? À rendre LUNDI 18 mai 2026 à 7h45

Devoir Maison n°19 – Induction & Euler

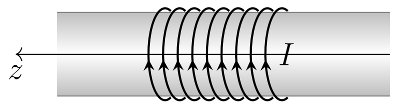
Travail à effectuer :

- Le travail nécessite Capytale, les codes devront obligatoirement être complétés en ligne ici : `https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/71f4-10630085`
- Les questions précédentes de ♪ sont facultatives pour les étudiant.e.s en difficulté.

Vous devez vous appuyer sur le livret « Capacités numériques » qui décrit les algorithmes principaux, ainsi que les TP où ces algorithmes ont été rencontrés.

Exercice n°1 Champ magnétique d'une bobine

On considère la bobine longue ci-dessous, de longueur $L = 60$ cm, et de rayon $R = 4$ cm parcourue par un courant d'intensité $i = 0,6$ A. On note (Oz) l'axe de révolution de la bobine. On donne l'expression de la norme du champ magnétique à l'intérieur de la bobine : $B = \mu_0 n I$, où n est le nombre de spires par unité de longueur.



Q1. On cherche la forme du champ magnétique en un point M quelconque de l'espace.

(a) Trouver un plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Que peut-on en déduire sur le champ magnétique en M ?

(b) Trouver un plan de symétrie de la distribution de courant. Que peut-on en déduire sur le champ magnétique en M ?

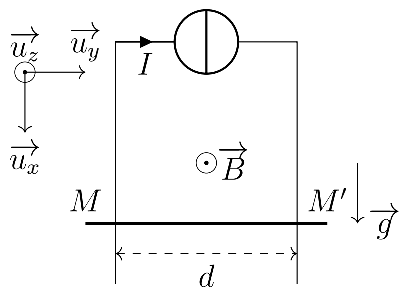
(c) Étudier les invariances et conclure sur la forme du champ magnétique.

Q2. En déduire l'expression du vecteur champ magnétique.

Q3. On veut créer un champ magnétique de $0,1$ T au sein de la bobine. Combien de spires faut-il ?

Exercice n°2 Rails de Laplace

On considère des rails de Laplace disposés verticalement. Le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est alors horizontal ainsi que la tige $\mathcal{T}$, de masse $m = 20$ g et de longueur $d = 4$ cm.
$\mathcal{T}$ peut glisser sans que ses extrémités ne quittent le contact des rails (un guidage est prévu).
À l'extrémité des rails de Laplace, on place une source de courant d'intensité I constante.



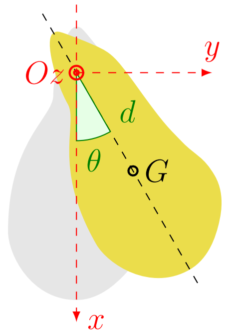
Q1. Rappeler l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur la portion d'un conducteur.

Q2. Exprimer la force de Laplace s'exerçant sur la tige $\mathcal{T}$ en fonction de I, B, d et d'un vecteur unitaire bien choisi.

Q3. Établir la condition reliant I, B, d, m et g permettant à la tige de rester en équilibre.

Q4. Quelle valeur d'intensité doit-on choisir pour assurer l'équilibre de $\mathcal{T}$? On prendra $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2} et $\|\overrightarrow{B}\| = 0,25$ T.

Exercice n°3 Pendule pesant



On étudie un pendule pesant constitué d'un solide, de masse m, de moment d'inertie $J_{(Oz)}$ par rapport à l'axe (Oz) de rotation.
On suppose que la liaison entre le solide et le référentiel terrestre est une liaison pivot parfaite d'axe (Oz). Et on néglige les frottements dus à l'air.
On repère la position du solide par l'angle θ que fait la droite (OG) avec la verticale descendante (Ox).
On note d la distance OG.

Partie A Mise en équation

Q1. En utilisant une méthode de votre choix, établir précisément et rigoureusement l'équation du mouvement vérifiée par θ, et montrer qu'elle s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$, où on identifiera ω_0 en fonction des paramètres du problème.

L'équation différentielle précédente ne peut pas être résolue analytiquement, mais cela peut se faire numériquement.

On se propose d'adapter l'algorithme d'Euler, normalement prévu pour une équation différentielle du premier ordre, pour la résoudre.

Partie B Mise en place de l'algorithme

L'idée est de transformer cette équation différentielle du second ordre en deux équations différentielles du premier ordre. Pour cela, on pose $y = \theta$ et $z = \dot{\theta}$, et on met en œuvre l'approximation d'Euler sur y et z.

On résout (c'est-à-dire détermine θ et $\dot{\theta}$) sur l'intervalle $[0, 5T_0]$ que l'on décompose en n intervalles de largeur h.

Q2. (a) Exprimer le pas h en fonction de T_0 et n.

(b) Avec n intervalles, combien y a-t-il d'instants de résolution au total ? Exprimer l'instant t_i (pour $i \in [\![0, ...]\!]$: on complètera les ...) de résolution en fonction de h et i.

On note y_i et z_i les valeurs de y (c'est-à-dire θ) et z (c'est-à-dire $\dot{\theta}$) à l'instant t_i.

Q3. (a) Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ en fonction de z.

(b) En rappelant la nature de l'approximation d'Euler, montrer que

$$y_{i+1} = y_i + z_i \times h$$

Q4. (a) Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $\ddot{\theta}$, puis en fonction de y.

(b) En déduire la relation de récurrence

$$z_{i+1} = z_i - h \times \omega_0^2 \sin(y_i)$$

Q5. ♪ ♪ Expliquer comment à partir des conditions initiales $\theta(0)$ (c'est-à-dire $y(0)$) et $\dot{\theta}(0)$ (c'est-à-dire $z(0)$) on peut déterminer y (c'est-à-dire θ) et z (c'est-à-dire $\dot{\theta}$) à chaque instant t_i.

Partie C Mise en œuvre

Q6. 💻 Compléter le code sur `Capytale` permettant de déterminer les valeurs successives de θ et $\dot{\theta}$ selon l'algorithme d'Euler, pour $\theta(0) = \pi/2$ et $\dot{\theta} = 0$.

Q7. ♪ ♪ Pourquoi est-il nécessaire de modifier `y` et `z` simultanément et non successivement ?

Q8. 💻 ♪ ♪ S'amuser à modifier les conditions initiales (notamment la vitesse angulaire initiale) et noter les différentes évolutions observées (notamment sur l'allure de l'évolution temporelle et sur l'évolution de la période).