

? À rendre jeudi 11 juin 2026
Devoir Maison n°22 le dernier : '(– Induction

Travail à effectuer : Traiter au choix l'un des deux exercices (n°1 plus facile ; n°2 plus difficile, notamment plus calculatoire).

Exercice n°1 Haut-parleur électrodynamique

On représente ci-dessous un haut-parleur électrodynamique (figure 1). Celui-ci est constitué d'une bobine d'axe $(X'X)$, de résistance R , d'inductance propre L , solidaire d'une membrane pouvant se déplacer parallèlement à elle-même suivant la direction $(X'X)$ normale à son plan. Lorsque la bobine s'écarte de sa position d'équilibre d'un écart algébrique $x(t)$, elle est rappelée vers cette position d'équilibre par une force élastique modélisée par un ressort de raideur k . De plus, l'air produit sur la membrane une force de frottement fluide, proportionnelle à sa vitesse de déplacement, qui s'écrit $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$. On ne tiendra pas compte du poids de l'équipage mobile bobine-membrane.

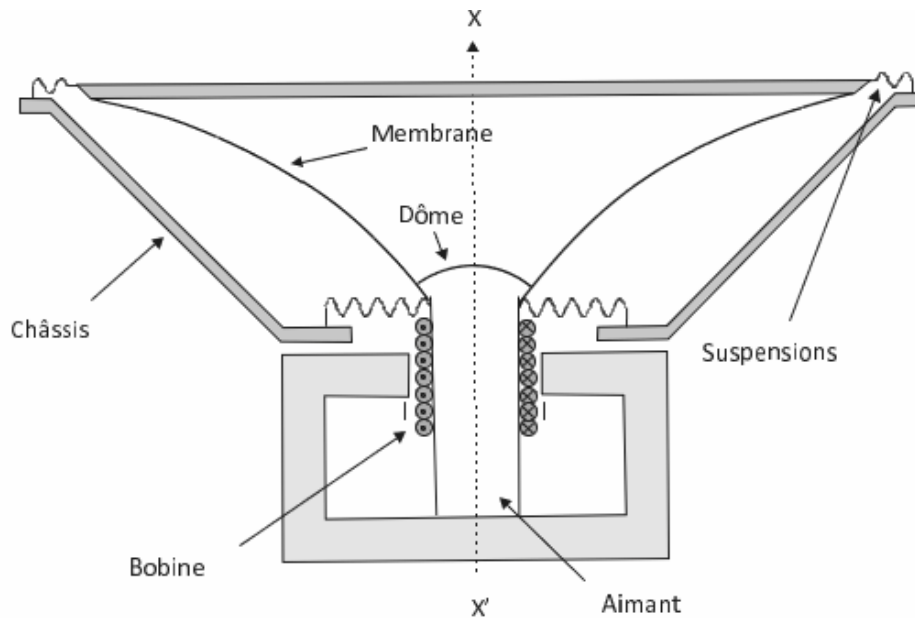


FIGURE 1 – Schéma du haut-parleur de l'étude

La bobine est placée dans un champ magnétique radial \vec{B} , uniforme en norme, normal à $(X'X)$, créé par un aimant permanent. On se place dans un modèle simplifié de haut-parleur basé sur la configuration des rails de Laplace, représentée sur la figure 2. Le générateur de force électromotrice (f.é.m.) $E(t)$ délivre un signal électrique que l'on veut transformer en signal sonore. La membrane et l'air sont mis en mouvement par l'intermédiaire de la barre de largeur ℓ qui se déplace de $x(t)$. Cette grandeur $x(t)$ représente l'élongation du ressort par rapport à la position d'équilibre, elle-même caractérisée par la longueur ℓ_0 . La membrane du haut-parleur est solidaire de la barre. On note m_T la masse du système {barre, haut-parleur}. On suppose donc que la verticale est définie par l'axe z , l'axe x étant horizontal. On note $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base des vecteurs unitaires de la figure 2.

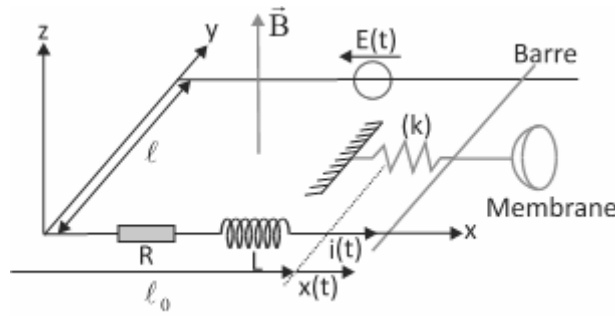


FIGURE 2 – Schéma du haut-parleur de l'étude

- Q1. Montrer que la f.é.m. induite e dans le cadre vaut $e = -Blv(t)$ est la vitesse, dérivée de $x(t)$.
- Q2. Dédire de la question précédente l'équation électrique (E.E.) traduisant le comportement du circuit. Faire le schéma électrique équivalent en tenant compte de la f.é.m. induite. On notera $i(t)$ le courant induit dans ce circuit.
- Q3. Établir l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur la tige.
- Q4. Faire le bilan des forces s'exerçant sur l'ensemble { barre + haut-parleur } de masse m_T . En déduire l'équation différentielle mécanique relative au mouvement de la barre (équation E.M.).
- Q5. Faire un bilan de puissances en combinant les équations E.E. et E.M. Le commenter.
- Q6. Comparer la puissance de la f.é.m. $\mathcal{P}_{fem} = ei$ à la puissance de la force de Laplace \mathcal{P}_L .
- Q7. Le générateur délivre une tension sinusoïdale $E(t)$ de pulsation ω . On utilisera les notations complexes, pour lesquelles $\underline{E}(t) = E_0 e^{j\omega t}$, $E(t)$ s'identifiant alors avec la partie réelle de $\underline{E}(t)$.
Montrer que l'on a $\underline{E} = (R + jL\omega + \underline{Z}_m)\underline{i} = \underline{Z}_m \underline{i}$, où \underline{i} est le courant complexe traversant le circuit et \underline{Z}_m est une grandeur, appelée impédance motionnelle, dont on donnera l'expression en fonction de B , ℓ , α , m_T , ω et k .

- Q8. Montrer que l'admittance motionnelle $\underline{Y}_m = \frac{1}{\underline{Z}_m}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{Y}_m = \frac{1}{R_m} + jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega}$$

Donner l'expression des termes R_m , C_m et L_m en fonction de B , ℓ , α , m_T et k .

- Q9. Dédire de ce qui précède le schéma électrique équivalent du haut-parleur.

Le rendement η du haut-parleur est défini comme le rapport de la puissance moyenne émise par l'onde sonore sur la puissance moyenne fournie par la source de tension.

- Q10. Montrer que la relation établie à la question Q5 devient, en raisonnant sur les moyennes temporelles, en régime périodique établi :

$$\langle Ei \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle$$

Commenter ce résultat.

En identifiant la puissance émise par l'onde sonore $\langle \mathcal{P}_{son} \rangle$ à $\langle \alpha v^2 \rangle$, où v est la vitesse de la membrane, on peut montrer que η est de la forme :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m} \left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]}$$

avec $Q = \frac{\sqrt{k m_T}}{\alpha}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_T}}$.

- Q11. Commenter la forme obtenue. On pourra par exemple effectuer l'étude asymptotique du comportement en basses et hautes pulsations, ainsi que pour une pulsation proche de ω_0 .

Exercice n°2 Compresseur d'une pompe à chaleur

Le compresseur (d'une pompe à chaleur ou d'un réfrigérateur) fonctionne grâce à un moteur asynchrone que nous allons à présent étudier. Le moteur asynchrone est constitué de deux bobinages fixes (modélisés par des solénoïdes infinis) et d'une bobine plate carrée en rotation autour d'un axe fixe. Il est alimenté par le secteur via une prise de courant classique.

Dans tout cet exercice, on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

En faisant abstraction des spires manquantes dans la partie centrale, on considère deux solénoïdes (1) et (2) identiques, de rayon A , de grande dimension selon leur axe, disposés de sorte que leurs axes respectifs ($x'x$) et ($y'y$) soient perpendiculaires et concourant au point O (Figure 3).

Ils comportent n spires par mètre et sont parcourus par les courants respectifs $i_1(t) = I_M \cos(\omega_0 t)$ et $i_2(t) = I_M \cos(\omega_0 t + \alpha)$ où ω_0 est une pulsation constante. Le sens de parcours des courants est indiqué sur la Figure 3.

On rappelle qu'un solénoïde infini de n spires par unité de longueur et parcouru par un courant i crée un champ magnétique de norme $\mu_0 n i$.

Q1. Par une étude rigoureuse des symétries et des invariances, déterminer la forme générale du champ magnétique créé par le solénoïde (1). Enfin, compte tenu de l'orientation de i_1 , déterminer son expression complète.

Q2. On considère maintenant l'association des deux solénoïdes (1) et (2) décrite ci-dessus (Figure 3).

Exprimer le champ magnétique $\vec{B}(O, t)$ créé en O dans les cas où $\alpha = \pi/2$ et $\alpha = -\pi/2$.

Pourquoi peut-on qualifier ce champ magnétique de « champ tournant » ?

Dans la suite du problème, on se placera dans le premier cas $\alpha = \pi/2$.

Q3. Chaque solénoïde est constitué d'un enroulement de 4 rangées de spires jointives. On donne $a = 0,25$ mm le rayon du fil de cuivre utilisé, et $I_M = 0,1$ A. Calculer la norme du champ magnétique créé en O . Commenter.

On place en O une bobine plate carrée (S) de surface $S = b^2$ comportant N spires orientées (Figure 4). Le vecteur surface $\vec{S} = b^2 \vec{n}$ reste dans le plan xOy où il est repéré à la date t par l'angle $\theta(t) = \omega t$ par rapport à Ox .

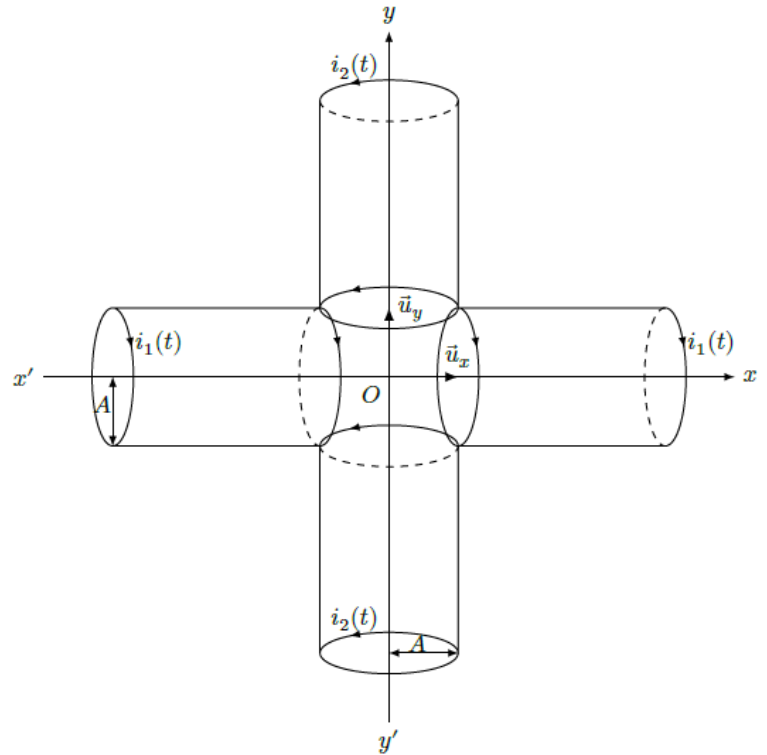


FIGURE 3 – Moteur asynchrone

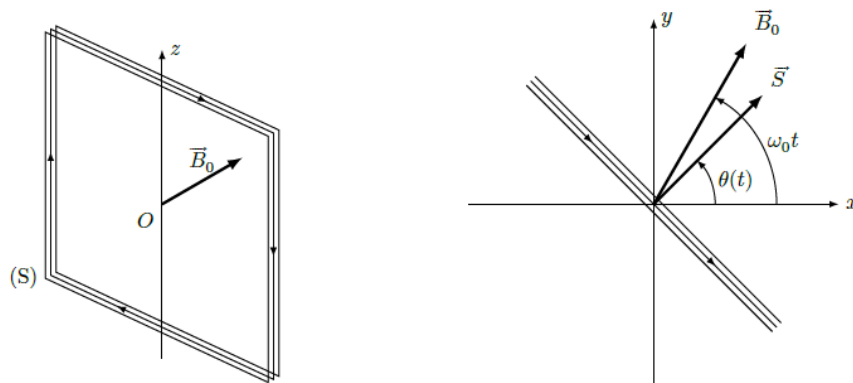


FIGURE 4 – Bobine rectangulaire

Cette bobine (S) possède une résistance R et une inductance propre L .

Le côté b de la bobine plate (S) est supposé très petit devant le rayon A des deux solénoïdes. Ainsi, le champ magnétique $\vec{B}(O, t)$ créé par les deux solénoïdes peut être supposé uniforme sur toute la surface S de la bobine (S), on le notera \vec{B}_0 . Dans le plan xOy , il est repéré à la date t par l'angle $\omega_0 t$ (Figure 4).

En fonctionnement, cette bobine (S) entraîne le reste du dispositif en exerçant sur lui un couple $+\Gamma\vec{u}_z$. On considère que la liaison entre la bobine et son support est parfaite.

Q4. Justifier sans calcul l'existence d'un courant induit $i(t)$ dans la bobine (S).

Q5. Justifier sans calcul l'origine du mouvement de la bobine (S).

Q6. Montrer que l'équation électrique (E) vérifiée par l'intensité du courant $i(t)$ circulant dans (S) s'écrit :

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) = \Phi_0 \Omega \sin(\Omega t), \text{ avec } \Omega = \omega_0 - \omega \text{ et } \Phi_0 = NSB_0.$$

Dans la suite du problème, on suppose le régime forcé établi, donc Ω est constante.

On note : $i(t) = i_m \sin(\Omega t - \psi)$ la solution de l'équation (E) en régime établi.

Q7. À l'aide de l'équation précédente, exprimer i_m et ψ en fonction de Ω et des données du problème.

Q8. Définir le moment magnétique \vec{M} associé à la bobine plate (S).

Q9. Expliciter l'action mécanique de Laplace s'exerçant sur la bobine (S).

Q10. Montre que l'équation mécanique (M) vérifiée par l'angle $\theta(t)$ s'écrit $J\ddot{\theta} = -\Gamma + \Phi_0 i_m \sin(\Omega t - \psi) \sin(\Omega t)$.

Q11. Exprimer le couple $\Gamma(t)$ en fonction de Ω et des données du problème quand le régime permanent sinusoïdal est atteint.

Dans un fonctionnement usuel, c'est la valeur moyenne temporelle $\langle \Gamma \rangle$ du couple qui intervient.

On rappelle que $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$

Q12. Montrer que $\langle \Gamma \rangle = \frac{i_m \Phi_0}{2} \cos(\psi)$, puis en utilisant les résultats précédents $\langle \Gamma \rangle = \frac{\Gamma_0(1 - X)}{1 + \lambda^2(1 - X)^2}$ avec $X = \omega/\omega_0$. On exprimera λ et Γ_0 en fonction des données du problème.

Q13. Tracer l'allure de $\langle \Gamma \rangle / \Gamma_0$ en fonction de X en prenant $\lambda = 4$. Commenter l'allure de la courbe obtenue.

Dans la suite du problème, on considère la plage de vitesse : $0 < \omega < \omega_0$.

Q14. On s'intéresse à la stabilité du moteur en cours de fonctionnement. La partie utilisatrice impose une valeur de $\langle \Gamma \rangle$, on trouve alors en général deux valeurs possibles de ω : ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$.

Montrer qualitativement que la valeur de ω_2 correspond à un régime stable.

Q15. Exprimer la valeur moyenne temporelle $\langle \mathcal{P} \rangle$ de la puissance mécanique fournie par le moteur. Commenter l'expression obtenue.

Q16. On donne Figure 5 le tracé de la valeur moyenne temporelle $\langle \mathcal{P} \rangle$ en fonction de $X = \omega/\omega_0$.

Dans le cas de la pompe à chaleur étudiée ici, le moteur du compresseur fournit une valeur moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle = 50$ W. Déterminer la valeur de la vitesse de rotation ω . Commenter.

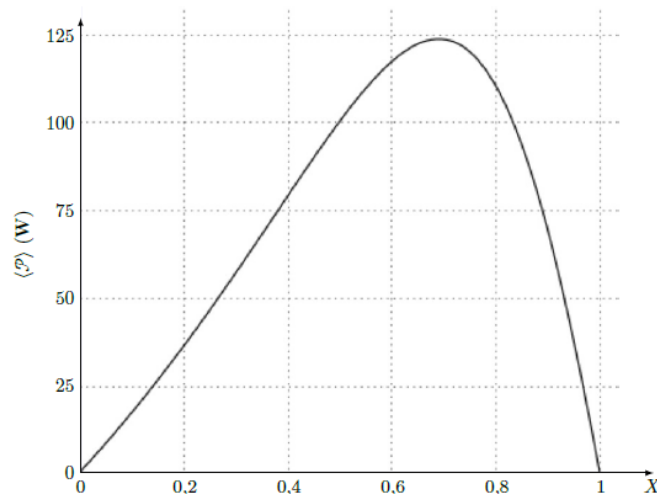


FIGURE 5 – Valeur moyenne temporelle $\langle \mathcal{P} \rangle$ en fonction de $X = \omega/\omega_0$