

Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)

TD n°16 Théorème du moment cinétique pour le point matériel – *Corrigé*

Exercice n°	1	2	3	4	5	6
Capacités						
Maîtriser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.						
Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.						
Utiliser le théorème scalaire ou le théorème en un point fixe du moment cinétique en référentiel galiléen.						
Reconnaître les cas de conservation du moment cinétique.						

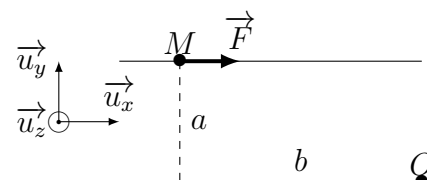
Parcours possibles

- 🎵 Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, n°2, n°3 (Q1 à Q4 uniquement).
- 🎵 🎵 Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°1, n°3.
- 🎵 🎵 🎵 Si vous êtes à l'aise : exercices n°3, 4, 5 et 6.

I Exercices d'application directe du cours

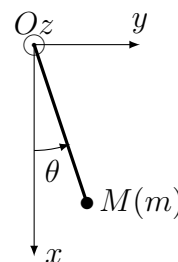
Exercice n°1 QCM 🎵

- R1. Les moments par rapport à un point sont des vecteurs. ☒ **Vrai** ☐ Faux
- R2. Les moments par rapport à un axe sont des vecteurs. ☐ Vrai ☒ **Faux**
- R3. Le moment d'une force a les mêmes dimensions qu'une énergie. ☒ **Vrai** ☐ Faux
- R4. Le bras de levier est la distance entre le point d'application d'une force et l'axe considéré.
☒ **Vrai** ☐ Faux
- R5. À quelle(s) autre(s) grandeur(s) physique(s) rencontrée(s) dans le cours de mécanique est homogène le moment d'une force ? ☐ vitesse ☒ **énergie** ☐ puissance ☒ **travail**
- R6. Le moment cinétique par rapport à O d'un point matériel M , de masse m , de vitesse $\vec{v}$ et subissant une force $\vec{F}$:
- ☐ s'écrit $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$;
 - ☐ s'écrit $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$;
 - ☒ **est nul si sa trajectoire est une droite passant par le point O .**
- R7. Une force dont la droite d'action est normale à un axe (Δ) est appliquée à un point matériel. Son moment par rapport à (Δ) :
- ☒ **a la même dimension que le travail d'une force ;**
 - ☒ **permet de savoir si la force modifie la vitesse du point matériel ;**
 - ☐ a un module inversement proportionnel à son bras de levier par rapport à (Δ) .
- R8. Le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ de la force $\vec{F}$ d'intensité F par rapport au point O est :
- ☐ $Fa\vec{u}_z$ ☐ $-Fb\vec{u}_y$ ☐ $-Fb\vec{u}_z$ ☒ $-Fa\vec{u}_z$



Exercice n°2 Exercice de cours : Pendule simple 🎵

On étudie le pendule simple : un point matériel M est accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ . On note O le point d'attache du fil.



- R1. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ en utilisant le théorème du moment cinétique par rapport à O .
- R2. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ en utilisant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Oz .
- R3. La résoudre complètement, après linéarisation justifiée, si à $t = 0$, $\theta(0) = \theta_0 \ll 1$ rad et $\dot{\theta}(0) = 0$.

Exercice n°3 Pendule électrostatique 🎵

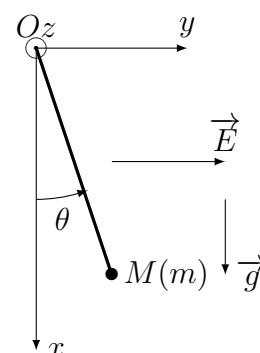
Un pendule électrostatique est constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium et suspendue à une potence par un fil de masse négligeable. La boule est préalablement chargée avec une charge électrique $Q = 2,3 \cdot 10^{-4}$ C. L'ensemble est placé entre deux plaques de cuivre planes et parallèles soumises à une différence de potentiel telle qu'elles génèrent un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\vec{u}_y$ avec $E = 500 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

La longueur du pendule est $OM = R = 10$ cm et la masse de la boule assimilée à un point M est $m = 20$ g.

L'accélération de la pesanteur est $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- R1. Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur le pendule et les représenter sur le schéma.

Exprimer le moment de ces forces par rapport à l'axe (Oz) en utilisant le bras de levier.



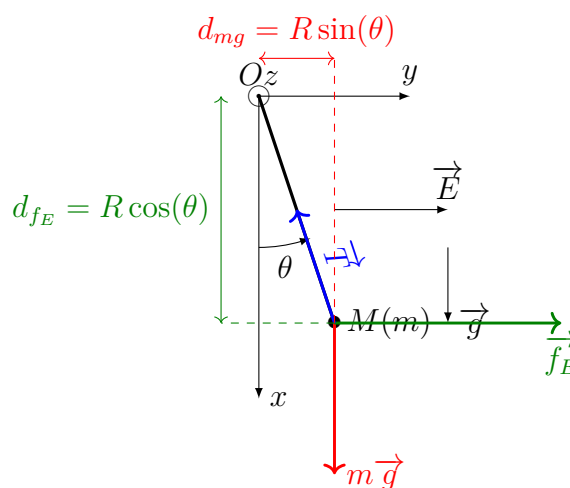
Solution:

Système : boule de polystyrène M de masse m et de charge Q .

Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\vec{g}$;
- tension du fil $\vec{T}$;
- force électrique $\vec{f}_E = Q\vec{E}$.



Le moment de la tension du fil par rapport à (Oz) est nul car la droite d'action coupe l'axe (Oz) .

En utilisant le bras de levier : $\mathcal{M}_{Oz}(m\vec{g}) = -mgR \sin(\theta)$ et $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{f}_E) = +QE R \cos(\theta)$

- R2. Que peut-on dire de la somme des moments à l'équilibre ?

- R3. Déterminer la position d'équilibre θ_e du pendule.

Solution:

À l'équilibre, en θ_e , la somme des moments des forces est nulle, alors $-mg \sin(\theta_e) + QE \cos(\theta_e) = 0$, soit

$$\tan(\theta_e) = \frac{QE}{mg}$$

On vérifie que si m augmente, θ_e diminue, et si E ou Q augmente, θ_e augmente.

R4. Appliquer le théorème du moment cinétique à M par rapport à l'axe (Oz).

Solution: On applique le TMC par rapport à l'axe (Oz) dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}(m\vec{g}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{T}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{f}_E)$$

$$M \text{ a un mouvement circulaire : } L_{Oz}(M) = (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)) \cdot \vec{u}_z = (R\vec{u}_r \wedge mR\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_z,$$

$$\text{soit } L_{Oz}(M) = mR^2\dot{\theta}$$

$$\text{le TMC donne : } mR^2\ddot{\theta} = -mgR\sin(\theta) + qER\cos(\theta)$$

$$\text{On obtient : } \boxed{mR\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) + QE\cos(\theta)}$$

(Questions plus difficiles)

On écarte le pendule légèrement de sa position d'équilibre. On pose $\varepsilon = \theta - \theta_e$.

On rappelle que pour $|\varepsilon| \ll \theta_e$, on a $\cos(\theta_e + \varepsilon) \approx \cos(\theta_e) - \varepsilon\sin(\theta_e)$ et $\sin(\theta_e + \varepsilon) \approx \sin(\theta_e) + \varepsilon\cos(\theta_e)$.

R5. ♪ ♪ ♪ Établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des petites oscillations, vérifiée par ε .

R6. ♪ En déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 des oscillations puis calculer sa période propre T_0 .

Solution:

On pose $\theta = \theta_e + \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll 1$ rad (oscillations de faible amplitude au voisinage de la position d'équilibre) et on procède au DL au premier ordre au voisinage de θ_e de l'équation du mouvement, en utilisant les DL fournis.

$$\theta = \theta_e + \varepsilon, \text{ on en déduit que } \dot{\theta} = \dot{\varepsilon} \text{ et } \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$$

$$\text{On obtient : } mR\ddot{\varepsilon} = -mg(\sin(\theta_e) + \varepsilon\cos(\theta_e)) + QE(\cos(\theta_e) - \varepsilon\sin(\theta_e))$$

$$\text{Soit } mR\ddot{\varepsilon} + \varepsilon(mg\cos(\theta_e) + QE\sin(\theta_e)) = \underbrace{-mg\sin(\theta_e) + QE\cos(\theta_e)}_{=0}$$

$$\text{Soit } \ddot{\varepsilon} + \frac{mg\cos(\theta_e) + QE\sin(\theta_e)}{mR}\varepsilon = 0, \text{ avec } \frac{mg\cos(\theta_e) + QE\sin(\theta_e)}{mR} > 0$$

On trouve bien l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\cos(\theta_e) + QE\sin(\theta_e)}{mR}}} \text{ au voisinage de } \theta_e.$$

On peut d'ailleurs en déduire que la position d'équilibre déterminée est une position d'équilibre stable.

$$Rq : \text{ on peut un peu simplifier cette expression avec un peu de trigo : } \omega_0 = \sqrt{\frac{mg\cos(\theta_e)}{mR} \underbrace{\left(1 + \frac{QE\sin(\theta_e)}{mg\cos(\theta_e)}\right)}_{1 + \tan^2(\theta_e) = \frac{1}{\cos^2(\theta_e)}}}$$

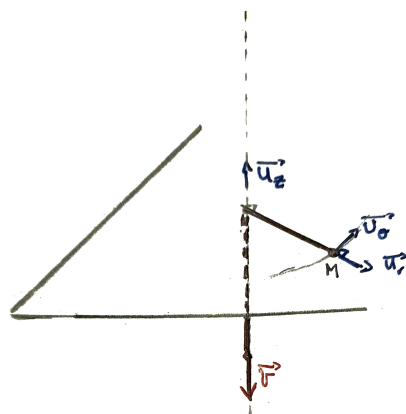
$$\text{Ainsi } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R\cos(\theta_e)}}$$

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°4 Masse accrochée à une ficelle ♪ ♪ ♪

Le point M de masse m se déplace sans frottement sur un plan horizontal. Il est attaché à un fil inextensible, sans masse et de longueur ℓ . Le fil passe par un trou pratiqué dans le plan horizontal en O . L'autre extrémité du fil est déplacée à la vitesse $\vec{v} = -v_0\vec{u}_z$, l'axe Oz étant l'axe vertical ascendant.

R1. Faire un schéma du dispositif.



Solution:

R2. Donner une relation entre la côte z de l'extrémité du fil et la distance $\rho = OM$. En déduire une relation entre les dérivées premières de z et de ρ .

Solution: $\ell = |z(t)| + \rho(t)$

ATTENTION : $z < 0$, donc $\ell = \rho(t) - z(t)$.

En dérivant : $\dot{\rho} = \dot{z} = -v_0$

R3. Montrer que le moment cinétique de M est constant.

Solution:

Système : point matériel $M(m)$

Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\vec{g}$
- réaction normale du support $\vec{R}_N$
- tension du fil $\vec{T}$

LMC par rapport à O au point M dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(m\vec{g}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}_N) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})$$

Or $m\vec{g} + \vec{R}_N = \vec{0}$ (PFD selon la verticale), donc $\vec{\mathcal{M}}_O(m\vec{g}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}_N) = \vec{0}$

et O appartient à la droite d'action de la tension du fil, donc $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0}$

Ainsi $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}$, donc le moment cinétique de M se conserve.

R4. Sachant que la masse est lancée avec une vitesse angulaire ω_0 à partir de la distance d du point O , déterminer $\rho(t)$ et $\omega(t)$.

Solution: On peut déterminer $\rho(t)$ facilement, en effet $\rho(0) = d$ et on tire à vitesse constante l'autre extrémité, donc ρ diminue de $v_0 t$, ainsi $\rho(t) = d - v_0 t$

Pour $\omega(t)$, on utilise la conservation du moment cinétique.

Exprimons le moment cinétique à $t = 0$: $\vec{L}_O(t=0) = \vec{OM}_0 \wedge m\vec{v}_0 = d\vec{u}_r \wedge md\omega_0\vec{u}_\theta = md^2\omega_0\vec{u}_z$

Exprimons le moment cinétique à t : $\vec{L}_O(t) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \rho\vec{u}_r \wedge m(\dot{\rho}\vec{u}_r + \rho\omega\vec{u}_\theta) = m\rho^2\omega\vec{u}_z$

Par égalisation : $d^2\omega_0 = \rho^2\omega$

Ainsi $\omega(t) = \frac{d^2\omega_0}{(d - v_0t)^2}$

R5. En déduire $\theta(t)$ si $\theta(0) = 0$, puis $\rho(\theta)$. Tracer l'allure de la trajectoire de M .

Solution:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\omega_0}{(d - v_0t)^2}$$

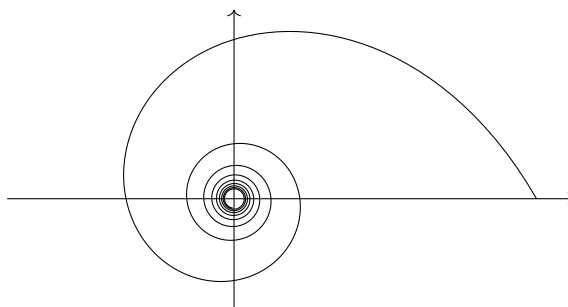
On intègre par rapport au temps : $\theta(t) = \frac{1}{v_0} \frac{d^2\omega_0}{d - v_0t} + C_2$

Or $\theta(0) = 0 = \frac{d^2\omega_0}{v_0d} + C_2$, donc $C_2 = -\frac{d\omega_0}{v_0}$

Soit $\theta(t) = \frac{1}{v_0} \frac{d^2\omega_0}{d - v_0t} - \frac{d\omega_0}{v_0}$, soit $\theta(t) = \frac{d\omega_0t}{d - v_0t}$

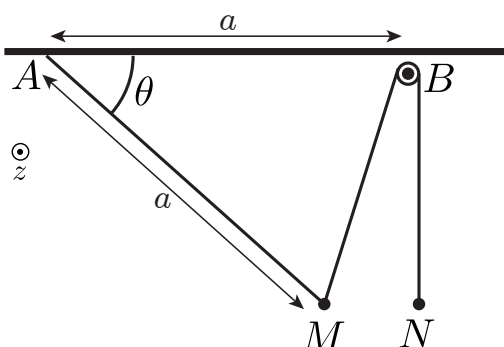
Pour l'équation de la trajectoire en polaire, on extrait t de $\rho(t)$: $t = \frac{d - \rho}{v_0}$

Ainsi $\theta = \frac{d\omega_0(d - \rho)}{v_0} \times \frac{1}{\rho}$, soit $\rho(\theta) = \frac{d}{1 + \frac{v_0}{\omega_0d}\theta}$



Exercice n°5 Équilibre 🎵 🎵 🎵

Soit un fil inextensible et sans masse, fixé en A à un socle horizontal et passant en B sur une poulie parfaite, de très petites dimensions, avec $AB = a$. Sur le fil, en un point M tel que $AM = a$, est attachée une masse ponctuelle m et, au bout du fil, est aussi accrochée une masse m' en N . Le dispositif est placé verticalement dans le champ de pesanteur $\vec{g}$.



R1. Établir le bilan des forces qui s'exercent sur le point M et exprimer leurs moments en A .

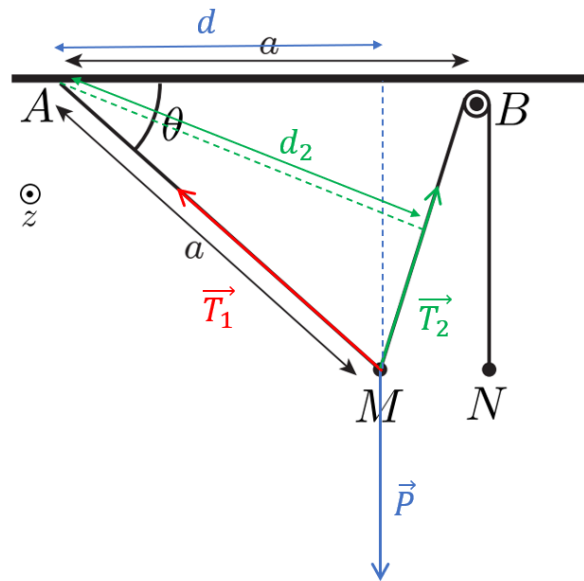
Il y a trois forces, et le seul angle devant intervenir dans ces expressions sera l'angle $\theta = \widehat{AB, AM}$. On admettra que la norme de la force exercée par N sur M via le fil vaut $m'g$.

Solution: Trois forces agissent sur l'objet :

Le poids $\vec{P}$

La tension due au fil de gauche $\vec{T}_1$

La tension due au fil de droite $\vec{T}_2$



Intéressons nous aux moments des forces par rapport à l'axe orienté qui passe par A et est perpendiculaire au plan (selon $\vec{u}_z$) :

Pour le poids, le bras de levier est égal à $d = a \cos(\theta)$ et cette force tend à faire tourner le point M dans le sens opposé au sens conventionnel (pouce et doigts de la main droite) :

$$\mathcal{M}_{Az}(\vec{P}) = -mga \cos(\theta)$$

Pour la tension due au fil de gauche $\vec{T}_1$, le bras de levier est nul :

$$\mathcal{M}_{Az}(\vec{T}_1) = 0$$

Pour la tension due au fil de droite $\vec{T}_2$, le bras de levier est d_2 . Le triangle étant isocèle, sa hauteur coupe le côté opposé selon un angle $\frac{\theta}{2}$, ainsi son bras de levier est égal à $d_2 = a \cos(\frac{\theta}{2})$. Cette force tend à faire tourner le point M dans le sens conventionnel (pouce et doigts de la main droite) :

$$\mathcal{M}_{Az}(\vec{T}_2) = T_2 a \cos(\frac{\theta}{2}) = m'ga \cos(\frac{\theta}{2})$$

R2. Trouver une relation vérifiée par l'angle θ lorsque le système est à l'équilibre.

Solution:

Système : point matériel $M(m)$

Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- Le poids $\vec{P}$
- La tension due au fil de gauche $\vec{T}_1$
- La tension due au fil de droite $\vec{T}_2$

LMC par rapport à l'axe orienté Az fixe dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\frac{dL_{Az}}{dt} = \mathcal{M}_{Az}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{Az}(\vec{T}_1) + \mathcal{M}_{Az}(\vec{T}_2)$$

$$\text{Soit : } \frac{dL_{Az}}{dt} = -mg a \cos(\theta) + 0 + m'ga \cos(\frac{\theta}{2})$$

$$\text{Le système étant à l'équilibre } \frac{dL_{Az}}{dt} = 0$$

On obtient : $-mg \cos(\theta) + m'g \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$
Soit : $-m \cos(\theta) + m' \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$

R3. Trouver la solution de cette équation. On pourra utiliser la relation $\cos(2u) = 2\cos^2(u) - 1$. On discutera de la condition sur m et m' pour que la solution existe.

Solution: La relation $-m \cos(\theta) + m' \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$ peut s'écrire :

$$-m \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) + m' \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

En utilisant la relation proposée ($\cos(2u) = 2\cos^2(u) - 1$), on obtient :

$$-2m \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + m + m' \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

Que l'on peut remettre sous la forme :

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{m'}{2m} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2} = 0$$

On reconnaît un trinôme avec $X = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$:

$$X^2 - \frac{m'}{2m}X - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{m'}{2m}\right)^2 + 4\frac{1}{2}$$

$$\Delta = \left(\frac{m'}{2m}\right)^2 + 2$$

Δ est positive, les solutions sont :

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{m'}{2m} + \sqrt{\left(\frac{m'}{2m}\right)^2 + 2}}{2} \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{m'}{2m} - \sqrt{\left(\frac{m'}{2m}\right)^2 + 2}}{2}$$

La deuxième solution est négative, il ne reste que la solution $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{m'}{2m} + \sqrt{\left(\frac{m'}{2m}\right)^2 + 2}}{2}$

Si m' est très petit devant m alors $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ tend vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cela implique que $\frac{\theta}{2}$ tend vers $\frac{\pi}{4}$ et θ tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Cela n'est possible que si le fil qui relie M avec N est infini. dans le cas contraire, l'angle maximal est lié à la longueur du fil MN .

Reste que si le rapport $\frac{m'}{2m}$ devient trop grand (c'est déjà le cas si le rapport $\frac{m'}{2m}$ est supérieur à 2, c'est à dire si m' est supérieur à $4m$), la solution n'aura plus de sens mathématique car $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ deviendrait supérieur à 1.

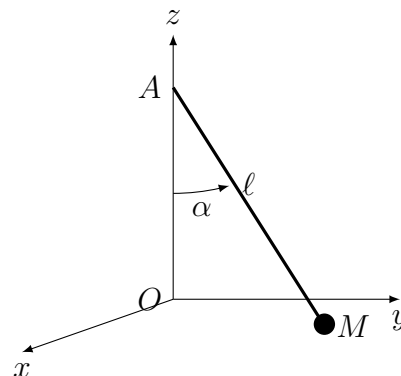
La valeur maximal pour $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ sera donc 1, ce qui correspond, quand $\frac{m'}{2m}$ devient trop grand à un angle $\theta = 0$

Exercice n°6 Pendule conique 🎵 🎵 🎵

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur ℓ attaché en un point A fixe d'un axe (Oz) .

Le point matériel M est astreint à tourner autour de (Oz) , dans le plan (Oxy) , à la vitesse angulaire constante ω dans le référentiel galiléen d'étude $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

En appliquant le théorème du moment cinétique en un point astucieusement choisi, déterminer l'angle d'inclinaison constant α du pendule avec l'axe (Oz) en fonction de ℓ , g et ω .



Solution:

Système : point matériel $M(m)$

Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

— poids $m\vec{g}$

— tension du fil $\vec{T}$

La tension du fil est une force inconnue, il est donc préférable d'appliquer le TMC par rapport à un point qui permet de ne pas la faire intervenir : c'est le cas par rapport au point A , car $\vec{T}$ est colinéaire à $\vec{AM}$, donc $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}) = \vec{0}$.

$$\text{LMC par rapport à } A : \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A(m\vec{g}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T})$$

Le mouvement de M est circulaire, car ℓ et α sont constants, $\vec{L}_A(M) = \vec{AM} \wedge m\vec{v}(M) = (-z_A\vec{u}_z + r\vec{u}_r) \wedge mr\dot{\theta}\vec{u}_\theta = mr\dot{\theta}z_A\vec{u}_r + mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$

La vitesse angulaire ω , le rayon r et l'altitude de A sont constantes, donc $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = mr\omega z_A\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \vec{0}$

$$\vec{\mathcal{M}}_A(m\vec{g}) = \vec{AM} \wedge m\vec{g} = mg\ell \sin(\alpha)\vec{u}_\theta$$

le TMC donne donc : $mrz_A\omega^2 = mg\ell \sin(\alpha)$

De plus, $\cos(\alpha) = \frac{z_A}{\ell}$ et $\sin(\alpha) = \frac{r}{\ell}$

$$\text{Ainsi : } \ell^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \omega^2 = g\ell \sin(\alpha), \text{ soit } \boxed{\cos(\alpha) = \frac{\ell\omega^2}{g}}$$

Ce n'est possible que si $\omega > \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.