Tu peux le faire
Ne doute pas de tes capacités
N'abandonne pas et reste concentré.e
Crois en toi
Tu as les ressources en toi pour réussir
Fais de ton mieux.
Ne lâche rien

Lundi 30 mars 2026 — Durée : 4 heures

Devoir Surveillé n°9 (2) — Mécanique & Thermodynamique

La calculatrice est INTERDITE

Check-list à cocher !

Sur la forme :	
Ma copie est rédigée sur des copies doubles.	❑
Prendre une nouvelle copie double pour chaque exercice.	❑
Ma copie est propre.	❑
Chaque réponse commence par une phrase / des mots.	❑
Les résultats littéraux sont encadrés, les applications numériques soulignées.	❑
Un long trait horizontal est tiré entre chaque question.	❑
Les pages sont numérotées.	❑
Sur le fond :	
Les expressions littérales sont homogènes.	❑
Les applications numériques sont suivies d'une unité adaptée.	❑

Ce sujet comporte 3 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de 8 pages.
Un document réponse est à rendre avec votre copie.

Contenu du DS :

Données numériques

■ Thermodynamique

- Capacité thermique massique de l'eau liquide $c_\ell = 4,18$ kJ · K^{-1} · kg^{-1}
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314$ J · K^{-1} · mol^{-1}
- Constante d'Avogadro $\mathcal{N}_{\mathcal{A}} = 6,022.10^{23}$ mol^{-1}.
- Enthalpie massique de fusion de l'eau à T_0 =0 °C : $\Delta_{\text{fus}}h(T_0) = 335$ kJ · kg^{-1}
- Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_\ell = 4,18$ kJ · K^{-1} · kg^{-1}
- Capacité thermique massique de l'eau solide (glace) : $c_g = 2,09$ kJ · K^{-1} · kg^{-1}
- Entropies molaires du gaz parfait :
  — $S_m(T,P) = C_{P,m}\ln\left(\dfrac{T}{T_{\text{ref}}}\right) - R\ln\left(\dfrac{P}{P_{\text{ref}}}\right) + S_{m,\text{ref}}$
  — $S_m(T,V) = C_{V,m}\ln\left(\dfrac{T}{T_{\text{ref}}}\right) + R\ln\left(\dfrac{V}{V_{\text{ref}}}\right) + S_{m,\text{ref}}$
  — $S_m(P,V) = C_{V,m}\ln\left(\dfrac{P}{P_{\text{ref}}}\right) + C_{P,m}\ln\left(\dfrac{V}{V_{\text{ref}}}\right) + S_{m,\text{ref}}$
- Entropie massique d'une phase condensée : $s(T) = c\ln\left(\dfrac{T}{T_{\text{ref}}}\right) + s_{\text{ref}}$
- $\forall x > 0,\ x - 1 - \ln(x) \geq 0$.

■ Mécanique

Grandeur	Symbole, valeur et unité
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3 · kg^{-1} · s^{-2}
Distance Terre-Soleil (unité astronomique)	$a_0 = 1\text{UA} = 1,50 \cdot 10^{11}$ m
Masse du Soleil	$M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg
Rayon du Soleil	$R_\odot = 6,96 \cdot 10^8$ m
Rayon de la Terre	$R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m
Période du mouvement de la Terre (année)	$T_0 = 365\text{j} = 3,16 \cdot 10^7$ s
Période du mouvement de Mars	$T_1 = 687\text{j}$
Seconde d'arc	$1'' = 4,85$ µrad

- $\left(\dfrac{5}{4}\right)^2 \simeq 1,6$ et $\left[\dfrac{687}{365}\right]^{1/3} \simeq \dfrac{5}{4}$

Exercice n°1 Thermodynamique *(Durée ∼ 1h)*

Partie I Deuxième principe

Q1. Deuxième principe de la thermodynamique :

(a) L'**énoncer** complètement.

(b) **Donner** les **noms** et **unités** des grandeurs y intervenants.

(c) Que peut-on dire sur l'entropie créée ?

Q2. **Citer** des causes d'irréversibilité.

Q3. Lois de Laplace

(a) **Énoncer** une loi de Laplace et les hypothèses permettant de les utiliser.

(b) **Établir** les deux autres lois de Laplace à partir de la précédente.

Partie II Bilan d'entropie sur un gaz parfait

On considère un échantillon de $n = 41$ mol de gaz parfait diatomique de coefficient $\gamma = 7/5$, de température initiale $T_i = 20$ °C est mis en contact avec un thermostat de température $T_0 = 100$ °C. Le gaz est enfermé dans une enceinte indéformable. (Cet exemple peut correspondre à une bouteille d'air en présence d'un incendie...).

Q4. **Exprimer** la variation d'entropie du système.

Q5. **Exprimer** le transfert thermique reçu par le gaz. **En déduire** l'entropie échangée.

Q6. **En déduire** l'entropie créée. Déterminer le signe et **conclure**.

Partie III Bilan d'entropie en présence d'une transition de phase

Q7. **Donner** la relation entre l'entropie massique de transition de phase et l'enthalpie massique de transition de phase. Quelles sont les unités de ces deux grandeurs ? Quelle est la température qui intervient dedans ?

En rentrant du challenge, après une mauvaise réception lors de la grande finale de balle au prisonnier, vous ressentez une douleur au poignet de votre main d'écriture. Ne souhaitant pas ne pas pouvoir écrire lors du merveilleux DS de physique, vous décidez de mettre du froid sur votre main. Vous sortez alors des glaçons de masse $m = 100$ g du congélateur à $T_i = -18$ °C. Une idée lumineuse de physique vous traverse alors l'esprit, et vous abandonnez ces glaçons (à leurs tristes sorts...) dans une assiette vide dans votre cuisine de température constante $T_c = 25$ °C.

La transformation est considérée comme isobare.

Q8. La transformation de l'eau est-elle isochore ?
Caractériser l'état final du système.

Q9. **Exprimer** le transfert thermique reçu par l'eau.

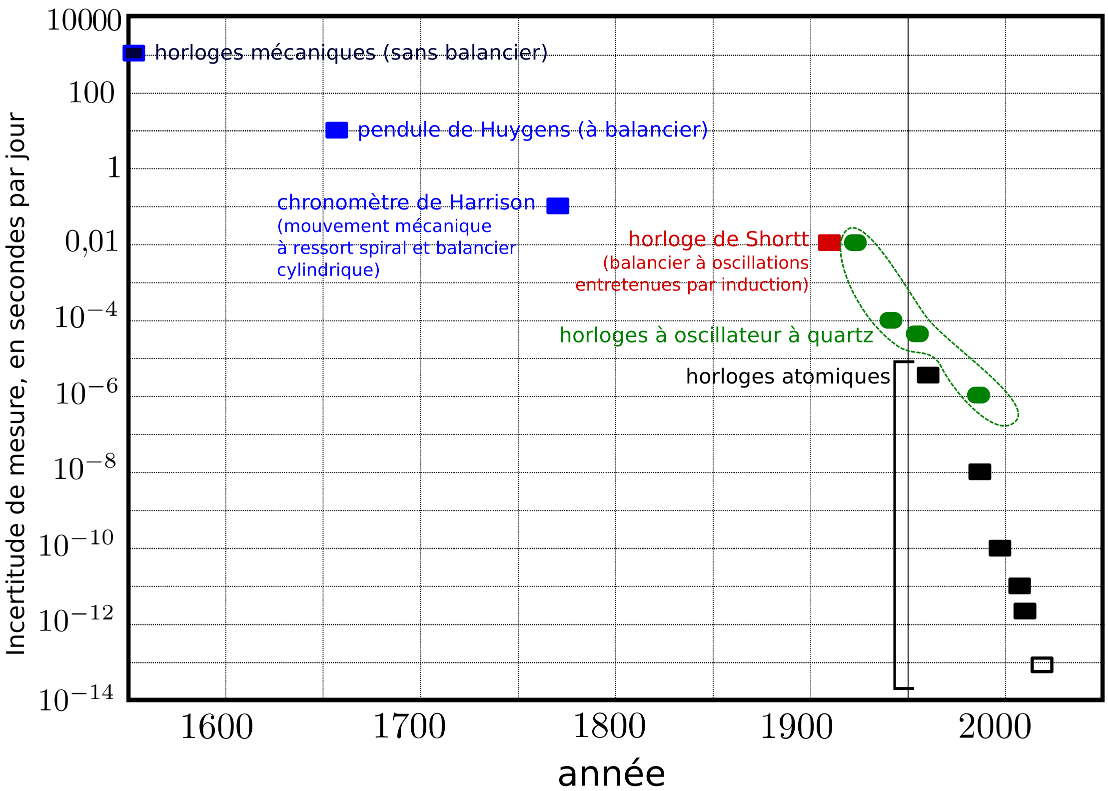
Q10. **Exprimer** la variation d'entropie du système au cours de la transformation.

Q11. **En déduire** l'entropie échangée reçue par l'eau.

Q12. **En déduire** l'entropie créée. **Commenter**.

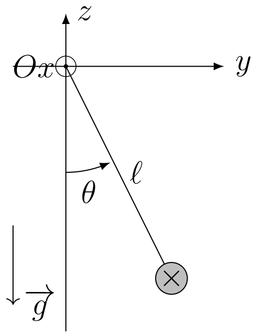
Exercice n°2 Mesure du temps par horloge à balancier *(Durée ∼ 1h30)*

La mesure du temps s'est faite par des moyens divers au cours de l'histoire de l'humanité : cadrans solaires, sabliers, pendules, circuits électroniques.... La précision de cette mesure s'est sans cesse améliorée, pour atteindre celle des horloges atomiques d'aujourd'hui.



Galilée montre vers 1610 que les oscillations d'un pendule sont isochrones : elles ne dépendent pas de l'amplitude du mouvement. Huygens exploite ceci à partir de 1657 pour concevoir une horloge dont le mouvement est régulé par les oscillations d'un pendule : la précision s'en trouve grandement améliorée. C'est ce type d'horloge que nous étudions.

On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M. Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligé. On note ℓ sa longueur. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On négligera tout frottement. Le champ de pesanteur est $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$, avec z vers le haut et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



Partie I Période des petites oscillations : analyse dimensionnelle

Q1. En utilisant l'analyse dimensionnelle, donner une expression de la période T des oscillations du pendule. Cette expression sera à une constante multiplicative A près, A étant sans dimension. On ne fera pas intervenir les conditions initiales dans l'analyse.

Afin d'obtenir A, il faut mener une analyse plus poussée du problème. C'est ce que nous faisons dans la suite.

Partie II Mise en équation et résolution dans le cas des petites oscillations

On suppose que le pendule est lâché d'un angle initial $\theta_0 \ll 1$ rad avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0 = 0$.

Q2. En utilisant le théorème du moment cinétique par rapport à (Ox), en déduire une équation du mouvement portant sur $\theta(t)$.

Q3. Faire une hypothèse qui permet de résoudre simplement cette équation. La résoudre en donnant l'expression de $\theta(t)$ en fonction de θ_0, g, l et t.

Q4. Donner l'expression T_0 de la période des oscillations.

Q5. Un peu avant la Révolution française, il a été proposé de définir l'unité « un mètre » comme la longueur du fil d'un pendule pour lequel une demi-oscillation dure une seconde (la période est donc de 2 s). Ce n'est finalement pas ceci qui a été retenu, mais une définition basée sur la longueur du méridien terrestre. Quelle est aujourd'hui la longueur d'un tel pendule ?

Partie III Expression de la période dans le cas des grandes oscillations

On remplace la ficelle par une tige rigide, de masse négligeable par rapport à la masse m. Ceci ne change donc rien à la mise en équation, et permet simplement au pendule de faire des mouvements de grande amplitude sans que la ficelle ne se détende (par exemple lorsque le pendule est vers $\theta = \pi$). La force exercée par la tige sur la masse ne travaille pas. On ne tiendra donc pas compte de cette tige.

Q6. Montrer que l'énergie mécanique $\mathscr{E}_m$ de la masse ponctuelle M peut s'écrire :

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos(\theta)$$

On suppose dans la suite que le pendule n'effectue pas de tour complet, et qu'il est lâché d'un angle θ_0 avec une vitesse angulaire initiale nulle.

Q7. Justifier qu'au cours du mouvement, $\mathscr{E}_m = -mg\ell\cos(\theta_0)$

Q8. En déduire une expression de l'angle infinitésimal $\mathrm{d}\theta$ parcouru par le pendule pendant un temps $\mathrm{d}t$.

Q9. En déduire que la période des oscillations du pendule s'écrit :

$$T = T_0 \times \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} \qquad (1)$$

Partie IV Expression approchée de la période dans le cas des oscillations pas trop grandes

L'équation (1) contient une intégrale difficile à exprimer analytiquement. Nous proposons ici d'obtenir une expression approchée de la période T sans passer par ce calcul d'intégrale.
On part de l'équation du mouvement $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$, avec $\omega_0^2 = \dfrac{g}{\ell}$, en on effectue les étapes suivantes :

- On utilise cette fois le développement de $\sin(\theta)$ à l'ordre supérieur : $\sin(\theta) \approx \theta - \dfrac{\theta^3}{6}$.
- L'équation différentielle obtenue n'est plus linéaire. On continue toutefois de chercher une solution sous la forme $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$.
- Pour exprimer le terme en θ^3, on utilise une formule trigonométrique :

$$\sin^3(\omega t) = \frac{3}{4}\sin(\omega t) - \frac{1}{4}\sin(3\omega t)$$

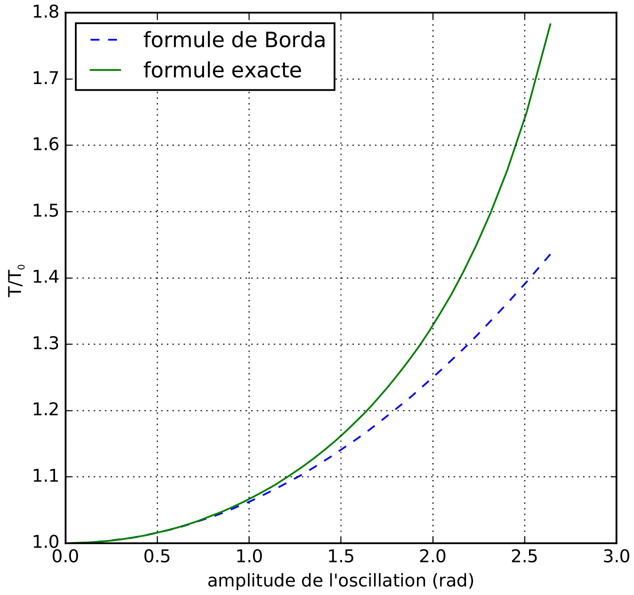
- On néglige le terme en $\sin(3\omega t)$.

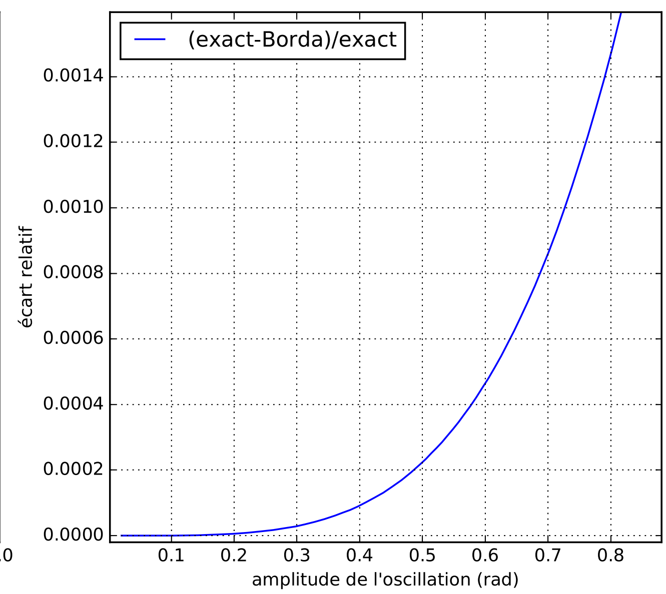
Q10. En suivant les indications ci-dessus, montrer qu'on aboutit à l'expression $\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \dfrac{\theta_0^2}{8}\right)$

Q11. En déduire qu'à l'ordre le plus bas en θ_0, on a l'expression suivante de la période des oscillations :

$$T = T_0 \times \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

Cette formule est appelée formule de Borda. Le graphique ci-dessous montre la comparaison entre T donnée par la formule exacte (relation 1) et T donnée par la formule de Borda.





On prend $\theta_0 = 30°$ et $T_0 = 1,0$ s.

Q12. En utilisant la formule de Borda, quel pourcentage d'erreur sur la période réelle commet-on ?

Q13. On utilise la formule de Borda. Si on compte 3600 oscillations du pendule, quelle durée s'est-elle écoulée ? D'après le graphique donné en début d'énoncé, peut-on dire que Huygens avait pris en compte la dépendance en θ_0 pour réaliser ses horloges ?

Exercice n°3 Mars *(Durée ∼ 1h30)*

Ce problème décrit des notions connues depuis le XVII[è] siècle (la mécanique céleste des trajectoires des planètes et les lois de Kepler et Newton).

Pour toutes les applications numériques, on se contentera de deux chiffres significatifs. Les notations des constantes fondamentales utiles, des données numériques sont regroupés en début d'énoncé.

On pourra noter $\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}$ la base cartésienne associée au repère $(Oxyz)$ et $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}$ la base locale associée aux coordonnées polaires r, θ du point M situé dans le plan (Oxy)

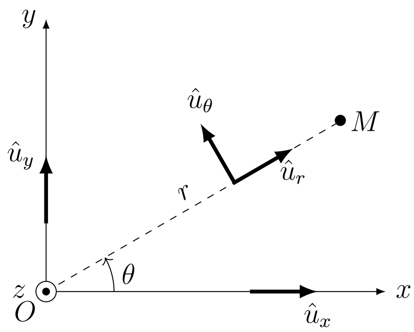


FIGURE 1 – Base locale associée aux coordonnées polaires

Ce problème est consacré aux lois de Kepler (1609 et 1618) et à une mesure historique de l'unité astronomique par CASSINI (1672). On notera que ces travaux sont toux deux nettement antérieurs à la publication de la loi de la gravitation universelle par Newton (1687).

On s'intéressera en particulier aux orbites de la Terre et de Mars, la planète la plus proche de la Terre avec une trajectoire extérieure. Le plan de sa trajectoire est presque confondu (à moins de 2° près) avec le plan de l'écliptique (la trajectoire terrestre). Ces deux trajectoires sont proches de cercles autour du Soleil.

Partie I Généralité sur le mouvement d'une planète sous l'action d'un astre attracteur

On étudie ici, relativement à un référentiel galiléen $(\mathcal{R}_0)$, le mouvement d'un astre $\mathscr{P}$ assimilé à un point P de masse m_P sous l'action du seul champ de gravitation exercé par un autre astre attracteur $\mathscr{A}$ de masse m_A et de centre fixe A. On notera $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{AP}$, $r = \|\overrightarrow{r}\|$ et $\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{u_r}$.

Q1. Quelle condition (inégalité forte) permet de considérer A comme fixe ?

Quelle est l'expression de la force gravitationnelle $\overrightarrow{F}$ exercée par $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{P}$ si les deux astres sont assimilés à des points ?

Q2. Montrer que le mouvement de P est plan ; on notera (Axy) le plan de ce mouvement. Définir la constante C issue de la loi des aires pour ce mouvement et relier cette constante aux coordonnées polaires (r, θ) du mouvement de P dans (Axy).

Q3. Exprimer l'énergie potentielle effective de P en fonction de $\mathcal{G}$, C, m_P, m_A et r.

Q4. Représenter l'allure de l'énergie potentielle effective.

Distinguer, en justifiant, les différents mouvements possibles selon la valeur de l'énergie mécanique.

Partie II Mouvement circulaire d'une planète

Dans cette parie uniquement, on étudie le cas particulier où $\mathscr{P}$ décrit une trajectoire circulaire de rayon R autour du centre de $\mathscr{A}$

Q5. Justifier que le mouvement de $\mathscr{P}$ est nécessairement uniforme.

Q6. Établir l'expression de $\|\overrightarrow{v_P}\|$ en fonction de $\mathcal{G}$, m_A et R.

Q7. En déduire la relation entre la période T de la trajectoire et le rayon R de la trajectoire.

Dans la suite, le mouvement n'est pas supposé circulaire et on cherche à établir les lois de Kepler dans le cas général.

Partie III Mouvements d'une planète sous l'action d'un astre attracteur

On note $\overrightarrow{v}$ la vitesse de P et $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ les vecteurs de la base polaire associée au mouvement de P. $\overrightarrow{v}$ est fonction du temps et donc aussi de l'angle polaire θ.

On admet que $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \times \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{1}{\dot{\theta}}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$

Q8. Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}\theta}$ et en déduire que $\overrightarrow{v}(\theta) = C\dfrac{\overrightarrow{u_\theta} + \overrightarrow{e}}{p}$ où $\overrightarrow{e}$ est une constante d'intégration et p un paramètre du mouvement qu'on exprimera en fonction de C, m_A et de la constante universelle de gravitation $\mathcal{G}$.

Q9. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{e}$ est sans dimension et situé dans le plan (Axy) du mouvement.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\overrightarrow{e} = e\overrightarrow{u_y}$ avec $e = \|\overrightarrow{e}\| \geqslant 0$.

Q10. Montrer que $\dot{r} = \dfrac{Ce}{p}\sin(\theta)$ et $r\dot{\theta} = \dfrac{C}{p}\Big(1 + e\cos(\theta)\Big)$.

Q11. En déduire r en fonction de p, e et θ et montrer que $e < 1$ pour un mouvement borné. Quelle est, dans ce cas et sans démonstration, la nature de la trajectoire ? On admettra que le mouvement est périodique de période T.

Partie IV Période du mouvement

Q12. En utilisant la constante des aires et la question précédente, montrer que $T = \dfrac{\mathcal{I}p^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}m_A}}$ où la constante $\mathcal{I}$ s'obtient par le calcul de l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}$.

Q13. Dans le cas particulier où $e = 0$, préciser la nature de la trajectoire et l'expression de T ; en déduire une des lois de Kepler, préciser laquelle et proposer son énoncé «historique» sous forme d'une phrase en français.

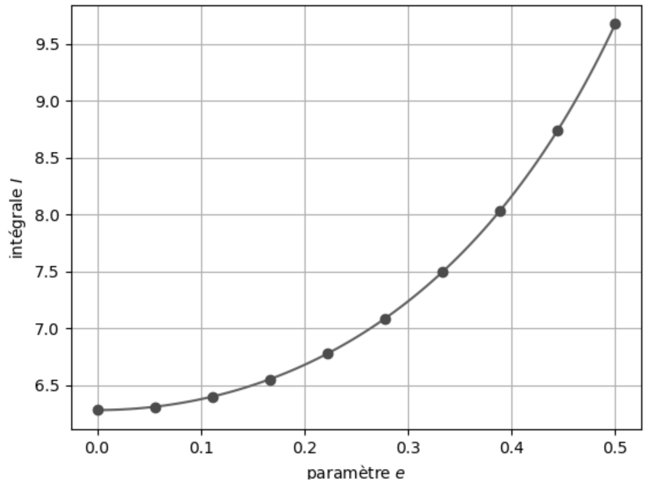


FIGURE 2 – Calcul numérique de l'intégrale $\mathcal{I}$

Partie V Mesure de l'unité astronomique

Nous admettrons pour la Terre et Mars des orbites circulaires centrées au centre S du référentiel de COPERNIC, de rayons respectifs a_0 (c'est l'unité astronomique) et a_1, de périodes T_0 et T_1.
Le principe de la mesure de a_0 proposée par CASSINI, à la fin du XVII$^{\text{è}}$ siècle, consistait à observer simultanément, depuis deux observatoires bien séparés (Paris et Cayenne, distants en ligne droite de $\ell = 7070$ km) la planète Mars lorsqu'elle est à sa distance minimale de la Terre, puis d'évaluer l'angle α entre les deux directions de visée (Paris $\to$ Mars et Cayenne $\to$ Mars).

FIGURE 3 – La Terre et la Lune vues depuis Mars par la sonde Mars Global Surveyor, photo NASA

Q14. Représenter sur un schéma unique l'ensemble des paramètres géométriques a_0, a_1, ℓ, α ci-dessus au moment de la mesure, lors d'une conjonction inférieure (le Soleil, la Terre et Mars sont alignés dans cet ordre).

Q15. En déduire la relation permettant de déterminer a_0 en fonction de T_0, T_1, ℓ et α.

Q16. La valeur annoncée par CASSINI était $\alpha = 14''$ (secondes d'angle). Est-elle compatible avec la relation ci-dessus ?