

? À rendre jeudi 28 mai 2026

## Devoir Maison n°20 – Induction & Intégration numérique

Travail à effectuer :

- Le travail nécessite Capytale, les codes devront obligatoirement être complétés en ligne ici : <https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/4997-10912945>
- Les questions précédentes de 🎵 sont facultatives pour les étudiant.e.s en difficulté.

**Vous devez vous appuyer sur le livret « Capacités numériques » qui décrit les algorithmes principaux, ainsi que les TP où ces algorithmes ont été rencontrés.**

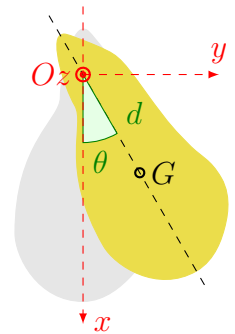
### Exercice n°1 Période du pendule pesant

On étudie un pendule pesant constitué d'un solide, de masse  $m$ , de moment d'inertie  $J_{(Oz)}$  par rapport à l'axe  $(Oz)$  de rotation.

On suppose que la liaison entre le solide et le référentiel terrestre est une liaison pivot parfaite d'axe  $(Oz)$ . Et on néglige les frottements dus à l'air.

On repère la position du solide par l'angle  $\theta$  que fait la droite  $(OG)$  avec la verticale descendante  $(Ox)$ .

On note  $d$  la distance  $OG$ .



#### Partie A Mise en équation

On étudie le cas où le pendule est lâché à  $t = 0$  avec une vitesse angulaire nulle depuis l'angle  $\theta_0 > 0$ .

- Q1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur du pendule en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $d$  et  $\theta$ .
- Q2. Justifier que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement du pendule.

En déduire que

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2mgd(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}{J_{Oz}}$$

Q3. 🎵 🎵 🎵

Justifier que  $\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{2mgd}{J_{Oz}} \sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$  sur  $[0, T/2]$  et  $\dot{\theta} = +\sqrt{\frac{2mgd}{J_{Oz}} \sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$  sur  $[T/2, T]$ .

En déduire que la période du pendule s'exprime selon :

$$T = \frac{T_0}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} = \frac{\sqrt{2}T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

$$\text{avec } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_{Oz}}{mgd}}$$

#### Partie B Intégration numérique

On cherche à calculer, pour différentes valeurs de  $\theta_0$ , la valeur approchée de  $\frac{T}{T_0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$  en utilisant la méthode des rectangles.

Q4. Compléter le code sur `capitale` permettant de calculer la valeur approchée de

$$\int_0^{\theta_0} f(\theta) d\theta = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

par la méthode des rectangle à gauche, c'est-à-dire en calculant la somme  $S = h \times \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \times h)$ , où  $f$  est une fonction à identifier dans le cadre du problème étudié.

Calculer la période pour  $n = 1000$ . L'angle  $\theta_0$  est à choisir (choisir une « grande » valeur de  $\theta_0$ , entre  $\pi/3$  et  $\pi$ ).

Recopier la valeur obtenue pour le rapport  $\frac{T}{T_0}$ .

Q5. Compléter le code nécessaire au tracé de  $\frac{T}{T_0}$  en fonction de  $\theta_0$ .

Reproduire l'allure de la courbe de  $\frac{T}{T_0}$  en fonction de  $\theta_0$ . Commenter l'évolution de  $\frac{T}{T_0}$  avec  $\theta_0$ .

## Exercice n°2 Oscillations d'un cadre métallique (D'après ENAC 2025)

On considère un cadre métallique rectangulaire OADC, rigide et homogène (masse linéique uniforme), de longueur  $L$  et de largeur  $\ell$ , capable de tourner autour d'un de ses longs côtés horizontaux CO.

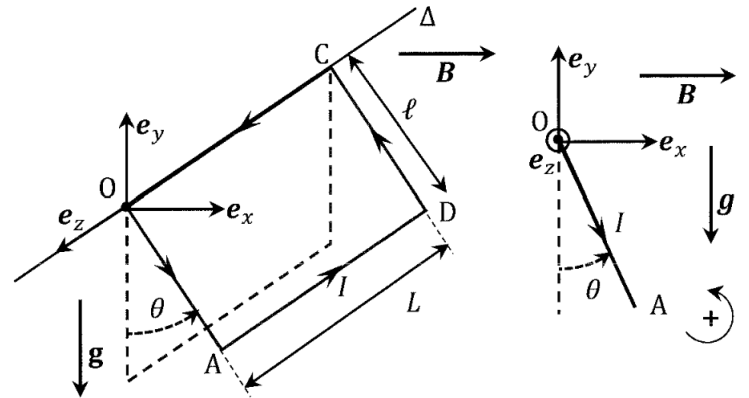
L'étude est menée dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$ , supposé galiléen, auquel on associe le repère cartésien  $\{0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ . Le côté CO est situé sur un axe de rotation  $\Delta$  (horizontal) fixe dans  $\mathcal{R}$ , et orienté par le vecteur unitaire  $\vec{e}_z$ .

On note  $\vec{g} = -g\vec{e}_y$  le champ de pesanteur d'intensité,  $\vec{e}_y$  étant un vecteur unitaire orienté dans le sens vertical ascendant.

On note  $\theta$  l'angle qui repère le vecteur  $\vec{OA}$  par rapport à la verticale descendante.

On néglige tout frottement, dont ceux de la liaison pivot, supposée parfaite.

On note  $m$  la masse du cadre et  $J_z$  son moment d'inertie par rapport à l'axe  $\Delta$ . Une alimentation, non représentée sur la figure, impose un courant stationnaire, d'intensité  $I$  le long du cadre, dans le sens indiqué sur la figure ( $I > 0$ ). Enfin, le cadre est immergé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B} = B\vec{e}_x$  où  $B > 0$ . On néglige l'auto-induction dans le cadre.



Q1. Déterminer  $\Gamma_P$  le moment scalaire du poids du cadre par rapport à  $\Delta$  (orienté).

Q2. Donner, sans démonstration, le moment vectoriel du couple de Laplace s'exerçant sur le cadre.

Q3. Puis, l'exprimer en fonction de  $i, \ell, L, B$  et un vecteur unitaire.

En déduire  $\Gamma_L$  le moment scalaire des forces de Laplace qui s'exercent sur le cadre par rapport à  $\Delta$  (orienté).

Q4. Déterminer la ou les positions angulaires d'équilibre  $\theta_e$  du cadre.

Q5. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par  $\theta$ .

Q6. Exprimer la période  $T_0$  du mouvement du cadre au voisinage de sa position d'équilibre stable.

Q7. À un instant pris comme origine temporelle ( $t = 0$ ), on lance le cadre depuis la position initiale  $\theta(0) = 0$  avec une vitesse angulaire initiale  $\dot{\theta}(0) > 0$ .

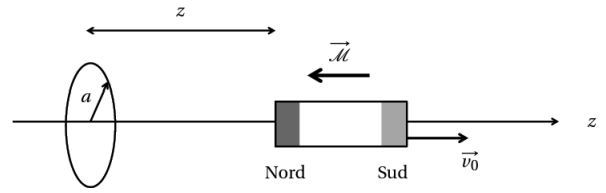
À l'aide d'un théorème énergétique, déterminer  $\dot{\theta}(0)$  afin que le cadre puisse atteindre la position  $\theta = \frac{\pi}{2}$  rad, avec une vitesse nulle.

Q8. On coupe désormais le champ magnétique ( $B = 0$ ) et on modifie les conditions de lancement du cadre de sorte qu'à l'instant initial :  $\theta(0) = 0$  et  $\dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{3mg\ell}{J_z}}$

Déterminer la valeur absolue de la vitesse angulaire minimale notée  $\dot{\theta}_m$  atteinte par le cadre au cours de son mouvement.

## Exercice n°3 Lois de l'induction

Un aimant droit de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  a son pôle Nord orienté vers un circuit composé d'une spire de rayon  $a$ , de centre  $O$ , d'axe  $Oz$  et assimilable électriquement à une résistance  $R$ . On fait glisser l'aimant le long de l'axe  $Oz$  en l'éloignant du circuit à vitesse constante  $v_0$ .



Le champ magnétique créé par l'aimant à une distance  $z$  sur l'axe est donné dans le cas où  $z$  est grande devant les dimensions de la spire par  $\vec{B} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2\pi z^3} \vec{e}_z = -\frac{K}{z^3} \vec{e}_z$ .

Q1. Énoncer la loi de Lenz.

Prévoir qualitativement le sens du courant d'intensité  $i$  positive. *Cette réponse devra être très proprement justifiée, en s'appuyant sur un schéma clair et sur la loi précédente.*

Q2. Énoncer la loi de Faraday.

Exprimer la force électromotrice induite  $e$  en fonction de  $\mu_0$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $a$ ,  $z$ , et de la vitesse  $v_z = \dot{z}$  de l'aimant\*.

Q3. Représenter le circuit électrique équivalent. Exprimer l'intensité  $i$ .

Q4. Si l'aimant s'éloigne de la spire, de quel signe est  $v_z$ ? Retrouve-t-on un résultat cohérent avec celui prévu initialement (Q1)?

Q5. Exprimer le moment magnétique de la spire. En déduire que la spire se comporte alors comme un aimant dont on précisera les pôles et si elle exerce une force d'attraction ou de répulsion sur le véritable aimant éloigné de la spire.

Q6. Si l'aimant est immobile mais proche de la spire, observe-t-on un courant?

\*. Vous devriez obtenir :  $e = \frac{3\mu_0 \mathcal{M} a^2}{2z^4} v_z$