Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)
TD n°20 Mouvement d'un solide– *Corrigé*

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.	✎		✎						✎
Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎
Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.						✎			
Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.	✎		✎		✎		✎	✎	
Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎
Pendule pesant : Établir l'équation du mouvement. Établir l'intégrale première du mouvement.	✎			✎					
Pendule de torsion : Établir l'équation du mouvement. Établir l'intégrale première du mouvement.					✎				
Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.						✎	✎		
Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.									✎
Prendre en compte le travail des forces intérieures pour un système déformable.						✎	✎		

Parcours possibles

♪ Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, 2 et 3.

♪ ♪ Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°2, n°3, n°4, n°5 (sauf Q4), n°6.

♪ ♪ ♪ Si vous êtes à l'aise : exercices n°4, n°5, n°6 (ou n°7), n°8, n°9.

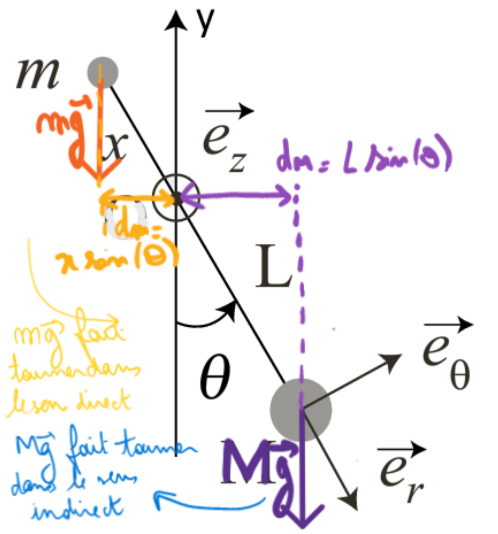
I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Métronome ♪

Un métronome est constitué de :

- un disque de masse M de rayon R, de moment d'inertie par rapport à (Oz), $J = \dfrac{MR^2}{4} + ML^2$,
- une masse m ponctuelle qui peut être accrochée à différents points d'abscisse x,
- une tige de masse négligeable attachée à la tige et située à une distance L fixe de l'axe Oz.

Tous les frottements sont négligés.



Le but est de comprendre l'origine de la graduation non linéaire présente sur les métronomes.

R1. Le moment cinétique d'un système est la somme des moments cinétiques des systèmes le composant.

(a) Quel mouvement décrit la masse m ? **Exprimer** le moment cinétique de la masse m par rapport à (Oz) en fonction de m, x et $\dot{\theta}$.

> **Solution:** Système : l'ensemble {tige+masse M+masselotte m}
> Référentiel : terrestre considéré galiléen
> Moment cinétique de la masse $A(m)$:
>
> $$\begin{aligned} L_{Oz}(A) &= (\overrightarrow{OA} \wedge m\overrightarrow{v}(A)) \cdot \overrightarrow{u_z} \\ &= \Big(-x\overrightarrow{e_r} \wedge m(-x\dot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}\Big) \cdot \overrightarrow{e_z} \\ &= mx^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

(b) **Rappeler** l'expression du moment cinétique du disque de moment d'inertie J par rapport à l'axe de rotation.

> **Solution:** Pour un solide en rotation : $L_{Oz}(\text{disque}) = J\omega = J\dot{\theta}$

(c) **En déduire** le moment cinétique de {tige+masse M+masselotte m} en fonction de m, M, L, x et $\dot{\theta}$.

> **Solution:** Moment cinétique de l'ensemble :
>
> $$\begin{aligned} L_{Oz}(\text{ensemble}) &= L_{Oz}(A) + L_{Oz}(\text{disque}) \\ &= mx^2\dot{\theta} + J\dot{\theta} \\ &= (mx^2 + J)\dot{\theta} \end{aligned}$$

R2. **Effectuer** un bilan des actions mécaniques agissant sur l'ensemble des deux masses et de la tige.

> **Solution:** Bilan des actions mécaniques :
> — action de la liaison pivot, de moment nul par rapport à (Oz), car parfaite
> — poids de M, de moment $\mathscr{M}_{Oz}(M\overrightarrow{g}) = -MgL\sin(\theta)$
> — poids de m, de moment $\mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) = mgx\sin(\theta)$

R3. **Établir** l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ.

R4. **En déduire** l'expression de la période T_0 des petites oscillations en fonction, notamment, de la position x de la masse supérieure.

> **Solution:** Théorème du moment cinétique par rapport à (Oz) :
>
> $$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t} &= \mathscr{M}_{Oz}(lpp) + \mathscr{M}_{Oz}(M\overrightarrow{g}) + \mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) \\ (mx^2 + J)\ddot{\theta} &= -MgL\sin(\theta) + mgx\sin(\theta) \\ \ddot{\theta} + \frac{(ML - mx)g}{mx^2 + J}\sin(\theta) &= 0 \\ \text{Pour des petites oscillations} \quad \sin(\theta) &\approx \theta \\ \text{Soit} \quad \ddot{\theta} + \frac{(ML - mx)g}{mx^2 + J}\theta &= 0 \end{aligned}$$
>
> On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{(ML - mx)g}{mx^2 + J}}$, donc

de période propre : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{mx^2+J}{(ML-mx)g}}$

R5. ♪ ♪ Pourquoi pour augmenter la fréquence d'oscillation d'une même quantité, le déplacement de la masselotte n'est pas toujours le même ?

Solution: La dépendance de T_0 avec x n'est pas affine, donc l'augmentation de x n'est pas constante pour une augmentation de T_0 donnée.

Exercice n°2 Démarrage d'un moteur ♪

On étudie la phase de mise en rotation du rotor S (partie tournante) d'un moteur de robotique dans le référentiel terrestre.

Le rotor S, de moment d'inertie $J = 10,7 \times 10^{-7}$ kg · m^2 est soumis à un couple moteur C_m dont la valeur est proportionnelle à l'intensité du courant i traversant le stator (partie fixe) du moteur : $C_m = ki$, avec $k = 22 \times 10^{-3}$ N · m/A. Le courant i est constant : $i = I_0 = 0,10$ A.

On suppose que le centre de masse G du rotor est sur l'axe de rotation Δ.

Dans un premier temps, on néglige tous les frottements.

R1. En utilisant le théorème du moment cinétique, **établir** l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire $\omega(t)$ de S.

Solution: Système : rotor (S)
Référentiel : terrestre, galiléen
Bilan des actions mécaniques :

- poids s'exerçant au centre d'inertie G, situé sur l'axe de rotation
- couple moteur de moment par rapport à l'axe de rotation $C_m = ki$
- frottements négligés

TMC par rapport à l'axe Δ : $\dfrac{\mathrm{d}L_\Delta(S)}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_\Delta(m\overrightarrow{g}) + C_m$

Or $\mathscr{M}_\Delta(m\overrightarrow{g}) = 0$, car G est sur l'axe Δ, donc la droite d'action du poids coupe l'axe de rotation

Ainsi $\boxed{J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = ki}$

R2. **La résoudre** en supposant qu'au départ S est au repos.

Solution: Ainsi $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{kI_0}{J}$ est une constante

Ainsi $\omega(t) = \dfrac{kI_0}{J}t + A$, avec $\omega(t=0) = 0 = A$

On en déduit $\boxed{\omega(t) = \dfrac{kI_0}{J}t}$

R3. **Déterminer** et **calculer** le temps T_0 mis pour atteindre la vitesse $\omega_0 = 1800$ rad · s^{-1}.

Solution: L'instant T_0 est tel que $\dfrac{kI_0}{J}T_0 = \omega_0$, soit $\boxed{T_0 = \dfrac{J\omega_0}{kI_0} = 0,88 \text{ s}}$

En réalité, le rotor S est soumis à un couple de frottement sec $C_s = -400$ µN · m et à un couple de frottement fluide $C_f = -\lambda\omega$, avec $\lambda = 1,0 \times 10^{-6}$ N · m · s, tous deux s'opposant au mouvement.

R4. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire $\omega(t)$ et l'**écrire** sous la forme canonique $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\omega}{\tau} = \dfrac{\omega_\infty}{\tau}$, et **identifier** τ et ω_∞.

Solution: Dans le TMC précédent, il faut ajouter le couple de frottement fluide $C_f = -\lambda\omega$ et le couple de frottement sec.

On obtient l'équation différentielle : $J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = C_s + kI_0 - \lambda\omega$

Soit, sous forme canonique : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\lambda}{J}\omega = \dfrac{C_s + kI_0}{J}}$

Dans laquelle on peut identifier la constante de temps $\boxed{\tau = \dfrac{J}{\lambda}}$

La solution générale s'écrit : $\omega(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \dfrac{C_s + kI_0}{\lambda}$

Or à $t = 0$, $\omega(0) = 0$, donc $A = -\dfrac{C_s + kI_0}{\lambda}$

On en déduit $\boxed{\omega(t) = \dfrac{C_s + kI_0}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

R5. Quelle est la vitesse angulaire maximale que pourra atteindre le moteur ? *La résolution de l'équation différentielle n'est pas nécessaire ici.*

Solution: La vitesse maximale est $\boxed{\omega_f = \omega(\infty) = \dfrac{C_s + kI_0}{\lambda}}$

R6. **Résoudre** complètement l'équation différentielle.

Solution: La solution générale s'écrit : $\omega(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \dfrac{C_s + kI_0}{\lambda}$

Or à $t = 0$, $\omega(0) = 0$, donc $A = -\dfrac{C_s + kI_0}{\lambda}$

On en déduit $\boxed{\omega(t) = \dfrac{C_s + kI_0}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

R7. **Établir** l'expression du temps T mis pour atteindre le régime permanent (à 5%). Conclure.

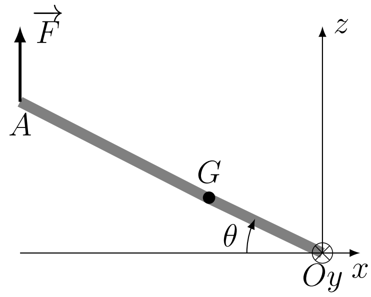
Solution: T est l'instant tel que

$$\begin{aligned}
\omega(t = T) &= 0,95\omega_f \\
\omega_f\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right) &= 0,95\omega_f \\
1 - e^{-\frac{T}{\tau}} &= 0,95 \\
e^{-\frac{T}{\tau}} &= 0,05 \\
T &= -\tau\ln(0,05)
\end{aligned}$$

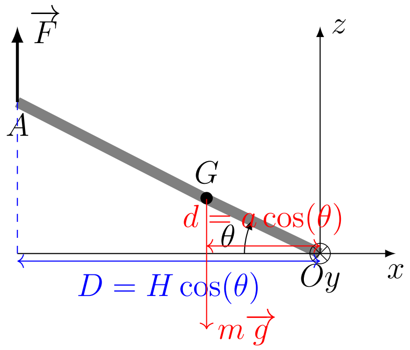
Le régime permanent est atteint à 95%, au bout de $T \approx 3\tau$.

Exercice n°3 Monter un mur ♪

On utilise une grue pour dresser un mur en béton préfabriqué à la verticale.
Le mur est initialement posé sur le sol ($\theta = 0$). La grue le soulève en exerçant une force $\overrightarrow{F}$ toujours verticale appliquée en A. Le mur pivote alors autour de l'axe (Oy) fixe. La base du mur est fixe sur le sol.
Le mur est de hauteur $H = OA = 3,0$ m, de masse $m = 5,0.10^3$ kg et son centre de masse G se situe à $OG = a = 1,2$ m de la base. Le moment d'inertie du mur par rapport à l'axe (Oy) est $J = 2,8.10^3$ kg $\cdot$ m^2.
On néglige tous les frottements.



R1. **Effectuer** un bilan des actions mécaniques exercées sur le mur.

> **Solution:**
> Système : mur de masse m, de centre d'inertie G, de moment d'inertie J
> Référentiel : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
> Bilan des actions mécaniques :
> — poids : $m\overrightarrow{g}$, qui s'exerce en G
> — action de la grue : $\overrightarrow{F}$, qui s'exerce en A
> — réaction du support : $\overrightarrow{R}$, qui s'exerce en O
>
> 
>

R2. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par θ.

> **Solution:**
> Loi du moment cinétique au mur par rapport à Oy dans le référentiel terrestre galiléen :
> $$\frac{\mathrm{d}L_{Oy}(\text{mur})}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{Oy}(m\overrightarrow{g}) + \mathcal{M}_{Oy}(\overrightarrow{F}) + \mathcal{M}_{Oy}(\overrightarrow{R})$$
> Avec $L_{Oy}(\text{mur}) = J\dot{\theta}$
> $\mathcal{M}_{Oy}(\overrightarrow{R}) = 0$ car la droite d'action de $\overrightarrow{R}$ coupe l'axe (Oy).
> $\mathcal{M}_{Oy}(m\overrightarrow{g}) = -mga\cos(\theta) < 0$: car le poids fait tourner le mur dans le sens indirect par rapport à l'axe (Oy).
> $\mathcal{M}_{Oy}(\overrightarrow{F}) = FH\cos(\theta) > 0$: car $\overrightarrow{F}$ fait tourner dans le sens direct
> Le TMC donne : $\boxed{J\ddot{\theta} = (FH - mga)\cos(\theta)}$

R3. Le mur pivote autour de sa base (Oy) avec une vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega_0 = 0,20$ rad $\cdot$ s^{-1} constante. **Déterminer et calculer** la norme de la force $\overrightarrow{F}$ exercée par la grue.

> **Solution:** Si la rotation se fait à vitesse angulaire constante, alors $\ddot{\theta}$ est nul pour tout angle θ.
> Ainsi $FH = mga$, soit $\boxed{F = mg\dfrac{a}{H} = 2,0.10^4 \text{ N}}$

R4. **Exprimer** la puissance de la force $\overrightarrow{F}$ puis le travail W effectué par la grue pour dresser le mur à la verticale. **Calculer** W.

> **Solution:**
> Puissance de la force : $\boxed{\mathcal{P}(\overrightarrow{F}) = \mathcal{M}_{Oy}(\overrightarrow{F}) \times \dot{\theta} = FH\omega_0\cos(\theta) = mga\omega_0\cos(\theta)}$
> Travail de la grue : $W = \int_0^{t_f} \mathcal{P}(\overrightarrow{F})\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{M}_{Oy}(\overrightarrow{F})\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mga\omega_0\cos(\theta)\mathrm{d}\theta$
> Soit $W = mga\omega_0[\sin(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}}$, soit $\boxed{W = mga\omega_0 = 1,2.10^4 \text{ J}}$

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°4 Vitesse d'un marcheur (Résolution de problème) ♪ ♪

Retrouver, en fonction des dimensions de votre corps, l'ordre de grandeur de la vitesse de marche naturelle.
Donnée : le moment d'inertie d'une tige rectiligne, homogène, de masse m et longueur ℓ par rapport à une de ses extrémité vaut $J = \frac{1}{3}m\ell^2$.

Exercice n°5 Pendule de torsion ♪ ♪ ♪

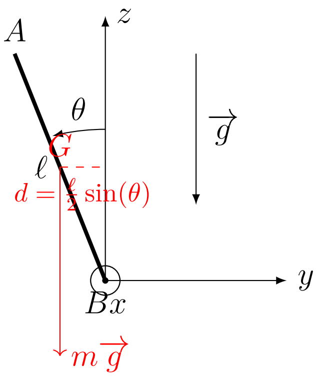
Un pendule est formé d'une tige AB de longueur ℓ, de masse m et de moment d'inertie $J = \frac{1}{3}m\ell^2$ par rapport à l'axe Bx. La tige est fixée en B par un ressort de torsion de couple de rappel $\mathscr{M}_{Bx} = -k\theta$.
On néglige les frottements.

R1. **Déterminer** l'unité de la constante k.

Solution: $[k] = \dfrac{[M_{Bx}]}{[\theta]} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$: k est une énergie.

R2. **Établir** l'équation du mouvement de la tige.

Solution: Système : tige de masse m et de moment d'inertie J
Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques :
- poids $m\vec{g}$, s'exerce en G, au centre de la tige
- action du ressort de torsion de moment $\mathscr{M}_{Bx} = -k\theta$



Théorème du moment cinétique à la tige par rapport à l'axe Bx dans le référentiel terrestre galiléen :
$$\frac{\mathrm{d}L_{Bx}}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_{Bx}(m\vec{g}) + \mathscr{M}_{Bx}(\text{ressort})$$
Avec : $L_{Bx} = J\dot{\theta} = \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\theta}$
et $\mathscr{M}_{Bx}(m\vec{g}) = +mg\frac{\ell}{2}\sin(\theta) > 0$, car le poids tend à faire tourner la tige dans le sens direct.
La LMC donne : $\boxed{\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} = mg\frac{\ell}{2}\sin(\theta) - k\theta}$

R3. **En déduire** l'équation du mouvement dans le cas des petits angles.
À quelle condition, portant sur m, ℓ, k et g, l'équation différentielle précédente est celle d'un oscillateur harmonique ?

Solution: Petits angles : $\sin(\theta) \approx \theta$

On obtient : $\ddot{\theta}+\dfrac{k-mg\frac{\ell}{2}}{J}\theta=0$ qui est l'équation d'un oscillateur harmonique à condition que $\dfrac{k-mg\frac{\ell}{2}}{J}$ soit positif.

$\boxed{\text{Des oscillations sont observées à condition que } k > mg\frac{\ell}{2}}$

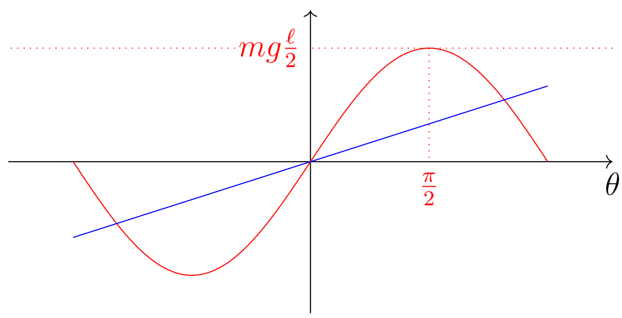
Si $k < mg\frac{\ell}{2}$, alors on peut poser $-\alpha^2=\dfrac{k-mg\frac{\ell}{2}}{J}$ et l'équation différentielle s'écrit $\ddot{\theta}-\alpha^2\theta=0$ dont la solution s'écrit $\theta(t)=Ae^{-\alpha t}+Be^{\alpha t}$ qui ne correspond pas à des oscillations. De plus, θ va augmenter dans le temps, et la condition « petits angles » ne sera plus vérifiée.

R4. Hors du cas particulier des petits angles, **déterminer** les positions d'équilibre possible pour $\theta \in [-\pi,\pi[$. Mener une résolution graphique.
À quelle condition existe-t-il trois positions d'équilibre ?

Solution: À l'équilibre, $\ddot{\theta}=0$, donc $0=-k\theta_{éq}+mg\frac{\ell}{2}\sin(\theta_{éq})$

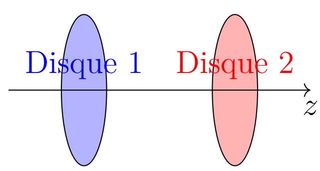
Il faut donc résoudre $k\theta_{éq}=mg\frac{\ell}{2}\sin(\theta_{éq})$, ce que l'on peut faire graphiquement en cherchant les intersections entre les deux courbes $k\theta_{éq}$ et $mg\frac{\ell}{2}\sin(\theta_{éq})$.

Pour $\theta \in [\pi,-\pi]$, il y a trois intersections, et donc 3 positions d'équilibre, si $k\frac{\pi}{2} < mg\frac{\ell}{2}\sin(\pi/2)$, soit $k\frac{\pi}{2} < mg\frac{\ell}{2}$



Exercice n°6 Embrayage ♪ ♪

Les embrayages de voiture sont en général constitués de deux disques en liaison pivot parfaite sur un axe (Oz) pouvant glisser l'un par rapport à l'autre sur cette axe.
On considère qu'initialement, le premier disque de moment d'inertie J_1 est immobile alors que le second de moment d'inertie J_2 tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire ω_0.
On translate alors les deux disques l'un par rapport à l'autre jusqu'à ce qu'ils entrent en contact.



R1. Justifier que le moment cinétique de l'ensemble {Disque 1 + Disque 2} se conserve.

Solution: Il est donc nécessaire d'utiliser le théorème du moment cinétique qui, lui, fait disparaitre les moments des forces intérieures y compris pour les solides déformables :

$$\frac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t}=\mathcal{M}_{Oz}^{ext}=0$$

Comme la liaison pivot est parfaite et que le poids s'exerce sur l'axe de rotation, la résultante des moments extérieurs est nulle et le moment cinétique est conservé.

R2. Exprimer les vitesses angulaires finales des deux disques.

> **Solution:** On peut donc écrire une égalité entre le moment cinétique initial (lorsque seul le disque 2 tourne) et le moment cinétique final (lorsque les deux disques tournent à la même vitesse angulaire ω_f) : $J_2\omega_0 = (J_1 + J_2)\,\omega_f$, d'où $\omega_f = \frac{J_2}{J_1+J_2}\omega_0$

R3. Effectuer un bilan d'énergie pour chacun des disques.

> **Solution:** On effectue un bilan d'énergie cinétique (l'énergie potentielle ne varie pas ici) sur chacun des disques :
>
> $$\Delta E_{c1} = \frac{1}{2}J_1\omega_f^2 - 0 = \frac{1}{2}\frac{J_1 J_2^2}{(J_1+J_2)^2}\omega_0^2 > 0$$
> $$\Delta E_{c2} = \frac{1}{2}J_2\omega_f^2 - \frac{1}{2}J_2\omega_0^2 = \frac{J_2}{2}\left(\frac{J_2^2}{(J_1+J_2)^2} - 1\right)\omega_0^2 < 0$$
>
> Le disque 1 gagne de l'énergie grâce à l'action du disque 2 alors que ce dernier se voit freiné par le disque 1.

R4. Comment évolue l'énergie cinétique totale des deux disques ? Commenter.

> **Solution:** Si on regarde la variation d'énergie cinétique des deux disques, on obtient :
>
> $$\Delta E_c = \frac{1}{2}(J_1+J_2)\,\omega_f^2 - \frac{1}{2}J_2\omega_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{J_2^2}{(J_1+J_2)} - J_2\right)\omega_0^2 = -\frac{1}{2}\frac{J_1 J_2}{J_1+J_2}\omega_0^2 < 0$$
>
> L'énergie cinétique totale a décru or le travail des forces extérieures est nul (le poids ne travail pas et liaison pivot parfaite) donc le travail des forces intérieures est non-nul et contribue à faire décroitre l'énergie totale de ce solide déformable.

Exercice n°7 Mouvement de salsa ♪ ♪ ♪

Maria est danseuse de salsa. Lors des tours en pivot, elle tourne autour de son axe Gz vertical en donnant une petite impulsion à l'aide de son pied gauche, l'appui se faisant sur son pied droit. La position de ses bras lui permet de modifier sa vitesse de rotation ω. G est le centre de masse de Maria.
L'appui au sol s'accompagne d'un couple de frottement de moment C_f par rapport à l'axe Gz que nous supposerons constant. Nous négligeons tout frottement fluide.
L'impulsion donne à Maria une vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 2\pi$ rad $\cdot$ s^{-1}. Ses bras sont tendus de sorte que son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation Gz est $J_1 = 2,4$ kg $\cdot$ m^2. Elle réalise alors juste un tour avant de s'arrêter.

R1. **Déterminer** l'expression puis la valeur du couple C_f.

> **Solution:** LEC : $-\frac{1}{2}J_1\omega_0^2 = \int_0^{2\pi} C_f \mathrm{d}\theta$, soit $C_f = -\frac{J_1\omega_0^2}{4\pi} = -7,5$ N $\cdot$ m < 0

R2. Quelle énergie a été dissipée dans les frottements au cours de son tour ?

> **Solution:** Énergie dissipée par les frottements : $C_f \times 2\pi = \frac{1}{2}J_1\omega_0^2 = 47$ J

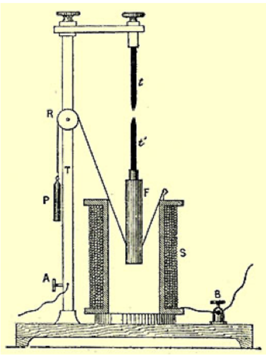
Maria prend maintenant la même impulsion lui conférant la vitesse angulaire ω_0 puis replie presque instantanément ses bras de sorte que son moment d'inertie par rapport à Gz devient $J_2 = 0,80$ kg $\cdot$ m^2.

R3. Quelle vitesse angulaire ω'_0 possède Maria après avoir replié ses bras ? Combien de tours réalise-t-elle alors avant de s'arrêter ?

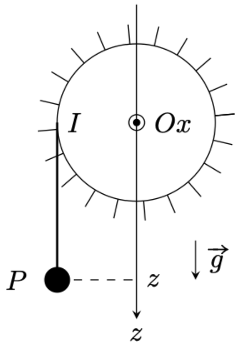
> **Solution:** Maria ayant replié ses bras quasiment instantanément, on peut donc considérer que les frottements ont peu le temps d'agir sur la durée de repliement des bras, donc le moment cinétique se conserve $J_1\omega_0 = J_2\omega'_0$, soit $\omega'_0 = 6\pi$ rad $\cdot$ s^{-1}
> LEC : $0 - \frac{1}{2}J_2{\omega'_0}^2 = C_f\theta_f$, donc $\theta_f = -\frac{1}{2}\frac{J_2{\omega'_0}^2}{C_f} = 2\pi\frac{J_2{\omega'_0}^2}{J_1\omega_0^2} = 2\pi\frac{\omega'_0}{\omega_0} = 2\pi\frac{J_1}{J_2} = 2\pi \times 3$: 3 tours seront faits avant de s'arrêter.

Exercice n°8 Régulateur d'Archereau-Foucault ♪ ♪ ♪

Un régulateur d'Archereau-Foucault est un dispositif ancien, qui a été utilisé par exemple en horlogerie ou dans des boîtes à musique.



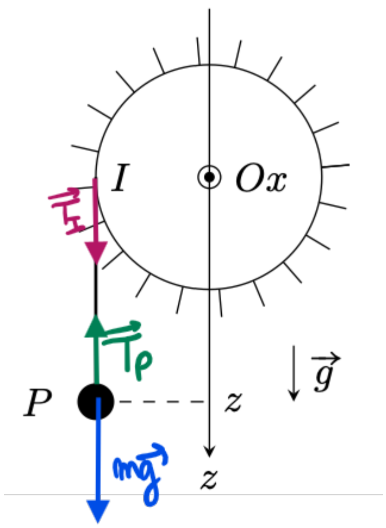
On le modélise de façon simple par un contrepoids P de masse m accroché à un fil inextensible de masse négligeable devant m.
Le fil est enroulé autour d'un cylindre tournant librement autour de son axe Ox fixé à un bâti, de rayon R et de moment d'inertie J_x.
La chute de P entraîne la mise en rotation du cylindre. Ce cylindre est muni d'ailettes pour augmenter l'effet des frottements de l'air. On modélise leur action mécanique sur le cylindre par un couple de frottement $\Gamma_f = -\lambda\omega$, où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation du cylindre.



R1. Justifier que $\dot{z} = R\omega$.

> **Solution:** Le fil est inextensible, donc tous les points du fil ont la même vitesse en norme, donc $v(P) = v(I)$, or $v(P) = \dot{z}$ et I décrit un cercle de rayon R à la vitesse angulaire ω, donc $v(I) = R\omega$, soit $\dot{z} = R\omega$

R2. Montrer que la force $\vec{T}$ de tension du fil exercée en I sur le cylindre est donnée par $\vec{T} = m(g - \ddot{z})\vec{u_z}$

> **Solution:**
>
> 
>
>
> Système : contrepoids $P(m)$
> Référentiel : terrestre galiléen
> Bilan des forces :
> - poids $m\vec{g} = +mg\vec{u_z}$
> - Tension du fil $\vec{T_P} = -T_P\vec{u_z}$, où $T_P > 0$ est la norme de la tension du fil en P.

D'après le principe fondamental de la dynamique à P : $m\overrightarrow{a}(P) = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T_P}$
En projection sur Oz : $m\ddot{z} = -T_P + mg$, soit $T_P = m(g - \ddot{z})$
Le fil étant inextensible, le fil exerce la même tension en tous points, donc $T_I = T_P$.
De plus la force $\overrightarrow{T_I}$ est dirigée vers l'autre extrémité du fil, donc selon $+\overrightarrow{u_z}$, donc $\boxed{\overrightarrow{T} = T_I\overrightarrow{u_z} = m(g - \ddot{z})\overrightarrow{u_z}}$

R3. Montrer que la vitesse angulaire de rotation ω vérifie l'équation différentielle $(J_x + mR^2)\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \lambda\omega = mgR$

Solution: Système : cylindre Référentiel : terrestre galiléen
Bilan des forces :

- poids $M\overrightarrow{g}$, de moment nul car s'exerce sur l'axe (Ox) de rotation
- Tension du fil sur le cylindre $\overrightarrow{T} = m(g - \ddot{z})\overrightarrow{u_z}$
- action de la liaison pivot, de moment nul car supposée parfaite
- action des frottements de couple $\Gamma_f = -\lambda\omega$.

D'après le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation (Ox) :

$$\begin{aligned}
J_x\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \mathscr{M}_{Ox}(M\overrightarrow{g}) + \mathscr{M}_{Ox}(\overrightarrow{T}) + \Gamma_f \\
J_x\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= 0 + TR - \lambda\omega \\
J_x\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= 0 + m(g - \ddot{z})R - \lambda\omega \\
\text{or}\quad \dot{z} &= R\omega \\
J_x\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= 0 + m(g - R\dot{\omega})R - \lambda\omega \\
(J_x + mR^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= mgR - \lambda\omega \\
\left(J_x + mR^2\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \lambda\omega &= mgR \\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{J_x + mR^2}\omega &= \frac{mgR}{J_x + mR^2}
\end{aligned}$$

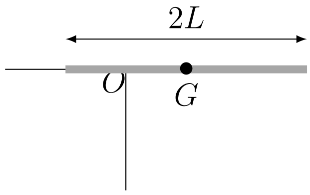
On peut introduire $\tau = \dfrac{J_x + mR^2}{\lambda}$ et $\omega_\infty = \dfrac{mgR}{\lambda}$

R4. Résoudre cette équation pour $\omega(0) = \omega_0$. En déduire l'intérêt du dispositif.

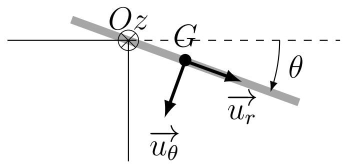
Solution: Solution générale : $\omega(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \dfrac{mgR}{\lambda}$
Or à $t = 0$, $\omega(0) = \omega_0$, donc $\boxed{\omega(t) = \left(\omega_0 - \dfrac{mgR}{\lambda}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + \dfrac{mgR}{\lambda}}$
Après un régime transitoire, le balancier tourne à $\omega_\infty = \dfrac{mgR}{\lambda}$. Cette vitesse angulaire peut être facilement modifiée en jouant sur la masse m du contrepoids.

Exercice n°9 Chute d'un téléphone ♪ ♪ ♪

Un matin, peu réveillé, vous posez votre téléphone en équilibre sur la table de la cuisine. Vous ne pouvez l'empêcher de chuter.
Le fin portable a une longueur $2L = 15$ cm et une masse $m = 170$ g.



À l'instant $t = 0$



À l'instant $t > 0$

Il est posé initialement sur la table comme indiqué sur la figure de gauche et il peut pivoter autour de l'arête Oz avant de tomber par terre. La distance OG est notée a avec $a = 2,0$ cm.
Le moment d'inertie J du portable par rapport à l'axe de rotation Oz vaut $J = 4,0.10^{-4}$ kg · m^2.
Nous noterons la force de contact $\overrightarrow{R} = R_r\overrightarrow{u_r} + R_\theta\overrightarrow{u_\theta}$. Le glissement de frottement du portable sur l'arête de la table obéit aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement $f = 0,20$. Ainsi, le portable ne glisse pas sur l'arête tant que $\left|R_r\right| < f\left|R_\theta\right|$.
Nous négligeons tout frottement fluide.

R1. **Expliquer** brièvement pourquoi la position initiale du portable n'est pas une position d'équilibre.

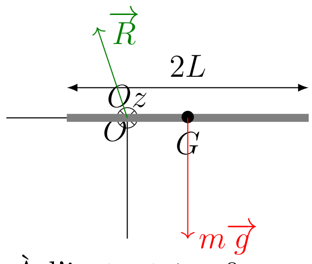
Solution:

R2. Nous nous intéressons à la première phase du mouvement au cours de laquelle le téléphone pivote sans glisser sur l'arête. Faire un bilan des forces exercées sur le téléphone.

Solution:

Système : téléphone
Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques :

- poids en G
- force de contact $\overrightarrow{R}$ en O

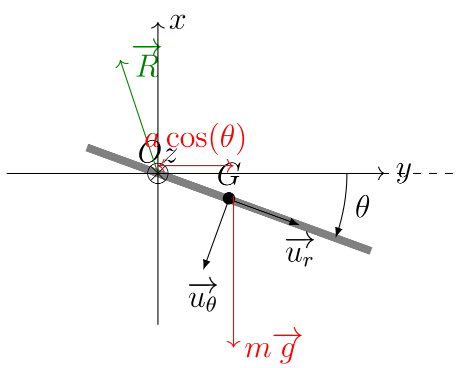


À l'instant $t = 0$

Loi du moment cinétique au téléphone par rapport à l'axe (Oz) :
$$\frac{\mathrm{d}L_{Oz}(\text{téléphone})}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) + \mathscr{M}_{Oz}(\overrightarrow{R})$$
$\mathscr{M}_{Oz}(\overrightarrow{R}) = 0$ car la droite d'action de $\overrightarrow{R}$ coupe l'axe (Oz).
$\mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) = mga$
Ainsi $\mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) + \mathscr{M}_{Oz}(\overrightarrow{R}) > 0$: le téléphone va donc avoir tendance à tourner dans le sens direct par rapport à l'axe (Oz), il n'est donc pas à l'équilibre.

R3. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par θ.

Solution:
Loi du moment cinétique au téléphone par rapport à l'axe (Oz) :
$$\frac{\mathrm{d}L_{Oz}(\text{téléphone})}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) + \mathscr{M}_{Oz}(\overrightarrow{R})$$
Avec : $L_{Oz}(\text{téléphone}) = J\dot{\theta}$
$\mathscr{M}_{Oz}(\overrightarrow{R}) = 0$ car la droite d'action de $\overrightarrow{R}$ coupe l'axe (Oz).
$\mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) = mga\cos(\theta) > 0$: $m\overrightarrow{g}$ fait tourner le téléphone dans le sens direct par rapport à (Oz).



La LMC donne : $\boxed{J\ddot{\theta} = mga\cos(\theta)}$ (1)

R4. **Appliquer** le théorème l'énergie cinétique au portable. **En déduire** une intégrale première du mouvement.

Solution:
LEC au portable entre $t = 0$ et t quelconque : $\Delta\mathscr{E}_c = W(m\overrightarrow{g}) + W(\overrightarrow{R})$

Avec $\Delta\mathscr{E}_c = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - 0$

$W(m\overrightarrow{g}) = \displaystyle\int_0^t \mathscr{P}(m\overrightarrow{g})\mathrm{d}t = \int_0^\theta \mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g})\mathrm{d}\theta$

Soit $W(m\overrightarrow{g}) = \displaystyle\int_0^\theta mga\cos(\theta)\mathrm{d}\theta = mga[\sin(\theta)]_0^\theta = mga\sin(\theta)$

La LEC donne alors l'intégrale première du mouvement : $\boxed{\dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = mga\sin(\theta)}$ (2)

R5. Appliquer la loi de la quantité de mouvement au portable. En déduire des expressions de R_r et R_θ en fonction de θ et des données de l'exercice.

Solution:
PFD au téléphone dans le référentiel terrestre galiléen : $m\overrightarrow{a}(G) = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R}$
Tant que le téléphone ne glisse pas, le centre d'inertie décrit un mouvement circulaire de rayon a, donc $\overrightarrow{a}(G) = a\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - a\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}$
PFD en projection :

- selon $\overrightarrow{u_r}$: $-ma\dot{\theta}^2 = R_r + mg\sin(\theta)$ (3)
- selon $\overrightarrow{u_\theta}$: $ma\ddot{\theta} = R_\theta + mg\cos(\theta)$ (4)

(2) dans (3) : $R_r = -ma \times \dfrac{2mga}{J}\sin(\theta) - mg\sin(\theta)$, soit $\boxed{R_r = -mg\sin(\theta)\left(\dfrac{2ma^2}{J} + 1\right)}$

(1) dans (4) : $R_\theta = ma \times \dfrac{mga}{J}\cos(\theta) - mg\cos(\theta)$, soit $\boxed{R_\theta = mg\cos(\theta)\left(\dfrac{ma^2}{J} - 1\right)}$

R6. **Déterminer** l'angle θ_0 à partir duquel le téléphone commence à glisser sur l'arête.

Solution:
Le téléphone ne glisse pas tant que la condition de non glissement $\left|R_r\right| < f\left|R_\theta\right|$ est vérifiée, c'est-à-dire tant que $mg\sin(\theta)\left(\dfrac{2ma^2}{J} + 1\right) < fmg\cos(\theta)\left|\dfrac{ma^2}{J} - 1\right|$

Le téléphone ne glisse pas tant que $\tan(\theta) < f\dfrac{\left|\dfrac{ma^2}{J} - 1\right|}{\dfrac{2ma^2}{J} + 1}$

Avec $ma^2 = 6,8.10^{-5}$ kg $\cdot$ m$^2 < J$, donc $\dfrac{ma^2}{J} - 1 < 0$, donc $\left|\dfrac{ma^2}{J} - 1\right| = 1 - \dfrac{ma^2}{J}$

Le téléphone commencera à glisser quand θ_0 sera-t-elle que $\boxed{\tan(\theta_0) = f\dfrac{1 - \dfrac{ma^2}{J}}{1 + 2\dfrac{ma^2}{J}}}$.

A.N. $\underline{\theta_0 = 7,1°}$

R7. À partir de cet instant pris comme origine des temps, le téléphone quitte la table en un temps très bref, conservant quasiment la même orientation θ_0 et la même vitesse angulaire ω_0.

Quel est, après avoir quitté la table, la loi d'évolution de la position selon la verticale ($x_G(t)$), où G est le barycentre du téléphone, en supposant que la tartine ne retouche plus la table ?

Solution: Après avoir quitté la table, le téléphone n'est soumis qu'à son poids.
PFD au téléphone dans le référentiel terrestre galiléen (permet d'obtenir le mouvement du centre d'inertie) : $m\overrightarrow{a}(G) = m\overrightarrow{g}$
En projection selon $\overrightarrow{u_x}$: $\ddot{x}_G = -g$
Par intégrations successives $x_G(t) = -\dfrac{g}{2}t^2 + \dot{x}_G(0)t + x_G(0)$
Avec $x_G(0) = -a\sin(\theta_0) < 0$ ($\theta_0 > 0$)
et $\dot{x}_G(0) = \overrightarrow{v_G}(0) \cdot \overrightarrow{u_x} = a\dot{\theta}(0)\overrightarrow{u_\theta} \cdot \overrightarrow{u_x} = a\dot{\theta}(0)\cos(\theta_0 + \pi/2)$, soit $\dot{x}_G(0) = -a\dot{\theta}(0)\sin(\theta_0)$
On néglige la vitesse initiale, quand le téléphone quitte la table, par rapport à celle qu'il va acquérir.
Alors $\boxed{x_G(t) = -\dfrac{g}{2}t^2 - a\sin(\theta_0)}$

R8. **Déterminer** l'instant τ auquel le téléphone touche le sol. On considère que la hauteur h de la table est nettement supérieure aux dimensions du téléphone et que la vitesse initiale du téléphone est très faible devant sa vitesse finale.

Solution:
Le téléphone touche le sol à l'instant τ, tel que $x_G(\tau) = -h$
Alors : $\tau = \sqrt{\dfrac{2(h - a\sin(\theta_0))}{g}}$

R9. On admet que pendant le vol, la vitesse angulaire du téléphone reste constante, égale à ω_0.
Quelle est son expression ? **En déduire** $\theta(\tau)$.

Solution: L'intégrale première du mouvement à l'instant où le téléphone commence à glisser donne :
$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2mga\cos(\theta_0}{J}} > 0$, car θ augmente au cours du mouvement.
En la supposant constante, cela permet de déterminer $\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$
Ainsi $\boxed{\theta(\tau) = \theta_0 + \omega_0\tau}$

R10. Faire l'application numérique pour $h = 70$ cm. De quel côté tombe le téléphone, si on suppose qu'il n'y a pas de rebond ?

Solution: A.N. : $\theta(\tau) = 4,6 \text{ rad} \approx \dfrac{3\pi}{2} \text{ rad}$
En l'absence de rebond, le téléphone tombera sur la tranche....