

? À rendre LUNDI 20 avril 2026

Devoir Maison n°16 – Mouvement à force centrale

Travail à effectuer :

- Exercice n°1 : Obligatoire pour tou.te.s
- Au choix : exercice n°2 (plus facile) ou exercice n°3 (plus difficile).
- Exercice n°3 : les questions précédées d'une 🎵 sont obligatoires pour tou.te.s les étudiant.e.s, les autres questions sont facultatives, conseillées au étudiant.e.s à l'aise.

- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Masse molaire du CO_2 : $M = 44,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- Coefficient isentropique du CO_2 : $\gamma = 1,30$
- Masse volumique de la glace : $\rho_g = 917 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Capacité massique de l'eau liquide : $c_\ell = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Capacité massique de l'eau solide : $c_s = 2,09 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Enthalpie massique de fusion de l'eau à $T_0 = 0 \text{ °C}$ et sous 1 bar : $\Delta_{\text{fus}}h(T_0) = 335 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Entropies molaires du gaz parfait :
 - $S_m(T, P) = C_{P,m} \ln \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right) - R \ln \left(\frac{P}{P_{\text{ref}}} \right) + S_{m,\text{ref}}$
 - $S_m(T, V) = C_{V,m} \ln \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right) + R \ln \left(\frac{V}{V_{\text{ref}}} \right) + S_{m,\text{ref}}$
 - $S_m(P, V) = C_{V,m} \ln \left(\frac{P}{P_{\text{ref}}} \right) + C_{P,m} \ln \left(\frac{V}{V_{\text{ref}}} \right) + S_{m,\text{ref}}$
- Entropie massique d'une phase condensée : $s(T) = c \ln \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right) + s_{\text{ref}}$

Exercice n°1 Un cycle

On considère le cycle monotherme $ABCA$ décrit par une masse m de CO_2 gazeux, assimilé à un gaz parfait de masse molaire M et de coefficient γ supposé constant.

- Transformation $A \rightarrow B$: le gaz, initialement à la température $T_A = T_1$, subit une compression adiabatique réversible qui le porte à la température $T_B = T_2$.
- Transformation $B \rightarrow C$: le gaz, évoluant à volume constant, revient à la température initiale au contact d'un thermostat de température T_1 .
- Transformation $C \rightarrow A$: le gaz est ramené à l'état initial A par une détente isotherme réversible.

Q1. Représenter l'allure de ce cycle dans un diagramme (P, V) .

Q2. Exprimer puis calculer les valeurs numériques des paramètres P, T, V dans chacun des états A, B et C à partir des données suivantes : $m = 1,00 \text{ g}$; $V_A = 8,20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$; $P_A = 1,00 \text{ bar}$; $a = \frac{P_B}{P_A} = 10,0$.

Q3. Établir les expressions des travaux et des transferts thermiques reçus par le gaz au cours de chacune des transformations $A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow A$, en fonction de $m, M, R, \gamma, T_1, T_2$ et a . Faire les applications numériques.

Q4. Calculer les variations d'entropie du gaz au cours des transformations $B \rightarrow C$ et $C \rightarrow A$. Comparer ces deux variations d'entropie et expliquer le résultat obtenu.

Q5. Calculer l'entropie échangée par le gaz au cours de la transformation $B \rightarrow C$. En déduire l'entropie créée au cours de cette transformation. Commenter.

Exercice n°2 Fabrication d'un glaçon 🎵

En vue des températures élevées qui vont s'annoncer, vous souhaitez fabriquer des glaçons pour pouvoir boire ensuite des jus de fruits frais.

Pour cela, vous remplissez les bacs à glaçon d'une masse $m = 100$ g d'eau liquide, initialement à $T_i = 20$ °C, et vous le placez dans le congélateur de température $T_c = -18$ °C.

- Q1. Qualifier le plus précisément possible la transformation.
- Q2. Que peut-on dire sur l'état d'équilibre final du système ?
- Q3. Définir le chemin fictif permettant d'exprimer la variation de l'enthalpie et d'entropie du système.
- Q4. Exprimer la variation de l'enthalpie.
- Q5. Exprimer le transfert thermique reçu par le système au cours de la transformation. Faire l'application numérique. Commenter le signe.
- Q6. En déduire l'entropie échangée par l'eau.
- Q7. Exprimer la variation d'entropie de l'eau.
- Q8. En déduire l'entropie créée et commenter.

Exercice n°3 Détente d'un gaz parfait 🎵 🎵

Un cylindre non calorifugé, fermé par un piston, contient une mole de gaz parfait dans l'état initial ($T_1 = 273$ K, $P_1 = 3,0$ bar). Ce système est plongé dans un bain eau-glace constituant un thermostat à 0 °C. On agit sur le piston mobile pour détendre, très lentement le gaz jusqu'à la pression $P_2 = 1,0$ bar.

- Q1. Qualifier la transformation subie par le gaz parfait.
- Q2. Exprimer la variation de l'énergie interne du gaz parfait, le travail des forces de pression et le transfert thermique reçus par le gaz parfait.
- Q3. En déduire le transfert thermique reçu par le bain eau-glace.
- Q4. Déterminer la masse m de glace apparaissant dans le thermostat.
- Q5. Calculer la variation d'entropie du gaz, l'entropie échangée par le gaz ainsi que la création d'entropie. Commenter.
- Q6. Effectuer le bilan d'entropie du bain eau-glace.

Exercice n°4 De l'évolution du concept d'atome au cours du XX^e siècle

Ce problème aborde certaines étapes de l'histoire des sciences qui ont permis, au cours du XX^e siècle, de préciser la structure et les propriétés de l'atome.

Les effets liés à la gravité seront négligés dans l'ensemble du problème.

Données

- Constante de Planck : $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Charge électrique élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- Électronvolt : $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
- Permittivité absolue du vide : $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Partie A Limite du modèle de J.J. Thomson à travers l'expérience de E. Rutherford

En 1898, *J.J. Thomson* fait l'hypothèse que les atomes sont constitués d'électrons emprisonnés dans une sorte de gelée de charges positives. Ce modèle est appelé modèle du « plum pudding », car *J.J. Thomson* compare les électrons aux raisins du célèbre dessert anglais. Le physicien *Jean Perrin* imagine, quant à lui, l'atome à l'image du système solaire. Il suppose que les électrons gravitent, à des distances immenses, autour d'un « soleil » d'électricité positive, sur des orbites pour lesquelles force coulombienne et force d'inertie s'équilibrent.

En 1909, *Ernest Rutherford*, procède à une série d'expériences dans lesquelles un faisceau de particules alpha (noyaux d'hélium 4 : ${}^4_2\text{He}$), ayant toutes la même énergie cinétique, est lancé contre une mince feuille d'or. Il observe que la majorité des particules alpha traversent la feuille d'or, mais qu'une faible proportion d'entre elles « rebondit » sur celle-ci. Le but de cette partie est de déterminer quel modèle est en accord avec cette observation expérimentale.

Nous nous plaçons d'abord dans le cadre du modèle de *J.J. Thomson*, supposant une répartition uniforme de la charge positive dans la feuille d'or.

Q1. Expliquer qualitativement pourquoi le modèle proposé par *J.J. Thomson* est incompatible avec les observations de *E. Rutherford*.

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre du modèle de *J. Perrin*, supposant l'existence d'un noyau massif de charge positive, et on étudie le mouvement de la particule alpha lors de son passage à proximité de ce noyau. Le noyau d'or, de charge positive ponctuelle $Z.e$, supposé ponctuel et immobile dans le référentiel galiléen du laboratoire, se situe au point O , origine d'un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Nous considérons qu'à l'instant initial $t = 0 \text{ s}$, la particule alpha, de masse m_α et de charge électrique $q_\alpha = +2e$, vient de « l'infini » avec un mouvement rectiligne uniforme selon $+\vec{e}_x$, à la vitesse v_0 , caractérisé par le vecteur vitesse $\vec{v}_0 = \vec{v}(t = 0) = v_0 \vec{e}_x$.

On désigne par b la distance du point O à la trajectoire de la particule à l'infini (Figure 1). À chaque instant t , on note $d(t)$ la distance entre la particule alpha et le point O .

La particule alpha est donc repérée par le vecteur position $\vec{OM} = d(t) \vec{e}_r$, avec $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ une base cylindrique locale directe.

Au plus proche du point O , la particule alpha est au point S , la distance minimale en ce point est notée d_m . La particule alpha est non relativiste. L'expérience est réalisée sous très faible pression.

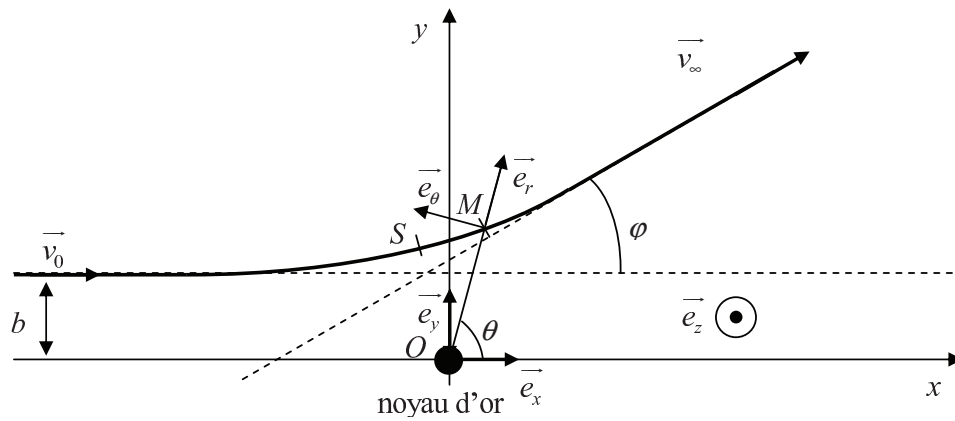


FIGURE 1 – Expérience de Ernest Rutherford

Q2. Donner l'expression de la force qui s'exerce sur la particule alpha en fonction de e , Z , d , ε_0 et \vec{e}_r . Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p qui y est associée, en considérant que $\lim_{d \rightarrow +\infty} E_p(d) = 0$, en fonction de e , Z , d et ε_0 . Réécrire ces deux expressions en fonction de $K = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0}$ et d .

Citer les propriétés de cette force qui permettent d'affirmer que le moment cinétique \vec{L}_O par rapport au point O et l'énergie mécanique E_M de la particule alpha se conservent.

Q3. Déterminer, en fonction de m_α et v_0 , l'énergie mécanique E_M de la particule alpha.

Q4. Exprimer le moment cinétique \vec{L}_O en fonction de b , m_α , v_0 et l'un des vecteurs unitaires du trièdre direct $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Pour cela, vous pourrez calculer \vec{L}_O en M_0 , position initiale de la particule alpha telle que $\vec{OM}_0 = X\vec{e}_x + b\vec{e}_y$.

Q5. Établir, à un instant t quelconque, l'expression du moment cinétique \vec{L}_O en fonction de $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, m_α , d et de l'un des vecteurs unitaires du trièdre direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. En déduire une relation entre d , b , $\dot{\theta}$ et v_0 .

Q6. Au sommet S de la trajectoire, le vecteur vitesse \vec{v}_s , de norme v_s , de la particule alpha est perpendiculaire au rayon vecteur \vec{OS} , de norme d_m . Déterminer un polynôme du second degré en d_m et en déduire l'expression de d_m en fonction de K , b , m_α et v_0 .

Q7. Malheureusement, b est inaccessible à la mesure. Par contre, l'angle de déviation φ est facilement mesurable. Il faut donc trouver la relation qui lie φ à b . Pour cela, vous écrirez le principe fondamental de la dynamique (P.F.D.) en fonction de K , d , m_α , \vec{v} et \vec{e}_r . Projeter le P.F.D. sur l'axe x en introduisant la composante v_x de la vitesse selon l'axe des x , et l'angle θ (Figure 1).

Réécrire cette équation en fonction uniquement de v_x , θ , $\dot{\theta}$, K , b , m_α et v_0 .

Intégrer cette équation entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$. On remarquera que $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) \approx \varphi$.

En déduire que la relation qui lie φ et b : $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{K}{bm_\alpha v_0^2}$

On rappelle que : $\cos(\varphi) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ et $\sin(\varphi) = 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

Q8. À partir de quelle valeur de φ les particules alpha rebondissent-elles sur la feuille d'or ? Expliquer pourquoi le modèle de *J. Perrin* permet d'interpréter les observations de *E. Rutherford*.

Nous nous proposons maintenant d'évaluer une borne supérieure de la dimension de ce noyau.

Q9. Montrer que la relation qui lie d_m à φ est : $d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)$.

Q10. Pour quelle valeur φ_m de l'angle φ , la distance d'approche est-elle minimale ? Déterminer, dans ce cas, l'expression de d_m en fonction de K , m_α et v_0 .

- Q11. Que vaut b pour $\varphi = \varphi_m$? Représenter l'allure de la trajectoire de la particule alpha pour cet angle et faire figurer d_m sur votre schéma. Justifier que d_m constitue une borne supérieure du rayon du noyau. Sachant que l'énergie typique d'une particule alpha est de 5 MeV et que le numéro atomique de l'or est $Z = 79$, déterminer numériquement la valeur de d_m .
- Q12. Justifier que, pour effectuer des expériences de physique nucléaire, il faut disposer de particules de haute énergie.

Partie B Limite du modèle planétaire

Le modèle de J.J. Thomson est écarté et l'on considère que les électrons évoluent, avec un mouvement circulaire uniforme, autour d'un noyau massif de charge électrique positive. Néanmoins, ce modèle est en contradiction avec une loi classique de l'électromagnétisme : toute particule chargée et accélérée émet de l'énergie électromagnétique. Pour mettre en évidence les conséquences de cette loi classique de l'électromagnétisme, nous allons étudier le mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène, de masse m_p et de charge électrique $q_p = +e$, sur une orbite circulaire de rayon r (Figure 2). Le noyau est considéré, dans le référentiel galiléen du laboratoire, fixe, ponctuel et placé en son centre C . Le centre de la trajectoire circulaire de l'électron est donc C .



FIGURE 2 – Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène

Pour étudier le mouvement circulaire de l'électron, nous allons utiliser le repère polaire pour lequel, en un point M de la trajectoire décrite par l'électron, on associe deux vecteurs unitaires \vec{e}_r et \vec{e}_θ (Figure 2). \vec{e}_θ est le vecteur tangent à la trajectoire du point M et dirigé dans le sens du mouvement. La position de l'électron est repérée par le vecteur position : $\vec{CM} = r\vec{e}_r$ et l'angle $\theta = (\vec{Cx}, \vec{CM})$.

- Q13. 🎵 Déterminer l'expression du vecteur vitesse \vec{v} de l'électron en fonction de e , m_e , ε_0 , r et d'un vecteur unitaire.
- Q14. 🎵 Exprimer l'énergie mécanique $E_M(r)$ de l'électron sous la forme $E_M(r) = A.f(r)$ où A est une constante négative dont vous préciserez l'expression en fonction de e , ε_0 et $f(r)$ une fonction qui ne dépend que de r que vous déterminerez également.
- Q15. Une loi classique de l'électromagnétisme indique que toute particule chargée et accélérée émet de l'énergie électromagnétique. Aussi, d'après cette théorie, l'électron devrait émettre un rayonnement électromagnétique de puissance moyenne :

$$P(r) = \frac{\omega^4 e^2 r^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

où ω est la vitesse angulaire de l'électron et c la vitesse de la lumière dans le vide.

Cette puissance peut être mise sous la forme $P(r) = P_0 \times \frac{1}{r^4}$, où P_0 est une constante.

Déterminer l'expression de P_0 et son unité.

Justifier que le rayon de la trajectoire de l'électron diminue au cours du temps.

- Q16. Montrer qu'il existe une relation différentielle de la forme : $r^2 \frac{dr}{dt} = \frac{P_0}{A}$.

- Q17. À $t = 0$, on suppose que l'électron se trouve sur une orbite de rayon R . Donner l'expression, en fonction de P_0 , R et A , du temps t_f mis par l'électron pour atteindre le noyau.
On donne $R = 1,0 \cdot 10^{-10}$ m, calculer t_f . Commenter le résultat obtenu.

Partie C Postulats de N. Bohr

Les contradictions théoriques précédentes vont être « levées » par *Niels Bohr*. En 1913, ce dernier postule d'une part, l'existence d'orbites circulaires sur lesquelles l'électron ne rayonne pas (postulat mécanique), et d'autre part, que le mouvement d'un électron d'une orbite à l'autre se traduit par l'émission ou l'absorption d'énergie électromagnétique (postulat optique).

Le postulat mécanique traduit la quantification de la norme du moment cinétique L de l'électron par rapport au centre de l'atome :

$$L = n \cdot \hbar = n \cdot \frac{h}{2\pi}$$

où n est le nombre quantique principal, $n \in \mathbb{N}^*$ et h la constante de Planck.

- Q18. 🎵 Déterminer l'expression de son moment cinétique en fonction de a , m_e , ε_0 et \vec{u}_z .
- Q19. 🎵 Montrer que le postulat mécanique implique que l'électron ne peut se trouver que sur certaines orbites de rayon $r_n = r_0 \cdot n^2$.
Préciser l'expression de r_0 en fonction de ε_0 , h , m_e et e . Calculer la valeur de r_0 .
- Q20. 🎵 Montrer que le postulat mécanique implique que l'électron qui se trouve sur une orbite de rayon r_n possède une énergie mécanique $E_M = -\frac{E_0}{n^2}$. Préciser l'expression de E_0 en fonction de ε_0 , h , m_e et e .
Calculer, en électronvolt, la valeur de E_0 . Que représente physiquement E_0 ?

Lorsqu'un électron va d'une orbite externe vers une orbite interne, on parle de réarrangement du cortège électronique ou de désexcitation et cela se traduit par l'émission d'un photon.

- Q21. Montrer que la longueur d'onde du photon émis est liée aux nombres quantiques n_i et n_f des orbites de départ et d'arrivée de l'électron par l'expression de Rydberg - Ritz : $\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left[\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right]$ avec $n_i > n_f$.
 R_H est la constante de Rydberg.
Préciser l'expression de R_H en fonction de E_0 , h et c . Indiquer sa valeur et son unité.

- Q22. Les raies de la série de Lyman sont celles pour lesquelles l'électron est revenu à la couche K ($n_f = 1$). Dans ce cas, la mesure des trois premières raies donne les longueurs d'onde suivantes : $\lambda_1 = 121,5$ nm; $\lambda_2 = 102,5$ nm; $\lambda_3 = 97,2$ nm.
À quelle partie du spectre électromagnétique ces longueurs d'onde correspondent-elles ? Calculer, à partir de ces valeurs expérimentales, la constante de Rydberg. Conclure.