

## Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)

### TD n°17 Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

Données pour l'ensemble du TD :

- |                                                                                                                       |                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| — Constante universelle de gravitation :<br>$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ | — Masse de la Terre : $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$    |
| — Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$                          | — Rayon de la Terre : $R_T = 6,38 \cdot 10^3 \text{ km}$       |
| — Constante de Planck : $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$                                            | — Masse du Soleil : $M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$      |
| — Célérité de la lumière dans le vide :<br>$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$                        | — Masse de l'électron : $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ |
|                                                                                                                       | — Masse du proton : $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$     |
|                                                                                                                       | — Charge élémentaire : $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$    |

| Exercice n°                                                                                                       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Capacités                                                                                                         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique.                             |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.                  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.                  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective.                          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique.                                 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.                  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Établir que le mouvement circulaire est uniforme et déterminer sa période.                                        |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire.                          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Exploiter sans démonstration la généralisation de la troisième loi de Kepler au cas d'une trajectoire elliptique. |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire.                                                        |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.                          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.        |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Exprimer les vitesses cosmiques et citer leur ordre de grandeur en dynamique terrestre.                           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

### Parcours possibles

- 🎵 Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, n°2, n°3, n°5 (Q1 à Q3).
- 🎵 🎵 Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°4, n°5, n°6.
- 🎵 🎵 🎵 Si vous êtes à l'aise : exercices n°4, n°5, n°6, n°7, n°8, n°9.

## I Exercices d'applications directes du cours

### Exercice n°1 Vitesse en orbite basse 🎵

Vous vous souvenez peut-être de cette scène des Douze travaux d'Astérix où lors d'une épreuve, Obélix lance son javelot tellement fort que ce dernier fait le tour de la Terre ... avant de revenir courser son adversaire. Dans le film, le javelot revient en quelques secondes, mais combien de temps faudrait-il vraiment pour qu'un objet fasse le tour de notre planète avec une orbite de ce genre ?



Exercice inspiré de <https://scienceetonnante.substack.com/p/orbiter-autour-dun-corps-rocheux>

- Q1. À quelle unique force est soumis le javelot ? Quelles propriétés a-t-elle ?
- Q2. Justifier que le moment cinétique par rapport au centre de la Terre se conserve.
- Q3. En donner les deux conséquences.
- Q4. Justifier que le mouvement circulaire du javelot est nécessairement uniforme.
- Q5. On suppose le mouvement du javelot circulaire basse (rasante : altitude négligeable devant le rayon de la Terre), en utilisant le principe fondamental de la dynamique appliqué au javelot, exprimer la vitesse en fonction de  $G$ ,  $M_T$  et  $R_T$  (le rayon de la trajectoire circulaire).
- Q6. En supposant que la Terre est homogène et de masse volumique  $\rho$ , exprimer  $v$  en fonction de  $G$ ,  $\rho$  et  $R_T$ .
- Q7. Exprimer la durée mise par le javelot pour faire le tour de la Terre. De quoi dépend cette durée ? Commenter.
- Q8. Faire l'application numérique. Commenter.

### Exercice n°2 Au revoir Pioneer ! 🎵

La sonde Pioneer 10 a été envoyée le 2 mars 1972, la sonde est propulsée avec une vitesse de  $14356 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  par rapport à la Terre.

- Q1. Établir l'expression de la vitesse de libération pour un objet situé à la surface de la Terre. Faire l'application numérique.
- Q2. Comparer les valeurs numériques de la vitesse de libération et de celle de la sonde Pioneer.
- Q3. En exploitant la conservation de l'énergie mécanique, déterminer l'expression de la vitesse du satellite aux confins du système solaire. Faire l'application numérique.

### Exercice n°3 Feu la comète 🎵

La comète Ison surnommée la comète du siècle est morte en décembre 2013 en rasant le soleil. La comète passa au plus près du soleil à une distance  $r_p = 0,012 \text{ UA}$ . Sa trajectoire était quasi parabolique de sorte qu'elle pourrait être issue du nuage de Oort sans vitesse initiale, frontière de notre système solaire.

- Q1. Rappeler l'expression de l'énergie mécanique en fonction de  $m$ ,  $M$ , de la vitesse  $v$  et de la distance  $r$  de la comète par rapport au soleil.
- Q2. Que vaut l'énergie mécanique sur une trajectoire parabolique ?
- Q3. En exploitant la conservation de l'énergie mécanique, déterminer la vitesse de la comète au périhélie.

Données :  $1 \text{ UA} = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$

## II Exercices d'approfondissement

### Exercice n°4 Orbite de transfert 🎵❤️

Un satellite artificiel, assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m = 900$  kg, se trouve sur une orbite circulaire provisoire de rayon  $r_1 = 7500$  km autour de la Terre. On souhaite le faire passer sur son orbite définitive de rayon  $r_2 = 42200$  km (orbite géostationnaire).

Pour cela, on le fait d'abord passer sur une orbite de transfert elliptique dont le périégée  $P$  est à la distance  $r_1$  et l'apogée  $A$  à la distance  $r_2$  du centre de la Terre. Lorsque le satellite arrive à cet apogée, on le fait alors passer sur l'orbite circulaire de rayon  $r_2$ .

Ces deux changements d'orbites sont obtenus par allumage d'un moteur placé sur le satellite : ce processus est très bref (par rapport à la période orbitale), donc on considèrera que la vitesse passe instantanément de  $v_1$  à  $v_{e1}$  en  $P$ , puis de  $v_{e2}$  à  $v_2$  en  $A$  (sans changer de direction dans chaque cas).

- Q1. Faire un schéma représentant les deux orbites circulaires et l'ellipse de transfert entre  $P$  et  $A$ .
- Q2. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, justifier que le mouvement circulaire est nécessairement uniforme, et établir l'expression de la vitesse  $v$  du satellite sur une orbite circulaire de rayon  $r$ .
- Q3. Faire l'application numérique pour l'orbite basse (on notera  $v_1$  la vitesse) et pour l'orbite géostationnaire (on notera  $v_2$  la vitesse).
- Q4. À l'aide du schéma de Q1, déterminer l'expression du demi grand-axe de l'orbite elliptique de transfert en fonction de  $r_1$  et  $r_2$ . Faire l'application numérique.
- Q5. En exploitant la troisième loi de Kepler, exprimer et calculer la durée du transfert (entre  $P$  et  $A$ ).
- Q6. Démontrer que sur l'orbite de transfert elliptique, le produit  $C = r^2\dot{\theta}$  est une constante (en notant  $r$  et  $\theta$  les coordonnées polaires du satellite).
- Q7. Donner (si vous n'êtes pas à l'aise) / Établir (si vous êtes plus à l'aise) l'expression de l'énergie mécanique du satellite en orbite elliptique de demi-grand axe  $a$ .
- Q8. 🎵 🎵 En déduire l'expression de la vitesse  $v_e(r)$  du satellite sur la trajectoire elliptique en fonction de  $r$  et des constantes  $G$ ,  $m$ ,  $M_T$ ,  $a$ .
- Q9. 🎵 🎵 Exprimer et calculer la vitesse  $v_{e1}$  après le premier transfert (au périégée donc).
- Q10. 🎵 🎵 Exprimer et calculer également le travail  $W_P$  fourni par le moteur au satellite en ce point.

### Exercice n°5 Modèles de Rutherford et de Bohr de l'atome d'hydrogène 🎵

On considère l'interaction électrostatique entre l'électron et le proton d'un atome d'hydrogène. En 1911, l'expérience de Rutherford montre qu'il existe un noyau quasi ponctuel chargé positivement au sein de l'atome. Le modèle précédent de l'atome dû à Thomson (électrons localisés dans une sphère chargée uniformément positivement en volume) est alors invalidé. Rutherford propose un modèle planétaire dans lequel les électrons décrivent des trajectoires circulaires autour d'un noyau ponctuel fixe.

- Q1. Exprimer la force exercée par le noyau sur l'électron en fonction de  $e$ ,  $\varepsilon_0$ , la distance  $a$  entre le noyau et l'électron et le vecteur unitaire  $\vec{u}_r$ . Faire un schéma.
- Q2. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, déterminer l'expression de la vitesse  $v$  de l'électron sur son orbite circulaire en fonction de  $a$ ,  $e$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $m_e$ . Le poids de l'électron sera négligé.
- Q3. Déterminer l'énergie mécanique d'un électron sur une trajectoire de rayon  $a$  en fonction des paramètres du problème.
- Q4. Déterminer son moment cinétique en fonction de  $a$ ,  $m_e$ ,  $\varepsilon_0$  et  $\vec{u}_z$ .

(La suite est liée au chapitre n°29 « Introduction à la mécanique quantique. »)

Pour expliquer les raies discrètes du rayonnement émis par une lampe à décharge, observées par Balmer en 1885, Bohr propose en 1913 un modèle dans lequel il impose au moment cinétique d'être quantifié, c'est-à-dire de ne prendre que les valeurs  $L_n = n\hbar$ , où  $n$  est un entier et  $\hbar$  la constante de Planck réduite,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ .

- Q5. 🎵 🎵 Montrer que le rayon et l'énergie mécanique sont aussi quantifiés :  $a = n^2 a_0$  et  $\mathcal{E}_n = -\frac{\mathcal{E}_0}{n^2}$  où  $a_0$  (rayon de Bohr) et  $\mathcal{E}_0$  s'expriment en fonction de constantes fondamentales.

## Exercice n°6 Distance minimale d'approche d'un astéroïde ♪ ♪

Un astéroïde de masse  $m = 1,0 \cdot 10^{18}$  kg s'approche dangereusement de la Terre. Il possède une vitesse  $v_0 = 10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  dans le référentiel géocentrique ( $\mathcal{R}_g$ ) supposé galiléen avec un paramètre d'impact  $b = 8,0 \cdot 10^3$  km. À cet instant, l'attraction terrestre peut encore être négligée. Nous assimilerons l'astéroïde à un point matériel  $M$  pour étudier son mouvement.



- Q1. Montrer que l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$  de la météorite est une constante et déterminer sa valeur initiale
- Q2. Montrer que le moment cinétique  $\vec{L}_O$  de la météorite par rapport à O est une constante et déterminer sa valeur initiale. Rappeler les deux conséquences de la conservation du moment cinétique.
- Q3. Définir des coordonnées polaires adaptées et établir l'expression du moment cinétique à chaque instant.
- Q4. Établir l'expression de l'énergie potentielle effective en fonction des constantes du problème et de la distance  $r$ .
- Q5. Tracer l'allure de la courbe d'énergie potentielle effective et en déduire la nature de la trajectoire de la météorite (compte tenu de la valeur de l'énergie mécanique).
- Q6. ♪ ♪ ♪ En utilisant la conservation des deux grandeurs précédentes, déterminer la distance minimale d'approche de l'astéroïde par rapport au centre de la Terre. S'écrase-t-il sur Terre ?

## Exercice n°7 Lancement d'un satellite ♪ ♪

Le satellite EUTELSAT 8 West B d'une masse  $m = 5,8$  tonnes a été lancé de Kourou en Guyane française par une fusée Ariane 5 le 21 août 2015 afin d'être placé sur une orbite géostationnaire. La base de lancement de Kourou se situe à une latitude  $\lambda = 5,2^\circ$ . Dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$  supposé galiléen, la Terre peut-être assimilée à un solide en rotation autour d'un axe fixe (l'axe Nord-Sud) à une vitesse angulaire  $\Omega$ .

- Q1. Décrire l'axe de rotation. Peut-on le considérer comme fixe ? Déterminer l'expression puis la valeur de  $\Omega$ .
- Q2. En déduire l'expression de la vitesse du point  $P$  dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$  en fonction de  $\Omega$ , du rayon de la Terre  $R_T$  et de la latitude  $\lambda$ .
- Q3. Exprimer alors l'énergie mécanique initiale  $\mathcal{E}_{m0}$  du satellite posé au sol au point  $P$ .
- Q4. En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite. Parmi les trois champs de tir : Baïkonour au Kazakhstan ( $\lambda = 46^\circ$ ), Cap Canaveral aux USA ( $\lambda = 28,5^\circ$ ) et Kourou en Guyane Française ( $\lambda = 5,1^\circ$ ), lequel est le plus adapté ?
- Q5. Calculer l'énergie nécessaire pour mettre le satellite en orbite basse (altitude  $z \ll R_T$ ) depuis Kourou.
- Q6. Sachant que  $1 \text{ kW} \cdot \text{h}$  d'électricité coûte environ  $0,15 \text{ €}$ , estimer le coût théorique de la satellisation d'un kilogramme de charge utile. Ce coût est en réalité de l'ordre de  $1000 \text{ €/kg}$ . Commenter.
- Q7. Calculer numériquement l'énergie gagnée entre Baïkonour et Kourou. Commenter.

## III Résolution de problème

### Exercice n°8 La Lune ♪ ♪ ♪

Le diamètre apparent de la Lune est de  $\theta = 31'36''$ . Sachant que la Lune gravite autour de la Terre en 27 jours, déterminer le diamètre de la mer de la sérénité en km.

Seules les valeurs de masse de la Terre et la constante universelle de gravitation sont nécessaires pour résoudre ce problème.



### Exercice n°9 Expérience de Rutherford ♪ ♪ ♪

Des particules  $\alpha$  ( ${}^4_2\text{He}$ ) de masse  $m$  sont envoyées d'une distance très grande d'un noyau d'or  ${}_{79}\text{Au}$  avec une vitesse  $v_0$  en direction du noyau d'or de masse  $M$ , supposé immobile dans le référentiel galiléen d'étude.

On mesure la distance minimale d'approche  $r_{\min} = 3 \cdot 10^{-14}$  m des particules  $\alpha$  par rapport au noyau d'or. En déduire la vitesse initiale  $v_0$  communiquée aux particules  $\alpha$