? À rendre MERCREDI 6 mai 2026

Devoir Maison n°18 — Rotation d'un solide

Travail à effectuer : Traiter au choix

- ♪ Exercice n°1 : sauf Q2 et Q8.
- ♪ ♪ Exercice n°1 en entier.
- ♪ ♪ ♪ Exercice n°2, les questions indiquées (♪ ♪ ♪ ♪) sont optionnelles.

Exercice n°1 Utilisation de l'énergie houlomotrice

Ce problème étudie différents aspects de la production électrique à partir de l'énergie houlomotrice.
On considère un système à corps oscillant avec une partie fixe au fond de l'eau et une partie mobile, comme par exemple le dispositif Oyster dispositif dont la partie supérieure dépasse légèrement de l'eau, qui est testé au large de l'Écosse, ou comme le dispositif WaveRoller, dispositif complètement immergé, développé par une société finlandaise et qui est testé au large du Portugal.

FIGURE 1 – Dispositifs Oyster (à gauche) et WaveRoller (à droite).

On modélise ce dispositif par un pendule pesant composé d'un solide S en rotation autour de l'axe Oy et complètement immergé dans l'eau. Le pendule est fixé au sol (au fond de la mer) par un dispositif non représenté sur le schéma. Le point O est donc fixe par rapport au sol. Les mouvements ont lieu dans le plan vertical (xOz). Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ forment une base orthonormée directe.

On note :

- m la masse et V le volume du solide S ;
- J le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oy ;
- d la distance entre l'axe de rotation et le centre de gravité du solide $d = OG$;
- ρ_e la masse volumique de l'eau ;
- Ω la vitesse angulaire de rotation du pendule.

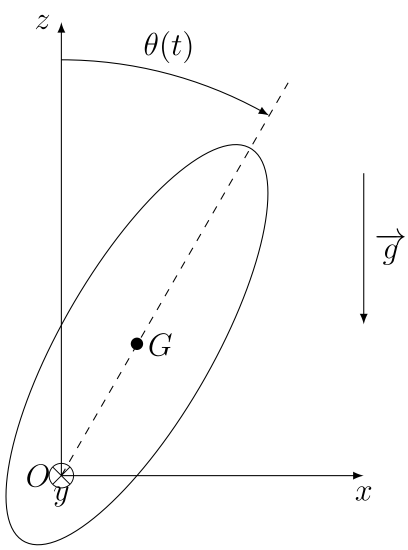


FIGURE 2 – Pendule pesant, notations

On suppose que :

- le référentiel terrestre est galiléen ;
- le centre de poussée (point d'application de la poussée d'Archimède) pour le solide S est ici confondu avec son centre de gravité G ;
- il existe un couple résistant exercé au niveau de l'axe de rotation du pendule de la forme : $\overrightarrow{C} = -\alpha\dot{\theta}\overrightarrow{u_y}$;
- la houle exerce une force de la forme $\overrightarrow{F} = \beta\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$ en G.

Q1. Donner l'expression de la poussée d'Archimède subie par le pendule, en fonction de V, ρ_e et $\overrightarrow{g}$.

Q2. ♪ ♪ En raisonnant de manière qualitative sur les forces, déterminer la condition sur ρ_e, m et V pour que, en absence de houle, la position d'équilibre stable du pendule corresponde à $\theta = 0$.

Q3. Déterminer les moments des différentes forces s'exerçant sur le solide S par rapport à l'axe Oy.

Q4. Établir l'équation du mouvement du solide S, c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par θ.

Q5. On se place dans l'approximation des petits angles. Linéariser alors l'équation différentielle précédente. On mettra l'équation sous la forme

$$\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta(t) = f(t)$$

et on précisera les expressions des différents termes λ, ω_0 et $f(t)$.

On se place en régime sinusoïdal forcé. On note $\underline{\theta} = \theta_0(\omega)e^{j(\omega t+\varphi)}$ et $\theta = Re(\underline{\theta})$.

Q6. En passant l'équation différentielle en notation complexe, exprimer $\underline{\theta}$ en fonction de β, λ, ω_0, ω et $e^{j\omega t}$.

Q7. Déterminer l'expression de $\theta_0(\omega) = |\underline{\theta}|$.

La puissance récupérée est proportionnelle à $\dot{\theta}^2$: on la note $\mathscr{P}_r(t) = \gamma\dot{\theta}^2$.

Q8. ♪ ♪ Montrer que la puissance moyenne $\mathscr{P}_m$ récupérée s'écrit :

$$\mathscr{P}_m = \frac{\dfrac{\gamma\beta^2 d^2}{2J^2}}{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + \lambda^2}$$

<u>Indications</u> (j'espère que vous mesurez la chance que vous avez ! ces indications n'étaient pas présentes dans le sujet initial) :

— Pour que cela soit plus simple pour la suite, arrangez-vous pour que ω n'intervienne qu'au dénominateur.

— On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f périodique de période T est définie par $\langle y\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.

— On rappelle que $\langle\cos^2(x)\rangle = \langle\sin^2(x)\rangle = \dfrac{1}{2}$

Q9. Pour quelle pulsation y a-t-il résonance ? Tracer l'allure de $\mathscr{P}_m$ en fonction de ω.

Q10. Calculer la pulsation propre ω_0 puis la période propre T_0.
Données : accélération de la pesanteur $g = 10\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, $d = 10$ m, $V = 1000\ \mathrm{m}^3$, $m = 300$ t et on prendra $J \approx md^2$.

Exercice n°2 De la physique à Fort Boyard

Fort Boyard, célèbre émission de divertissement estivale, est un jeu dans lequel des candidats doivent effectuer des épreuves pour remporter les clés qui leur ouvriront la salle du Trésor. L'une d'entre elles est l'épreuve de la balance (figure 3). Dans cette épreuve, deux candidats doivent se mouvoir sur les deux branches d'une balance suspendue au-dessus de la mer, afin de récupérer les deux parties d'un code situées à chaque extrémité de la balance, ce code leur permettant de libérer la clé. La difficulté repose sur le fait que la balance peut pencher d'un côté ou de l'autre, à tel point qu'un candidat peut tomber à l'eau !

FIGURE 3 – Épreuve de la balance à Fort Boyard

Dans ce problème, on va montrer que cette épreuve a été conçue pour maintenir le suspens auprès du téléspectateur : tout est fait pour rendre la tâche difficile aux candidats, sans pour autant la rendre impossible !

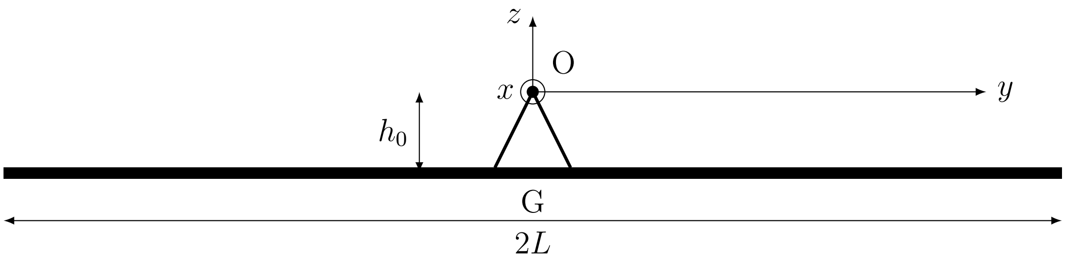


FIGURE 4 – Schéma de la balance.

On modélise sur la figure 4 la balance par une tige rigide homogène de longueur $2L = 6,0$ m, et de masse $m_b = 20$ kg. La balance est attachée en son milieu à un support triangulaire, le sommet supérieur de ce triangle étant le point O, par lequel passe l'axe de rotation de la balance. On néglige la masse de ce support triangulaire, si bien que le centre d'inertie G de la balance et du support se situe au milieu de la balance. On définit un repère $(Oxyz)$ centré sur O, tel que la balance tourne autour de l'axe (Ox) orienté par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$. Lorsque la balance est horizontale, son centre d'inertie G se trouve sous O à une distance h_0. On suppose que la liaison pivot autour de l'axe de rotation est parfaite, et on négligera tous les frottements de l'air. L'accélération de la pesanteur est $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Les deux candidats de masses différentes descendent sur la balance à l'aide de deux échelles, puis chacun d'eux se positionne sur une des branches de la balance. On notera respectivement $m_1 = 90$ kg et $m_2 = 65$ kg les masses des deux candidats. On note J le moment d'inertie autour de l'axe (Ox) de l'ensemble constitué de la balance et des candidats posés sur celle-ci.

Partie A Stratégie perdante

Dans cette partie, on va étudier de quelle manière les candidats doivent procéder pour atteindre les deux parties du code. On suppose tout d'abord que les candidats sont à cheval sur la balance. Ils sont donc assimilés à deux points matériels C_1 et C_2 posés sur chacune des branches de la balance. La balance est supposée horizontale et à l'équilibre. On repère les positions des candidats par $\ell_1 = GC_1$ et $\ell_2 = GC_2$ (attention : cela ne correspond pas à la figure 5).

Q1. Énoncer le théorème du moment cinétique pour un solide.

Q2. Déterminer une relation entre m_1, m_2, ℓ_1 et ℓ_2 traduisant l'équilibre de la balance.

Q3. Le candidat 2 (le plus léger) peut-il atteindre le bout de la planche sans difficulté ? Si oui, où devra être situé le candidat 1 ?

Q4. Déterminer la position maximale $\ell_{1\,\max}$ que peut atteindre le candidat 1 sans tomber et en faire l'application numérique. Quel problème cela pose-t-il pour les candidats ?

Partie B Stratégie gagnante

On étudie maintenant la situation où le candidat le plus lourd se couche sur la balance, afin que ses mains puissent atteindre le code (figure 5). Pour modéliser cela, on assimile le candidat de masse m_1 à une tige homogène (T) de longueur ℓ_0 et de masse linéique μ, de telle sorte que l'extrémité de cette tige se trouve en $y = L$. Le deuxième candidat, toujours assimilé à un point matériel C_2, se trouve en $y = -L$.

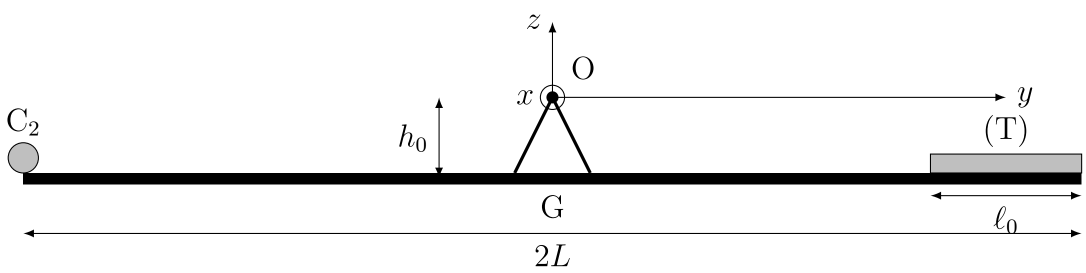


FIGURE 5 – Candidat le plus lourd couché sur la balance.

Q5. Exprimer le moment $\mathcal{M}_{(Ox)}(\mathrm{T})$ du poids de la tige (T) en fonction de m_1, g, L et ℓ_0.

Q6. Déterminer, en fonction de m_1, m_2 et L, la longueur ℓ_0 permettant que l'équilibre horizontal de la balance soit respecté.

Faire l'application numérique.

L'épreuve vous parait-elle gagnable dans cette situation ?

Partie C Risques pour les candidats

En pratique, il est difficile pour les candidats de conserver en permanence des positions qui leur permettent de maintenir la balance à l'équilibre horizontal. La balance va alors pencher d'un côté ou de l'autre. Dans cette partie, on s'intéresse aux situations où la balance s'incline par rapport à l'horizontale (figure 6). Pour repérer l'inclinaison de la balance, on introduit l'angle θ entre la verticale descendante et le vecteur $\overrightarrow{OG}$. Les candidats seront assimilés à deux points matériels C_1 et C_2 ; on conserve les notations ℓ_1 et ℓ_2 introduites dans la Exercice n°2 pour identifier leur position.

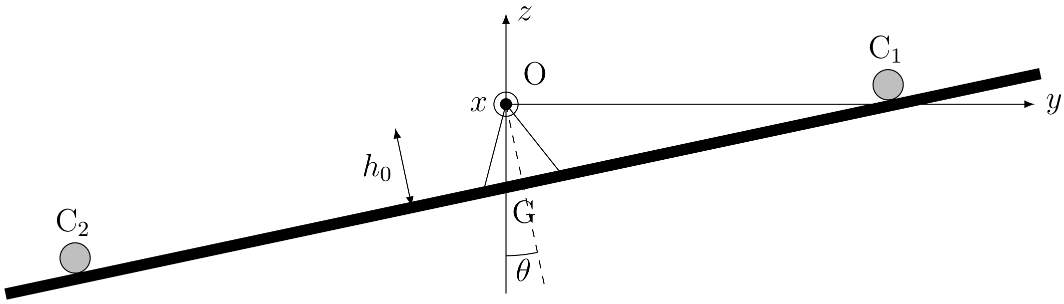


FIGURE 6 – Balance inclinée

Q7. (♪ ♪ ♪ ♪) Montrer que le moment du poids du candidat C_1 est égal à :

$$\mathcal{M}_{(Ox)}(C_1) = -m_1 g \left(h_0 \sin\theta + \ell_1 \cos\theta\right)$$

Q8. (♪ ♪ ♪ ♪) Calculer de manière analogue le moment $\mathcal{M}_{(Ox)}(C_2)$ du poids du candidat C_2.

Q9. (♪ ♪ ♪ ♪) Montrer que l'équation différentielle du mouvement est :

$$J\ddot{\theta} + (m_1\ell_1 - m_2\ell_2)\, g\cos\theta + (m_1 + m_2 + m_b)\, g h_0 \sin\theta = 0$$

On suppose que les candidats sont initialement à des positions qui correspondent à l'équilibre de la balance à l'horizontale (condition explicitée à la question Q2). Mais à l'instant $t = 0$, une perturbation (vent, faux geste...) conduit la balance à acquérir une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0$.

Q10. Simplifier l'équation différentielle dans ce cas. L'équation différentielle devra s'exprimer uniquement en fonction de m_1, m_2, m_b, J, h_0, g, θ et $\ddot{\theta}$.

Q11. Résoudre cette équation en faisant une approximation qu'on explicitera.

Q12. Exprimer la période des oscillations.

Q13. Exprimer J en fonction de J_B, le moment d'inertie de la balance, m_1, m_2, ℓ_1, ℓ_2 et h_0.

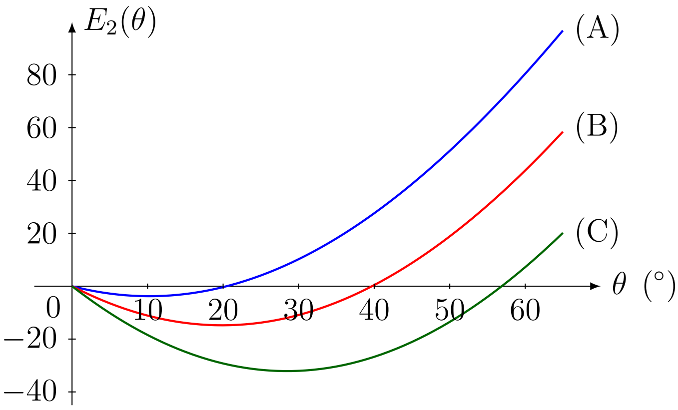
Q14. Comment évolue la période des oscillations lorsque les candidats s'éloignent du centre de la balance ?

Q15. (♪ ♪ ♪ ♪) Partant d'une situation où la balance est à l'équilibre, le candidat C_2 s'avance sur sa branche d'une distance $\Delta\ell_2$. À partir de l'équation du mouvement (question Q9), montrer que la grandeur $E = E_1 + E_2$ est une intégrale première du mouvement, avec :

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{1}{2} J\dot{\theta}^2 \\ E_2 = -m_2 g \Delta\ell_2 \sin\theta - (m_b + m_1 + m_2)\, g h_0 (\cos\theta - 1) \end{cases}$$

Q16. Interpréter la signification de E, E_1 et E_2.

On souhaite étudier le mouvement de la balance à partir de la représentation graphique de $E_2(\theta)$. On a tracé ci-dessous $E_2(\theta)$ pour plusieurs valeurs de $\Delta\ell_2$ (Figure 7). L'axe des abscisses est gradué en degrés, l'axe des ordonnées en unités arbitraires.



Courbe (A)	$\Delta\ell_2 = h_0/2$
Courbe (B)	$\Delta\ell_2 = h_0$
Courbe (C)	$\Delta\ell_2 = 3h_0/2$

FIGURE 7 – Courbes de $E_2(\theta)$

Q17. On part d'une situation où la balance est à l'équilibre horizontal. À partir des courbes de $E_2(\theta)$, décrire qualitativement le mouvement qui va avoir lieu lorsqu'un candidat s'écarte de la position assurant l'équilibre de la balance.

Q18. Lorsque la balance dépasse une inclinaison de 40°, on constate que la plupart des candidats tombent à l'eau. À partir de quelle valeur de $\Delta\ell_2$ cela risque-t-il d'arriver ? Donner une estimation numérique de $\Delta\ell_{2,\mathrm{lim}}$ à partir du tracé de $E_2(\theta)$.

Q19. Conclure : sur quel paramètre de la balance les concepteurs de l'épreuve peuvent-ils agir pour rendre celle-ci plus ou moins difficile pour les candidats ; expliquer comment ?