ .



Q1. Établir le bilan des forces qui s'exercent sur le point  $M$  et exprimer leurs moments en  $A$ .

Il y a trois forces, et le seul angle devant intervenir dans ces expressions sera l'angle  $\theta = \widehat{AB, AM}$ . On admettra que la norme de la force exercée par  $N$  sur  $M$  via le fil vaut  $m'g$ .

Q2. Trouver une relation vérifiée par l'angle  $\theta$  lorsque le système est à l'équilibre.

Q3. Trouver la solution de cette équation. On pourra utiliser la relation  $\cos(2u) = 2\cos^2(u) - 1$ . On discutera de la condition sur  $m$  et  $m'$  pour que la solution existe.

### Exercice n°6 Pendule conique ♪ ♪ ♪

Un point matériel  $M$  de masse  $m$  est suspendu à un fil inextensible de longueur  $\ell$  attaché en un point  $A$  fixe d'un axe  $(Oz)$ .

Le point matériel  $M$  est astreint à tourner autour de  $(Oz)$ , dans le plan  $(Oxy)$ , à la vitesse angulaire constante  $\omega$  dans le référentiel galiléen d'étude  $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

En appliquant le théorème du moment cinétique en un point astucieusement choisi, déterminer l'angle d'inclinaison constant  $\alpha$  du pendule avec l'axe  $(Oz)$  en fonction de  $\ell$ ,  $g$  et  $\omega$ .

