

? À rendre jeudi 26 mars 2026

Devoir Maison n°15 – Mouvement à force centrale

Traiter au choix :

- Exercice n°1, proche du cours,
- Exercice n°2, « plus difficile ».

Exercice n°1 Satellites GPS

Le principe du positionnement par GPS (Global Positioning System ou Géopositionnement Par Satellite) repose sur la mesure de la durée de transit d'un signal transmis par une onde électromagnétique (OEM) entre des satellites dont la position est exactement connue à tout instant, dénommés NAVSTAR (NAVigation Satellite Timing And Ranging) et un récepteur. Cette durée est ensuite simplement convertie en distance puisqu'on connaît très précisément la célérité d'une OEM. Pour une précision optimale, un récepteur sur Terre doit « voir » au minimum quatre satellites simultanément.

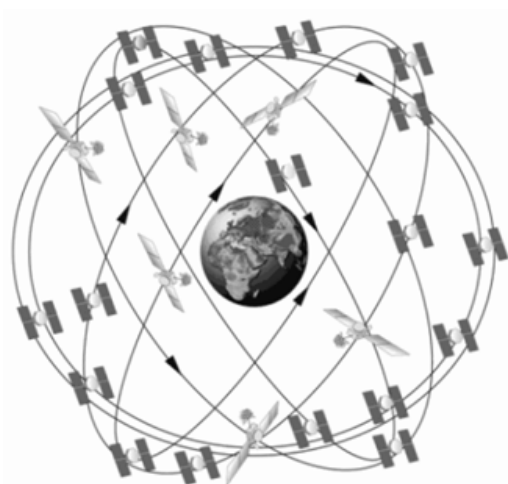


FIGURE 1 – Constellation satellite GPS Public domain,

<http://www.gps.gov/multimedia/images/constellation.gif>

Vu sur le site <https://www.maamittauslaitos.fi/en/research/interesting-topics/satellite-based-positioning-systems>

Le système fut mis en place par le département de la Défense des États-Unis à partir de 1973, à l'origine, uniquement à des fins militaires. Avec ses vingt-quatre satellites, il est devenu totalement opérationnel en 1995. Le 2 mai 2000, le président étatsunien Bill Clinton confirme l'intérêt de la technologie à des fins civiles et autorise une diffusion non restreinte des signaux GPS, permettant une précision de l'ordre d'une dizaine de mètres et une démocratisation de la technologie au grand public à partir du milieu des années 2000. De nos jours les récepteurs GPS se sont banalisés et ont envahi notre environnement quotidien (automobile, smartphones, montre connectée, etc).

Le système comprend vingt-quatre satellites placés sur des **orbites pratiquement circulaires d'altitudes voisines de $2,00 \times 10^4$ km** (voir figure 1). Les satellites sont placés sur six orbites dont le plan est incliné de 55° par rapport au plan de l'équateur. Ces orbites sont décalées en longitude de 60° . Sur chaque orbite, il y a quatre satellites. On notera pour information que les satellites ne sont pas régulièrement espacés sur leur orbite. Leur répartition a été choisie pour optimiser le nombre de satellites visibles en chaque point de la Terre à un instant « t ». Les zones les plus défavorisées sont voisines des pôles. Sur la photo de la figure 2 prise lors de la phase finale d'assemblage, on peut se faire une idée des dimensions d'un satellite NAVSTAR munis de ses panneaux solaires en le comparant à la personne située à ses côtés.

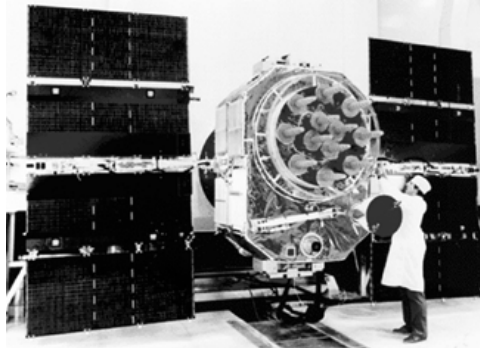


FIGURE 2 – Satellite NAVSTAR

Public domain, <http://www.gps.gov/multimedia/images/constellation.gif>

Vu sur le site <https://www.maamittauslaitos.fi/en/reseach/interesting-topics/satellite-based-positioning-systems>

Dans tout le problème, le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique supposé galiléen. Les données nécessaires sont regroupées en annexe à la fin de l'énoncé.

Q1. **Rappeler** l'expression de la force de gravitation $\vec{F}$ exercée par la Terre sur un satellite NAVSTAR. Le centre de la Terre est situé en O . On notera r la distance OM du satellite (masse ponctuelle m) placé au point M , $r > R_T$ où R_T est le rayon terrestre. On exprimera $\vec{F}$ en fonction de la constante de gravitation universelle G , des autres données et on utilisera le vecteur unitaire noté habituellement $\vec{u}_r$ en coordonnées sphériques (figure 3).

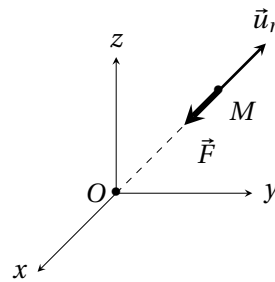


FIGURE 3 – Repère sphérique

- Q2. En ne prenant en compte que cette unique force d'attraction qui s'exerce sur le satellite, **montrer que** :
- (a) le moment cinétique se conserve ;
 - (b) sa trajectoire est plane ;
 - (c) la grandeur $r^2\dot{\theta}$ se conserve au cours du mouvement ; comment s'appelle cette grandeur ? à quelle loi de Kepler est-elle reliée ?
 - (d) son énergie mécanique notée E_m est conservée ;
 - (e) et qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$$

avec A et B deux constantes positives à définir, s'exprimant en fonction de m , M_T , G et de la constante des aires C . L'énergie potentielle est prise nulle à l'infini.

- Q3. Soit la fonction $E_{p,\text{eff}} = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$. Tracer son allure puis **prouver** qu'elle passe par un minimum noté r_0 . **Exprimer** r_0 en fonction de A et B puis donner sa signification physique ainsi que l'ordre de grandeur de sa valeur numérique pour un **satellite NAVSTAR placé sur son orbite de travail**. Comment est habituellement dénommée cette fonction $E_{p,\text{eff}}$?

On donne la définition d'un jour sidéral terrestre : c'est la durée que met la Terre pour faire un tour sur elle-même par rapport au point vernal (point considéré comme fixe dans le référentiel héliocentrique), indépendamment de sa révolution autour du Soleil. Elle vaut environ 23 h 56 min 4 s.

Q4. **Établir** l'expression de la norme du vecteur vitesse v_0 sur le mouvement circulaire de rayon r_0 . **En déduire** la troisième loi de Kepler.

Q5. Quelle est la période de révolution du satellite ? Comparer cette valeur à celle d'un jour sidéral et conclure.

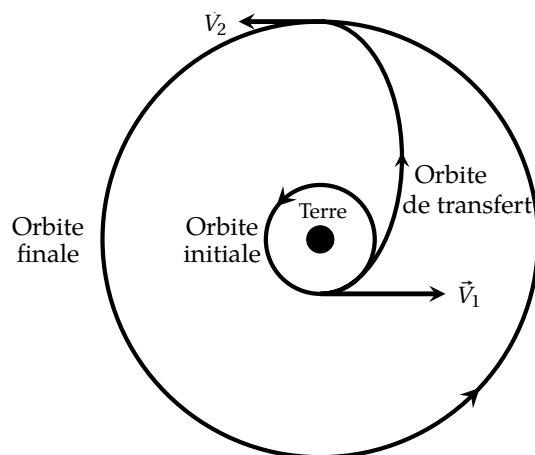


FIGURE 4 – Orbites circulaires et orbite de transfert

Le placement d'un satellite sur son orbite définitive s'effectue très schématiquement en trois phases (figure 4) :

Phase 1 : mise en orbite basse initiale supposée circulaire, de rayon $R_1 = R_T + h_1$, où $h_1 = 1,50 \times 10^3$ km.

Phase 2 : on fournit une très brève impulsion au satellite (vitesse V_1 après l'impulsion) pour le placer sur une orbite elliptique dite transfert (ou d'Hohmann) dont l'apogée se trouve sur l'orbite définitive.

Phase 3 : une seconde impulsion permet d'**atteindre l'orbite finale (de travail)** supposée circulaire de rayon R_2 où la vitesse du satellite est V_2 .

Q6. **Établir** l'expression de l'énergie mécanique E_{m1} d'un satellite NAVSTAR de masse $m = 800$ kg sur son orbite basse à l'altitude $h_1 = 1,50 \times 10^3$ km. On suppose l'énergie potentielle nulle à l'infini. Application numérique.

Q7. Comparer E_{m1} à $E_{m0} = \alpha \cos^2(\lambda) - \beta$, énergie mécanique du satellite posé au sol, avant son décollage, de la base de lancement située à la latitude λ . Les valeurs de α et β sont $\alpha = 8,6 \times 10^7$ J et $\beta = 5,006 \times 10^{10}$ J. Quelle est la valeur optimale pour λ ? Faire l'**application numérique** pour cette valeur optimale. Conclure.

Q8. **Donner** l'expression, puis la valeur numérique de l'énergie mécanique E_{m12} sur l'orbite de transfert.

On suppose que la durée d'allumage des fusées est très courte (boost) devant la période de révolution et que le satellite n'a quasiment pas bougé durant cette phase.

Q9. **En déduire** la variation de vitesse ΔV_1 à appliquer au satellite pour qu'il passe de l'orbite basse à celle de transfert. Effectuer l'**application numérique**.

Q10. Quelle est la durée du transfert ?

Pour réduire les coûts, on envisage d'autres trajectoires qui utilisent moins de satellites.

Q11. **Définir** ce qu'on appelle un satellite géostationnaire en précisant les caractéristiques de son orbite, son altitude, sa visibilité depuis un point donné de la Terre, son usage et toute autre donnée jugée digne d'intérêt. On pourra par exemple se poser la question si un tel satellite pourrait se trouver de manière permanente à la verticale d'une ville française en justifiant la réponse.

Q12. Serait-il envisageable d'utiliser uniquement des satellites géostationnaires dans un système GPS ? **Expliquer** votre réponse.

Exercice n°2 Vers Mars

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains. Ce sujet propose d'étudier la cohérence de l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.

Les sous-parties sont largement indépendantes, mais les données numériques fournies dans les différentes parties sont susceptibles d'être utilisées ailleurs.

Ce sujet est accompagné d'un **document réponse page 7 à rendre avec la copie (même s'il n'a pas été utilisé)**. Les principales données numériques sont regroupées page 6.

Dans toute cette partie du problème, les orbites des planètes autour du Soleil sont assimilées à des cercles de rayon égal au demi-grand axe a des ellipses. On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

Partie A Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

- Q1. Donner les dimensions de la constante gravitationnelle G ainsi que son unité dans le système international (en fonction des 7 unités de base).
- Q2. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ en O , centre du Soleil, d'un objet de masse m est une constante du mouvement.
- Q3. On utilise les coordonnées cylindriques $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_z$ tel que $\vec{L}_O = L_O \vec{e}_z$.
Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de L_O et m . Quel est le nom de cette grandeur ?
- Q4. Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R , la vitesse V de l'objet en fonction de G , M_S , R et m .
Calculer les valeurs numériques de V_T , la vitesse orbitale de la Terre et de V_M , celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

Partie B Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

- Q5. Dédurre l'expression de l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de G , M_S , R et m .
- Q6. Exprimer la période de rotation T de l'objet en fonction G , M_S et R (troisième loi de Kepler).

Partie C Voyage aller Terre - Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

- Q7. Représenter, sur la figure A du document réponse, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann).
Exprimer le demi grand-axe de l'ellipse de transfert a , en fonction de a_M et a_T .

La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$).

- Q8. Au départ de l'orbite de la Terre, exprimer en fonction de V_T , a_M et a_T la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert.
En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V'_T - V_T$. Calculer la valeur numérique de ΔV_T .

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

- Q9. Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.

- Q10. Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t=0) - \theta_T(t=0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0 et indiquer la position de Mars au moment du lancement sur la figure A du document réponse.
- Q11. Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

Partie D Durée de la mission

Toujours pour minimiser le coût énergétique, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.

- Q12. Déterminer l'angle α_1 (Terre - Soleil - Mars) au moment du départ de Mars.
- Q13. En déduire le nombre de jours que les astronautes vont pouvoir passer sur la planète rouge, la durée totale de la mission (en jours) et la période entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre.

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse $\Delta \vec{V}_T$ colinéaire à $\vec{V}_T$ plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.

Dans la suite, on cherche une réduction de 25% de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil.

On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ($\theta_T(t=0) = 0$) et on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t') = 3\pi/4$. On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

où p est appelé paramètre de la conique et e son excentricité.

- Q14. Placer sur la figure B du document réponse la position de Mars à l'arrivée du vaisseau.
- Q15. Justifier que r_P , le périhélie de la trajectoire du vaisseau (distance minimale du Soleil au vaisseau), vérifie $r_P = a_T$.
- Q16. Montrer que l'excentricité s'écrit

$$e = \frac{a_M - a_T}{\frac{1}{\sqrt{2}}a_M + a_T}$$

et calculer sa valeur numérique. Tracer sur la figure B l'allure de la trajectoire.

- Q17. Exprimer l'énergie mécanique E_M du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de m , V_T et e .
- Q18. En déduire la vitesse V_T'' que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de V_T et e .
- Q19. Donner, en fonction de V_T et e , la variation de vitesse $\Delta V_T' = V_T'' - V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert. Calculer la valeur numérique de $\Delta V_T'$.
- Q20. Exprimer $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de a_T et V_T'' .
- Q21. Évaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars.

On donne :

$$\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta = 2,15$$

avec l'excentricité calculée en question Q16.

Données

Partie A Données numériques

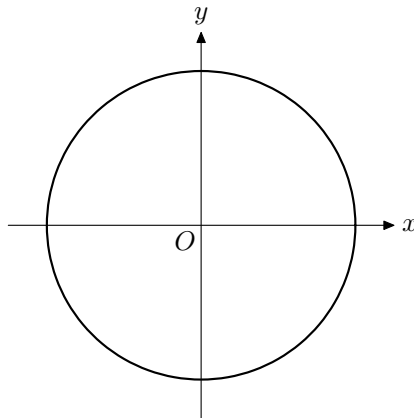
- Constante universelle de la gravitation : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ uSI
- Accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- Masse du Soleil $M_S = 2,00 \cdot 10^{30}$ kg
- Demi-grand axe de l'orbite de la Terre $a_T = 150 \cdot 10^6$ km
- Demi-grand axe de l'orbite de Mars $a_M = 228 \cdot 10^6$ km
- Période de révolution de la Terre $T_T = 365$ jours
- Période de révolution de la Mars $T_M = 687$ jours

Partie B Formulaire

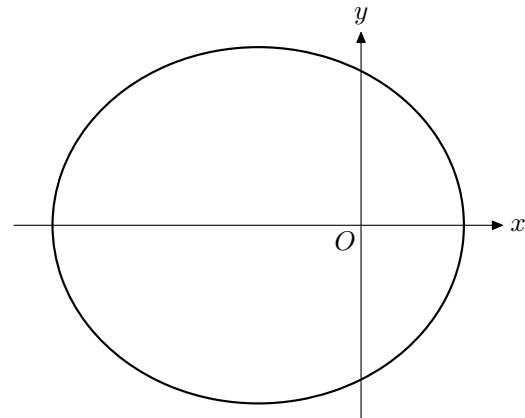
L'équation polaire d'une conique d'axe focal (Ox) , de paramètre p et d'excentricité e s'écrit

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$$

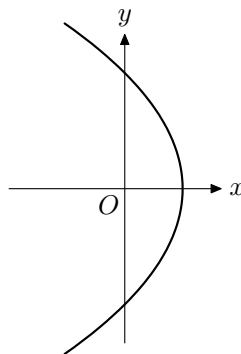
La nature de la courbe dépend de l'excentricité. On distingue 4 cas.



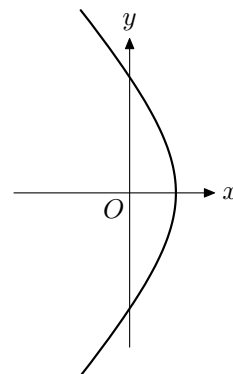
$e = 0$, la courbe est un cercle



$0 < e < 1$, la courbe est une ellipse



$e = 1$, la courbe est une parabole



$e > 1$, la courbe est une hyperbole

DOCUMENT RÉPONSE À RENDRE

NOM : _____ Prénom : _____

Questions Q7 et Q10

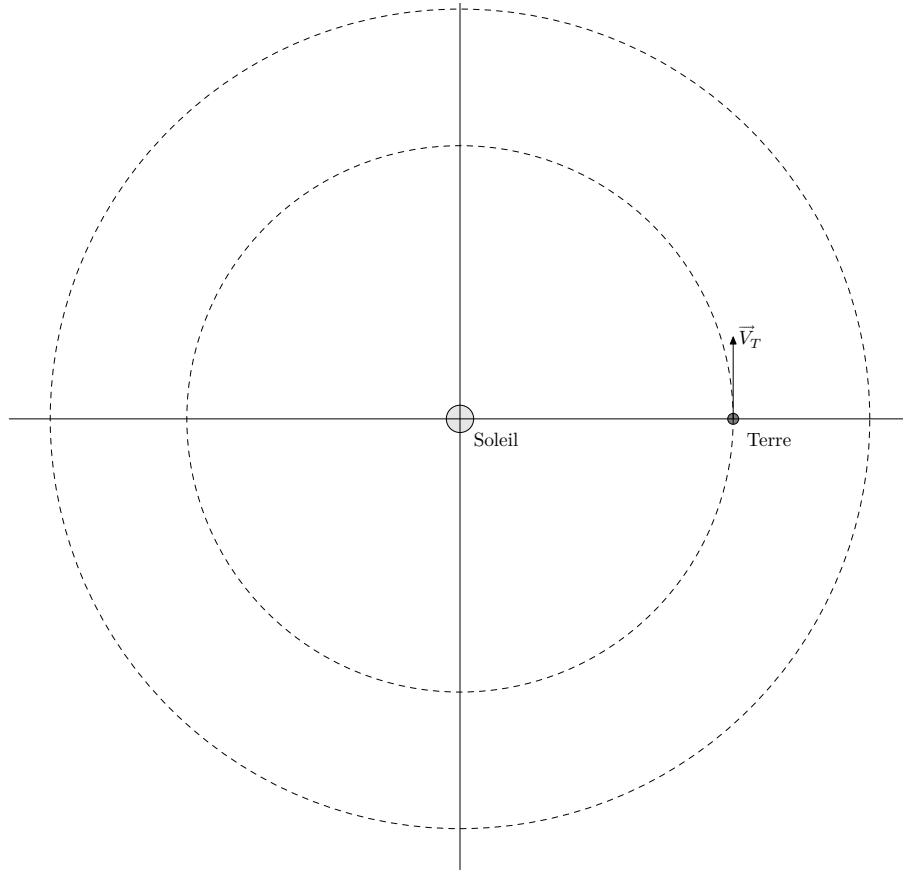


Figure A

Questions Q14 et Q16

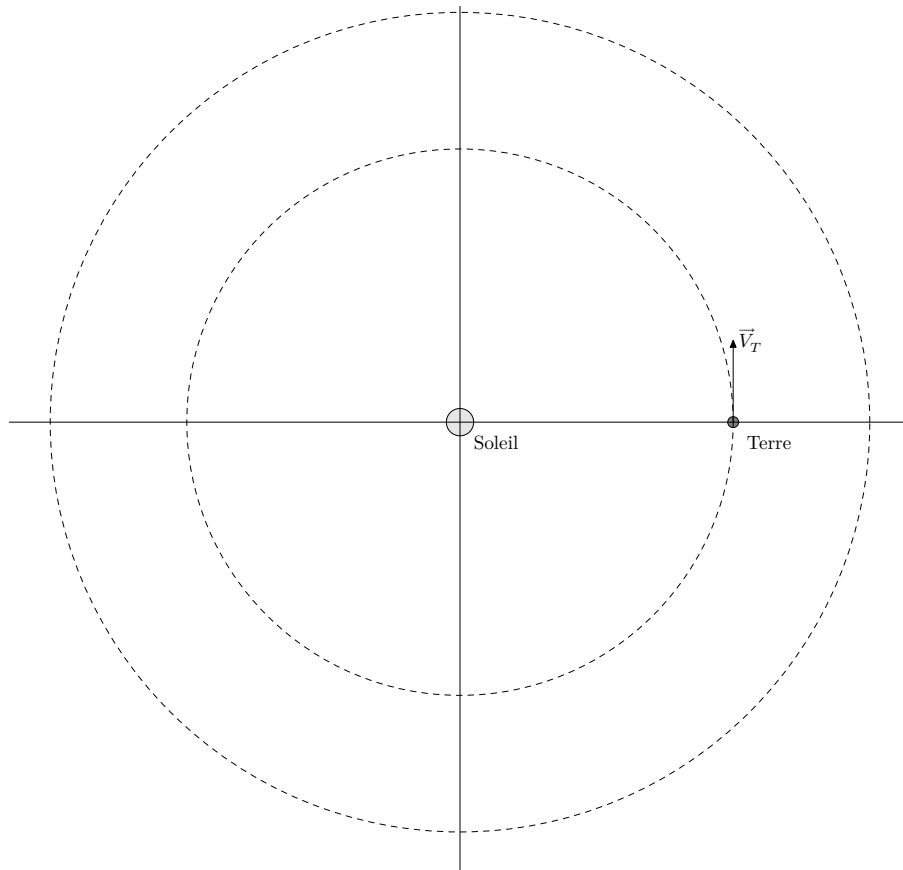


Figure B