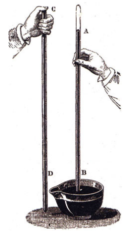
Thème III. L'énergie : conversions et transferts

Chapitre n°26 Statique des fluides dans un référentiel galiléen

À gauche, une montgolfière volant dans le ciel Ardéchois (Terre des frères Montgolfier)
À droite, une gravure de Blaise PASCAL (1623-1662), physicien, mathématicien, philosophe français, qui a notamment travaillé sur la pression. Une représentation du tube de TORRICELLI utilisé par Pascal en 1648 pour mesurer la variation de pression entre Clermont-Ferrand et le Puy-de-Dôme et ainsi justifier l'existence d'une « pression atmosphérique »



Comment évolue la pression dans l'océan ?
Comment évolue la pression dans l'atmosphère ? Pourquoi manque-t-on d'oxygène au sommet du Mont Blanc et de l'Éverest ?
Comment s'élève une Montgolfière ?

Pré-requis

- 1re : Thème L'énergie : conversions et transferts. Description d'un fluide au repos : forces pressions et loi fondamentale de la statique des fluides dans un fluide incompressible au repos.
- PCSI : Thème 2. Mouvements et interactions. Chapitre n°10. Les systèmes de coordonnées

Objectifs du chapitre

Introduction : La statique des fluides est l'étude mécanique des fluides (gaz ou liquide) à l'équilibre. C'est une introduction à la mécanique des fluides en mouvement qui sera étudiée en 2e année.

Objectifs du chapitre :

✓ Étudier le champ de pression dans les fluides (liquide et atmosphère) et en illustrer les effets dans quelques applications.

✓ Introduire un premier opérateur d'analyse vectorielle : l'opérateur gradient.

✓ Évaluer une résultante des forces de pression.

✓ Exploiter la relation d'Archimède.

Plan du cours

Ai-je bien appris mon cours ?

1 – ☺ – ☹ – Établir l'expression de l'équivalent volumique des forces de pression s'exerçant sur une particule fluide à l'aide du vecteur gradient.
2 – ☺ – ☹ – Donner l'expression du vecteur gradient en coordonnées cartésiennes.
3 – ☺ – ☹ – Donner les deux propriétés du vecteur gradient.
4 – ☺ – ☹ – Établir l'équation locale de la statique des fluides en traduisant l'équilibre d'une particule fluide.
5 – ☺ – ☹ – Exprimer l'équation locale de la statique des fluides lorsque seule la pesanteur est prise en compte.
6 – ☺ – ☹ – Établir l'expression du champ de pression dans un liquide incompressible et indilatable.
7 – ☺ – ☹ – Donner les hypothèses de l'atmosphère isotherme.
8 – ☺ – ☹ – Établir l'expression du champ de pression dans l'atmosphère isotherme.
9 – ☺ – ☹ – Citer les ordres de grandeurs de pression dans l'océan et dans l'atmosphère.
10 – ☺ – ☹ – Donner les expressions des surfaces élémentaires dans les différents systèmes de coordonnées.
11 – ☺ – ☹ – Calculer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur une surface plane.
12 – ☺ – ☹ – Calculer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur une surface hémicylindrique.
13 – ☺ – ☹ – Quelle est l'origine de la poussée d'Archimède ?
14 – ☺ – ☹ – Exprimer la poussée d'Archimède qui s'exerce sur un solide immergé.

FlashCards :

I Champ de pression dans un fluide au repos

L'objectif de cette partie est d'établir l'expression du champ de pression au sein d'un fluide, notamment dans l'océan (ou un grand volume d'eau) ou l'atmosphère (ou un grand volume de gaz).

I.1 Position du problème

L'océan et l'atmosphère ne peuvent pas être considérés à l'équilibre thermodynamique macroscopique car la pression, la masse volumique ... ne sont pas les mêmes en tout point du système. **L'échelle macroscopique n'est pas adaptée** ici pour décrire l'évolution de la pression avec l'altitude au sein de ces systèmes.

On va se placer à **l'échelle mésoscopique**, en étudiant une **particule de fluide** qui est un volume qui contient un **grand nombre de particules** (ce qui permet de réaliser des moyennes des grandeurs intensives, et donc définir la masse volumique ρ, la pression P, la température T, ...) mais **suffisamment petit pour permettre de rendre compte des variations des grandeurs intensives localement**, qui y sont uniformes.

On suppose que le système est à l'**état d'équilibre thermodynamique local**. Alors, à l'échelle mésoscopique, on peut définir les grandeurs intensives ρ, T, P à l'échelle de la particule de fluide.

Hypothèses pour tout le chapitre :

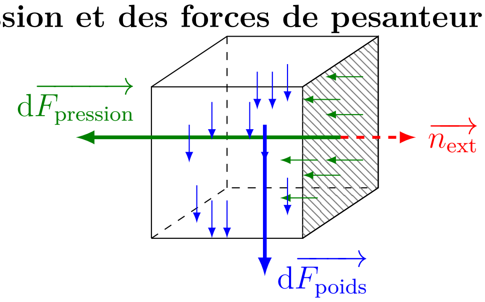
H1 Le **référentiel** d'étude (le référentiel terrestre) est supposé **galiléen** à l'échelle de l'étude menée.

H2 Le **fluide** est **au repos dans le référentiel d'étude** (cadre de la **statique**).

H3 Le **champ de pesanteur est uniforme** à l'échelle de l'étude.

I.2 Forces dans un fluide au repos

Capacité exigible : **Distinguer le statut des forces de pression et des forces de pesanteur**



On étudie une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$ au sein d'un **fluide au repos** dans le référentiel terrestre, considéré galiléen à l'échelle de l'étude.
Les actions mécaniques s'exerçant sur la particule de fluide sont de deux statuts différents.

I.2.a) Forces en volume

Définitions : Forces de volume

Les **forces de volume** correspondent aux actions mécaniques de **longue portée**, et agissent au cœur du fluide étudié.
Les forces élémentaires $\delta\overrightarrow{F_v}(M)$ de volume s'exerçant sur la particule de fluide en M de volume $\mathrm{d}\tau$ peuvent se mettre sous la forme $\delta\overrightarrow{F_v}(M) = \overrightarrow{\varphi}(M)\mathrm{d}\tau$, où $\overrightarrow{\varphi}(M)$ est la densité volumique de force en M, en $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-3}$.

À retenir : Le poids

Le poids est une force de volume. Le poids de la particule de fluide en M où la masse volumique est $\rho(M)$, de volume $\mathrm{d}\tau$, de masse δm s'écrit :

$$\delta\overrightarrow{F_{\text{poids}}} = \delta m\overrightarrow{g} = \rho(M)\overrightarrow{g}\mathrm{d}\tau$$

Exemple 1. Forces en volume

- On étudie un fluide chargé qui présente une densité volumique de charge électrique $\rho_e(M)$, plongé dans un champ électrique.
  Un volume $\mathrm{d}\tau$ est de charge $\delta q = \rho_e\mathrm{d}\tau$ et est soumis à la force de Lorentz : $\delta\overrightarrow{F_{\text{Lorentz}}} = \rho_e\mathrm{d}\tau\overrightarrow{E}(M)$, de densité volumique $\overrightarrow{\varphi_e}(M) = \rho_e(M)\overrightarrow{E}(M)$
- Dans un référentiel non galiléen (cf 2e année PC), il est nécessaire d'ajouter des « pseudo-forces » aux bilans des forces menés habituellement en référentiel galiléen.
  Une particule fluide dont on étudie l'équilibre dans un référentiel non galiléen est soumise à la force d'inertie d'entraînement $\delta\overrightarrow{f_{ie}} = -\delta m\overrightarrow{a_e}(M) = -\rho(M)\mathrm{d}\tau\overrightarrow{a_e}(M)$, où $\overrightarrow{a_e}(M)$ est l'accélération d'entraînement de la particule de fluide, qui est liée au mouvement du référentiel d'étude par rapport au référentiel galiléen de référence.
  C'est une force en volume de densité volumique $\overrightarrow{\varphi_{ie}} = -\rho(M)\overrightarrow{a_e}(M)$

I.2.b) Forces en surface

Définitions : Forces de surface

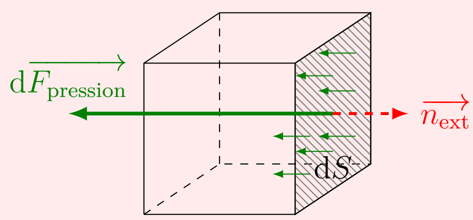
Les **forces de surface** correspondent à des **actions de contact**, c'est-à-dire à des **actions de courte portée** :La force élémentaire de surface $\delta\overrightarrow{F_{\text{surface}}}$ qui s'exerce sur la surface élémentaire $\mathrm{d}S$ peut s'écrire :

$$\delta\overrightarrow{F_{\text{surface}}} = \overrightarrow{\tau_s}\mathrm{d}S \quad \text{où } \tau_s \text{ est la contrainte surfacique}$$

À retenir : Les forces de pression

La **force élémentaire de pression exercée par le fluide sur l'élément de surface** $\mathrm{d}S$ où règne la pression $P(M)$ s'écrit :

$$\delta\overrightarrow{F_{\text{pression}}} = -P(M)\mathrm{d}S\overrightarrow{n_{\text{ext}}}$$



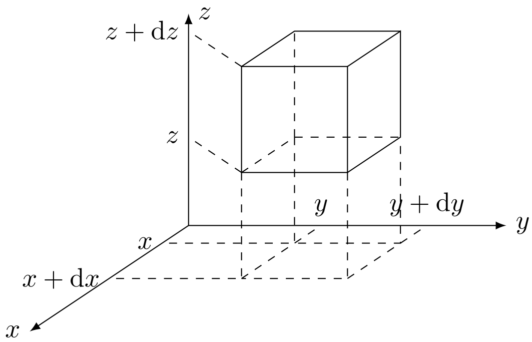
- $P(M)$ la pression en M en Pascal (Pa) ;
- $\mathrm{d}S$ l'élément infinitésimal de surface au voisinage de M ;
- $\overrightarrow{n_{\text{ext}}}$ le vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur de la particule fluide.

Dans un fluide en mouvement, les forces de viscosité sont des forces de surface (cf cours de PC et PSI).

I.2.c) Équivalent volumique des forces de pression

<u>Capacité exigible</u> : Exprimer l'équivalent volumique des forces de pression à l'aide d'un gradient.

On considère une particule de fluide parallélépipédique de côtés $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, située entre x et $x+\mathrm{d}x$, entre y et $y+\mathrm{d}y$, entre z et $z+\mathrm{d}z$.
On souhaite déterminer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur la particule de fluide.



Définition : Dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables

La dérivée partielle de f par rapport à la variable x, avec y et z maintenues constantes est définie par :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\delta x}$$

Point maths : développement limité au premier ordre

Pour une fonction de trois variables $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$, le développement limité au premier ordre au voisinage de x_0 (avec y et z constants) s'écrit

$$\begin{aligned} f(x_0+\mathrm{d}x, y_0, z_0) &= f(x_0,y_0,z_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}(x_0,y_0,z_0) \times \mathrm{d}x + o(\mathrm{d}x) \\ f(x_0+\mathrm{d}x, y_0, z_0) - f(x_0,y_0,z_0) &\approx \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}(x_0,y_0,z_0) \times \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}(x_0,y_0,z_0)$ se dit « dérivée partielle de f par rapport à x, à y et z constants, évaluée en x_0, y_0, z_0 », ou se lit « d-rond f sur d-rond x à y et z constants »

Démonstration à maîtriser n°1 — Équivalent volumique des forces de pression

R1. Exprimer la résultante des forces de pression $\delta\overrightarrow{F_{\text{pression}}}$ s'exerçant sur la particule de fluide comme une somme de 6 forces de pression.

Solution: La résultante des forces (surfaciques) de pression s'exerçant sur cette particule de fluide est la somme des 6 forces de pression qui s'exercent sur les 6 faces de la particule de fluide :
$\delta\overrightarrow{F_{\text{pression}}} = \delta\overrightarrow{F_1} + \mathrm{d}\overrightarrow{F_2} + \delta\overrightarrow{F_3} + \delta\overrightarrow{F_4} + \delta\overrightarrow{F_5} + \delta\overrightarrow{F_6}$, avec :

Face	$\mathrm{d}S$	$\overrightarrow{n}$	$\delta\overrightarrow{F_i}$
Derrière (1)	$\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	$+\overrightarrow{u_x}$	$P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overrightarrow{u_x}$
Devant (2)	$\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	$-\overrightarrow{u_x}$	$-P(x+\mathrm{d}x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overrightarrow{u_x}$
Gauche (3)	$\mathrm{d}x\mathrm{d}z$	$+\overrightarrow{u_y}$	$P(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\overrightarrow{u_y}$
Droite (4)	$\mathrm{d}x\mathrm{d}z$	$-\overrightarrow{u_y}$	$-P(x,y+\mathrm{d}y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\overrightarrow{u_y}$
Dessous (5)	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	$+\overrightarrow{u_z}$	$P(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overrightarrow{u_z}$
Dessus (6)	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	$-\overrightarrow{u_z}$	$-P(x,y,z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overrightarrow{u_z}$

R2. Pour chaque direction, successivement, exprimer la somme des deux forces s'exerçant dans cette direction. En utilisant le point maths ci-dessus, exprimer la résultante des forces de pression en fonction de dérivées partielles de la pression P, des vecteurs unitaires et du volume dτ de la particule de fluide.

Solution:

$$\begin{aligned}
\delta\overrightarrow{F_{\text{pression},x}} &= \mathrm{d}\overrightarrow{F_{\text{pression},1}} + \mathrm{d}\overrightarrow{F_{\text{pression},2}} \\
&= P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overrightarrow{u_x} - P(x+\mathrm{d}x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overrightarrow{u_x} \\
&= -\Big(P(x+\mathrm{d}x,y,z) - P(x,y,z)\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overrightarrow{u_x} \\
&= -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{(y,z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overrightarrow{u_x} \\
&= -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{(y,z)} \mathrm{d}\tau\overrightarrow{u_x} \\
\delta\overrightarrow{F_{\text{pression},y}} &= \mathrm{d}\overrightarrow{F_{\text{pression},3}} + \mathrm{d}\overrightarrow{F_{\text{pression},4}} \\
&= P(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\overrightarrow{u_y} - P(x,y+\mathrm{d}y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\overrightarrow{u_y} \\
&= -\Big(P(x,y+\mathrm{d}y,z) - P(x,y,z)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\overrightarrow{u_y} \\
&= -\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x,z)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z\overrightarrow{u_y} \\
&= -\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x,z)} \mathrm{d}\tau\overrightarrow{u_y} \\
\delta\overrightarrow{F_{\text{pression},z}} &= \mathrm{d}\overrightarrow{F_{\text{pression},5}} + \mathrm{d}\overrightarrow{F_{\text{pression},6}} \\
&= P(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overrightarrow{u_z} - P(x,y,z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overrightarrow{u_z} \\
&= -\Big(P(x,y,z,z) - P(x,y,z)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overrightarrow{u_z} \\
&= -\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{(x,y)} \mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overrightarrow{u_z} \\
&= -\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{(x,y)} \mathrm{d}\tau\overrightarrow{u_z}
\end{aligned}$$

R3. En déduire l'expression de la résultante des forces de pression s'exerçant sur la particule de fluide. Identifier le vecteur gradient.

Solution:

$$\boxed{\delta\overrightarrow{F_{\text{pression}}} = -\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{(y,z)}\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x,z)}\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{(x,y)}\overrightarrow{u_z}\right]\mathrm{d}\tau}$$

À retenir : Équivalent volumique des forces de pression

La résultante des forces de pression s'exerçant sur une particule de fluide de volume dτ est équivalente à une force volumique et s'écrit :

$$\delta\overrightarrow{F_{\text{pression}}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(P)\,\mathrm{d}\tau$$

de densité volumique : $\overrightarrow{\varphi_{\text{pression}}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(P)$

REMARQUES

Le calcul précédent montre que, **bien que les forces de pression soient des forces de surface, il est possible de les prendre en considération en introduisant une densité volumique de force liée au gradient du champ de pression.**

I.2.d) Opérateur gradient

Définition : Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables

La différentielle totale d'une fonction f, notée $\mathrm{d}f$, de 3 variables (x, y, z) indépendantes, $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$, est définie par :

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \mathrm{d}z$$

Définition : Opérateur gradient

Soit f une fonction scalaire réelle des trois coordonnées d'un point M, de différentielle totale $\mathrm{d}f$.
On définit le **<u>vecteur gradient de la fonction scalaire f</u>**, noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$, par :

$$\mathrm{d}f = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)\right) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

REMARQUES

— Le vecteur gradient de la fonction scalaire f en coordonnées cartésiennes s'exprime selon :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \overrightarrow{u_z}$$

— Le vecteur gradient de la fonction scalaire f en coordonnées cylindriques (r, θ, z) s'exprime selon :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z} \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,z} \overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{r,\theta} \overrightarrow{u_z}$$

— Le vecteur gradient de la fonction scalaire f en coordonnées sphériques (r, θ, φ) s'exprime selon :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} \overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} \overrightarrow{u_\varphi}$$

Activité n°2 — Propriétés du gradient de pression

On montrer que dans le champ de pesanteur seul, le gradient de pression vaut : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(P) = \rho\vec{g}$

R1. Quelle est la direction et quel est le sens du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(P)$? Comparer son sens à celui du sens de variation de la pression ?

R2. On montrera dans le § suivant que la pression ne dépend que de l'altitude z. Comment sont alors les courbes isobares ?

R3. Comment est $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(P)$ par rapport aux courbes isobares ?

À retenir : Propriétés du vecteur gradient

- **Direction de $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)$:**

  Sur une surface $\mathcal{S}$ iso-f définie comme l'ensemble des points M tel que $\forall M \in \mathcal{S}$, $f(M) = \text{cst}$:

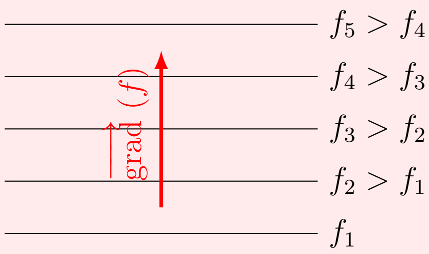
$$\mathrm{d}f = 0 = \overrightarrow{\text{grad}}\,(f) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \overrightarrow{\text{grad}}\,(f) \perp \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{\text{grad}}\,(f) = \overrightarrow{0} \right\}$$

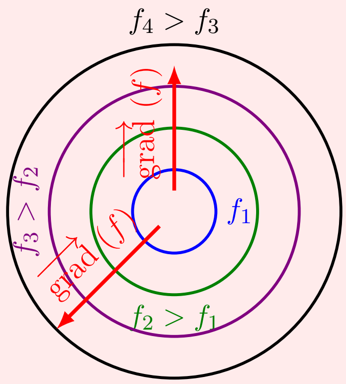
Le vecteur gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)$ est perpendiculaire aux surfaces iso-f.

- **Sens de $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)$:**

  Lorsque f augmente, $\mathrm{d}f > 0$, donc $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} > 0$

Le vecteur gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)$ est orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.





I.3 Équation de la statique des fluides

I.3.a) Cas général

<u>**Capacité exigible**</u> : **Établir l'équation locale de la statique des fluides.**

Méthode : Établir l'équation locale de la statique des fluides

1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur une particule de fluide (petit cube).
2. Traduire la condition d'équilibre de la particule de fluide (statique = pas de mouvement !).
3. En déduire l'équation locale de la statique des fluides.

Démonstration à maîtriser n°3 – Équation locale de la statique des fluides

On considère une particule de fluide en M, de volume $\mathrm{d}\tau$, où la masse volumique est $\rho(M)$, à l'équilibre dans le référentiel terrestre galiléen.

R1. Faire un bilan des forces s'exerçant sur la particule de fluide.
On notera $\overrightarrow{\varphi_{v,\text{autres}}}$ la densité volumique des forces autres que le poids et les force de pression.

Solution:

- Système : Particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$, et de masse $\mathrm{d}m$, située en M
- Référentiel : terrestre considéré galiléen
- Bilan des actions mécaniques :
  - poids $\mathrm{d}m\,\overrightarrow{g} = \rho(M)\mathrm{d}\tau\,\overrightarrow{g}$;
  - forces de pression, de résultante sur la particule de fluide : $\mathrm{d}\overrightarrow{F_P} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(P)\mathrm{d}\tau$
  - autres forces en volume : $\mathrm{d}\overrightarrow{F_{\text{autres}}} = \overrightarrow{\varphi_{v,\text{autres}}}\mathrm{d}\tau$

R2. Traduire l'équilibre de la particule fluide pour en déduire l'équation de la statique des fluides.

Solution: À l'équilibre : $\mathrm{d}m\overrightarrow{g} + \mathrm{d}\overrightarrow{F_P} + \mathrm{d}\overrightarrow{F_{\text{autres}}} = \overrightarrow{0}$
Soit $\rho(M)\overrightarrow{g}\mathrm{d}\tau - \overrightarrow{\text{grad}}\,(P)\mathrm{d}\tau + \overrightarrow{\varphi_{v,\text{autres}}}\mathrm{d}\tau = \overrightarrow{0}$
Soit $\boxed{\rho(M)\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,(P) + \overrightarrow{\varphi_{v,\text{autres}}} = \overrightarrow{0}}$

À retenir : Équation de la statique des fluides

L'équation locale de la statique des fluides s'écrit :

$$\overrightarrow{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(P) + \rho\overrightarrow{g} + \overrightarrow{\varphi_{v,\text{autres}}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\,(P) = \rho\overrightarrow{g} + \overrightarrow{\varphi_{v,\text{autres}}}$$

I.3.b) Dans le champ de pesanteur

On s'intéresse au champ de pression dans le champ de pesanteur : la particule fluide n'est soumise qu'à son poids et aux forces de pression. L'équation locale de la statique des fluides s'écrit alors :

$$\rho(M)\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,(P) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\,(P) = \rho(M)\overrightarrow{g}$$

<u>En choisissant l'axe (Oz) vertical ascendant</u> : $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$: $\overrightarrow{\text{grad}}\,(P) = -\rho(M)g\overrightarrow{u_z}$

$$\text{En projection : } \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho(M)g \end{cases}$$

Donc le champ de pression ne dépend ni de x ni de y, et l'équation locale de la statique des fluides s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho(M)g$$

<u>En choisissant l'axe (Oz) vertical descendant</u> : $\overrightarrow{g} = +g\overrightarrow{u_z}$: $\overrightarrow{\text{grad}}\,(P) = \rho(M)g\overrightarrow{u_z} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = +\rho(z)g$

À retenir : Équation de la statique des fluides dans le champ de pesanteur

L'équation locale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur terrestre s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho(z)g \qquad \text{Si } (Oz) \text{ est ascendant} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = +\rho(z)g \qquad \text{Si } (Oz) \text{ est descendant} \tag{2}$$

où ρ est la masse volumique du fluide et g l'intensité de la pesanteur.

Cette équation permet de déterminer l'expression du champ de pression $P(z)$ en fonction de l'altitude.

Attention aux signes

- Si Oz est ascendant : la pression diminue lorsque z augmente, donc $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} < 0$, donc $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \boxed{-}\rho g$
- Si Oz est descendant : la pression augmente lorsque z augmente, donc $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} > 0$, donc $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \boxed{+}\rho g$

I.4 Champ de pression dans un fluide incompressible et homogène (=liquide)

Capacité exigible : Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et homogène. Connaître des ordres de grandeur des champs de pression dans le cas de l'océan.

I.4.a) Hypothèses

À retenir : Hypothèses

On cherche dans cette partie à exprimer le champ de pression au sein d'un **liquide**, nous faisons les hypothèses supplémentaires suivantes :

H4 liquide **incompressible** : la masse volumique du liquide ne dépend pas de la pression ;

H5 liquide **homogène** : la masse volumique du liquide ne dépend pas de la position M dans le liquide.

La masse volumique sera considérée constante au sein du liquide dans la suite de la partie.

I.4.b) Champ de pression

Méthode : Exprimer le champ de pression dans un fluide incompressible et homogène

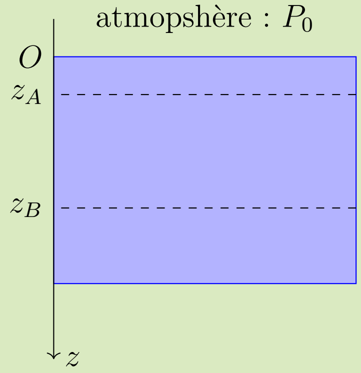
1. Écrire l'équation locale de la statique des fluides $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \pm\rho g$ (attention au signe !).
2. Le champ de pesanteur g est supposé uniforme et dans un fluide homogène et incompressible, ρ est constante, intégrer l'équation locale précédente, **sans oublier la constante d'intégration** !
3. Déterminer la constante d'intégration en utilisant la continuité de la pression à l'interface entre deux fluides.

Exercice à maîtriser n°4 – Ordres de grandeur des champs de pression dans le cas de l'océan

On se place dans l'océan, en considérant l'axe (Oz) descendant avec O situé à la surface de l'eau.
On assimile l'océan à un fluide homogène et incompressible de masse volumique proche de celle de l'eau liquide $\rho \approx 1\ \mathrm{kg \cdot L^{-1}}$. La pression atmosphérique est notée P_0.
On admet que la pression est continue à la surface du liquide : $P(z=0^-) = P(z=0^+)$ (vrai si on peut négliger les effets de tension superficielle).

R1. Établir l'expression du champ de pression $P(z)$ dans l'océan.

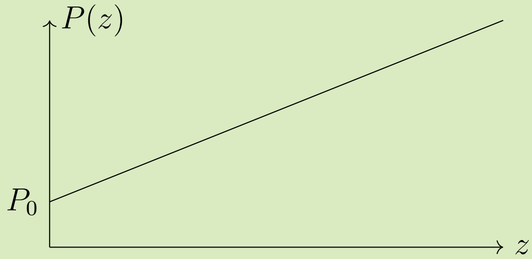
Solution:



Équation de la statique des fluides : $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \rho g$ (axe (Oz) descendant)
Le champ de pesanteur g est considéré uniforme (valable jusqu'à plusieurs km d'altitude).
La masse volumique ρ est constante car le liquide est considéré homogène et incompressible.
Ainsi l'intégration de l'équation de la statique des fluides est très rapide et donne : $P(z) = \rho g z + \mathrm{K}$ où K est une constante.

Or $P(0) = P_0$, donc $K = P_0$, alors

$$\boxed{P(z) = P_0 + \rho g z}$$



R2. Exprimer l'augmentation de la pression dans l'océan pour une variation de profondeur de 10 m.

Solution:
Prenons deux points A d'altitude z_A et B d'altitude z_B (avec $z_B > z_A$, donc plus profond que A) séparés d'une distance h.
On peut écrire :

$$\begin{aligned} P(z_A) &= P_0 + \rho g z_A \\ P(z_B) &= P_0 + \rho g z_B \\ P(z_B) - P(z_A) &= \rho g (z_B - z_A) \end{aligned}$$

Ainsi pour une variation de profondeur de 10 m, la pression varie de :
$\rho g (z_B - z_A) = 10^3 \times 9,81 \times 10 = 9,81.0^4$ Pa $\approx 10^5$ Pa $= 1$ bar
$\boxed{\text{Dans l'océan, la pression augmente de 1 bar tous les 10 mètres.}}$

R3. Calculer la pression dans les fonds océaniques (profondeur de l'ordre de 10 km).

Solution:
Dans les fonds océaniques, $H = 10$ km $= 10^4$ m : $P(H) = P_0 + \rho g H$
A.N. : $P(H) = 10^5 + 10^3 \times 9,81 \times 10^4 \approx 10^8$ Pa $= 10^3$ bar

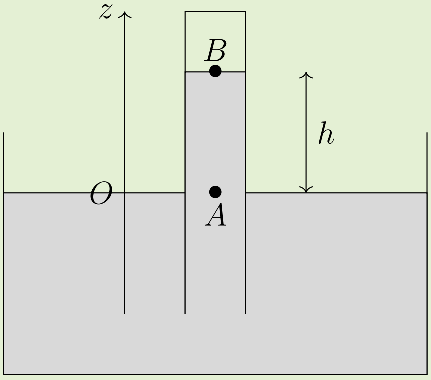
Activité n°5 — Expérience de Torricelli

https://blaisepascal.bibliotheques-clermontmetropole.eu/son-oeuvre/pascal-savant/physique/experience-
rCH=2

En 1647, Blaise Pascal reprit l'expérience de Torricelli : il remplit un tube de mercure qu'il retourne dans une cuve de mercure. Le mercure, métal liquide, descend dans le tube puis se stabilise. Il la réalise au Puy de Dôme à différentes altitudes. L'espace dans le tube au-dessus du liquide sera assimilé à du vide (rigoureusement, il s'agit de la vapeur de mercure à l'équilibre avec son liquide, à la pression de vapeur saturante).

R1. Faire un schéma de l'expérience.

Solution:



R2. Relier la pression atmosphérique P_0 à la hauteur du mercure dans le tube, le champ de pesanteur et la masse volumique du mercure ($\rho_{Hg} = 13,546\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$).

Solution:
Équation de la statique des fluides : $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho_{Hg} g$ (Oz ascendant)
ρ_{Hg} (Hg : métal liquide homogène et incompressible) et g sont des constantes.
Ainsi $P(z) = -\rho_{Hg} g z + K$, où K est une constante.
On peut l'écrire en A et B :

$$\begin{aligned} P(z_A) &= -\rho_{Hg} g z_A + K \\ P(z_B) &= -\rho_{Hg} g z_B + K \\ P(z_B) - P(z_A) &= -\rho_{Hg} g \underbrace{(z_B - z_A)}_{h} \end{aligned}$$

Au-dessus de B, le tube est vide (en pratique, il est presque vide, il contient de la vapeur de mercure, en équilibre avec son liquide : cf chapitre 19 sur les équilibres liquide-vapeur) : $P(z_B) \approx 0$ Pa.
En A, le mercure liquide est en contact avec l'atmosphère où règne la pression P_0 : $P(z_A) = P_0$.
Ainsi : $-P_0 = -\rho_{Hg} g h$, ainsi $\boxed{P_0 = \rho_{Hg} g h}$

R3. Lors de la réalisation de l'expérience, la mesure de la hauteur du mercure dans le tube a été faite en bas du Puy de Dôme et en haut. Sachant que le mercure est descendu de 9 cm, déterminer la différence de pression atmosphérique entre le bas et le haut du Puy de Dôme.

Solution:
On note h_B la hauteur de mercure dans le tube en bas du Puy de Dôme et h_H la hauteur de mercure dans le tube en haut du Puy de Dôme. On a $h_H = h_B - H$, avec $H = 9,0$ cm.
En bas du Puy de Dôme : $P_0^B = \rho_{Hg} g h_B$
En haut du Puy de Dôme : $P_0^H = \rho_{Hg} g h_H$
$P_0^B - P_0^H = \rho_{Hg} g \underbrace{(h_B - h_H)}_{=H}$
Ainsi $\boxed{P_0^B - P_0^H = \rho_{Hg} g H}$
A.N. : ⚠ unités !!!
La masse volumique doit être convertie en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$: $\rho_{Hg} = 13,546\ \text{kg} \cdot \text{L}^{-1} = \rho_{Hg} = 13,546.10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
La variation de hauteur de mercure : $H = 9$ cm $= 9.10^{-2}$ m.
Variation de la pression entre le bas et le haut du Puy de Dôme : $\underline{P_0^B - P_0^H = 1,2.10^4\ \text{Pa} = 0,12\ \text{bar}}$

I.5 Champ de pression dans un gaz : l'atmosphère isotherme

Capacité exigible : **Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait. Citer des ordres de grandeurs des champs de pression dans le cas de l'atmosphère.**

I.5.a) Modèle de l'atmosphère isotherme

À retenir : Hypothèses
Pour l'étude de la pression au sein de l'atmosphère, on fait les hypothèses supplémentaires suivantes :
H4' air assimilé à un **gaz parfait diatomique** ;
H5' atmosphère isotherme : la **température est uniforme dans l'atmosphère**

Attention
La masse volumique ρ N'est PAS CONSTANTE dans l'atmosphère !

I.5.b) Champ de pression dans l'atmosphère

Méthode : Exprimer le champ de pression dans l'atmosphère isotherme
1. Écrire l'équation locale de la statique des fluides $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \pm\rho(z)g$ (attention au signe !).
2. Utiliser la loi des gaz parfaits pour exprimer la masse volumique $\rho(z)$ en fonction de la pression $P(z)$ et de la température T_0 constante dans l'atmosphère.
3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la pression P sous la forme : $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \dfrac{1}{H} \times P(z) = 0$, où H est une constante.
4. Résoudre l'équation différentielle en déterminant la constante d'intégration.

Démonstration à maîtriser n°6 — Champ de pression dans l'atmosphère
On cherche, à établir l'expression de la pression en fonction de l'altitude dans le cadre des hypothèses précédentes. On prendra l'axe (Oz) est l'axe vertical ascendant avec l'origine O située au « niveau de la mer » et on notera T_0 la température constante de l'atmosphère.

R1. Exprimer la masse volumique de l'air dans l'atmosphère en fonction de P, R, T_0, M_{air}.

Solution: Considérons une particule de fluide de masse m, de volume V, contenant n moles.

Masse volumique : $\rho(z) = \dfrac{m}{V} = \dfrac{n \times M_{\text{air}}}{V}$

La loi des gaz parfaits donne : $P(z)V = nRT_0$, soit $\dfrac{n}{V} = \dfrac{P}{RT_0}$

Ainsi $\boxed{\rho(z) = \dfrac{M_{\text{air}} P(z)}{RT_0}}$

R2. Sachant que l'air est composé, en quantité de matière, de 80 % de diazote et de 20% de dioxygène, déterminer la masse molaire de l'air.

Solution: $\boxed{M_{\text{air}} = 0,80 \times M(N_2) + 0,20 \times M(O_2)}$
A.N. : $M_{\text{air}} = 0,80 \times 2 \times 14 + 0,20 \times 2 \times 16$
$\underline{M_{\text{air}} = 28,8 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 28,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}$
⚠ ATTENTION : l'unité SI de la masse es le KILOGRAMME (et non le gramme), il faut convertir les masses molaires en kg/mol.

R3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $P(z)$.

Solution: Équation de la statique des fluides : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho(P(z))g}$, car (Oz) ascendant.

ATTENTION : dans l'air N'est PAS un fluide incompressible, sa masse volumique dépend de la pression, qui elle-même dépend de l'altitude, donc ρ N'est PAS constante.

L'équation de la statique des fluides fait intervenir deux fonctions inconnues : $P(z)$ et $\rho(z)$, il faut donc une deuxième équation pour résoudre le problème. Elle est donnée par la loi des gaz parfaits (hypothèse du calcul) : $\rho(z) = \dfrac{M_{\text{air}} P(z)}{RT_0} g$.

Ainsi : $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{M_{\text{air}} P(z)}{RT_0} g \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \underbrace{\dfrac{M_{\text{air}} g}{RT_0}}_{=\frac{1}{H}} P(z) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \dfrac{P(z)}{H} = 0}$

R4. Introduire une hauteur H caractéristique de la variation de P. Faire l'application numérique.

Solution: On reconnait une équation différentielle du 1$^{\text{er}}$ ordre à coefficient constant, du type de celle obtenue pour le circuit RC série. En effet, dans le cadre des hypothèses, g est uniforme (vrai à 1% jusqu'à plus de 10 km d'altitude) et la température T_0 est supposée la même en tout point, donc la grandeur $\dfrac{M_{\text{air}} g}{RT_0}$ est une constante.

La grandeur $\dfrac{M_{\text{air}} g}{RT_0}$ est homogène à l'inverse d'une distance, on introduit H la hauteur caractéristique, avec $\dfrac{1}{H} = \dfrac{M_{\text{air}} g}{RT_0}$, soit $\boxed{H = \dfrac{RT_0}{M_{\text{air}} g}}$

A.N. : $\underline{H = 8,5.10^3 \text{ m} = 8,5 \text{ km}}$

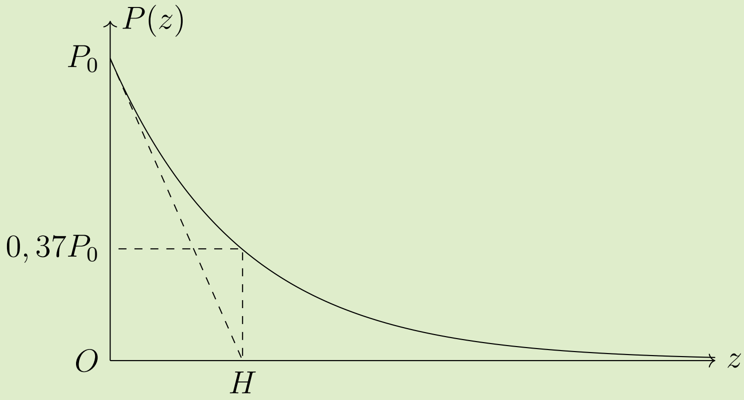
R5. Déterminer l'expression de la pression P en fonction de z. On notera P_0 la pression en $z = 0$. Représenter l'allure de la fonction P en fonction de z.

Solution:

Résolvons : $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \dfrac{P}{H} = 0$

⚠ ici la variable est z et non t.

Solution générale : $P(z) = Ke^{-\frac{z}{H}}$
Si on note P_0 la pression en $z = 0$, alors
$\boxed{P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}}$



Activité n°7 — Ordres de grandeur dans l'atmosphère

R1. Calculer la variation de pression dans l'air pour une variation d'altitude de 10 m. Comparer à celle obtenue dans l'océan.

Peut-on faire l'hypothèse que la pression est la même en tout point de la salle ? en tout point d'une piscine ?

Solution:
Plaçons-nous à l'altitude $h = 10$ m : $P(z = 10\text{ m}) = P_0 e^{-\frac{h}{H}} = 0,999P_0$
La variation de la pression pour une variation d'altitude de 10 m, est de moins de $0,001 \times P_0 = 100$ Pa. Cette variation est très très faible. Pour mémoire, la variation est de 1 bar (soit 10^5 Pa) tous les 10 m dans l'eau.
Dans une salle, on peut largement considérer que la pression est la même en tous points de la salle.
Dans une piscine, la pression varie fortement avec la profondeur et on ne peut pas considérer la pression comme étant uniforme.

R2. Calculer la pression au sommet du Puy de Dôme ($z_{PdD} = 1464$ m).

Solution: A.N. : $P(z_{PdD}) = 0,84$ bar

I.5.c) Résolution numérique

Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, étudier les variations de température et de pression dans l'atmosphère.

i- Position du problème

Comme on peut le voir sur la figure du paragraphe § I.5.a), le modèle isotherme n'est valable qu'entre 10 et 20 km environ.

Voici une résolution numérique de l'équation de la statique des fluides en prenant en compte les variations de la température avec l'altitude. Pour cela, on doit résoudre :

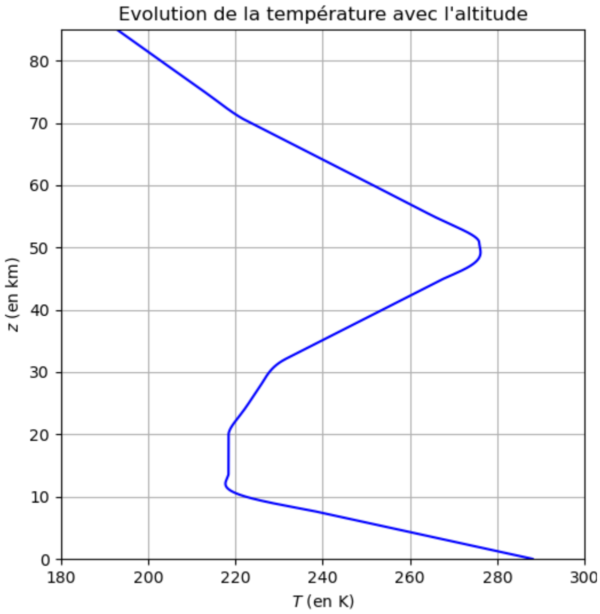
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} & = & kISA(z) \\ \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} & = & -\dfrac{M_{\mathrm{air}}}{R}\dfrac{P(z)}{T(z)} \end{cases}$$

où $kISA(z)$ est la fonction de l'altitude qui donne le gradient de température avec l'altitude.

ii- Gradient de température

On utilise le **modèle ISA** qui divise l'atmosphère en différentes couches avec une distribution linéaire de la température.

$$\begin{array}{lcccllcl}
0 & \leq & z & < & 11\text{ km} & : & \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} & = -6,5\text{ K}\cdot\text{km}^{-1} \\
11\text{ km} & < & z & < & 20\text{ km} & : & \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} & = 0 \\
20\text{ km} & < & z & < & 32\text{ km} & : & \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} & = 1\text{ K}\cdot\text{km}^{-1} \\
32\text{ km} & < & z & < & 47\text{ km} & : & \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} & = 2,8\text{ K}\cdot\text{km}^{-1} \\
47\text{ km} & < & z & < & 51\text{ km} & : & \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} & = 0 \\
51\text{ km} & < & z & < & 71\text{ km} & : & \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} & = -2,8\text{ K}\cdot\text{km}^{-1} \\
71\text{ km} & < & z & < & 85\text{ km} & : & \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} & = 2,0\text{ K}\cdot\text{km}^{-1}
\end{array}$$



En `python`, on définit la fonction `kISA(z)` qui renvoie la valeur de la dérivée de T en fonction de z.

iii- Outil numérique de résolution

On utilise la fonction `solve_ivp` disponible dans la bibliothèque `scipy.integrate` :

```
resol=solve_ivp(f,(t0,tf),y0,t_eval=t)
temps=resol.t # on récupère les instants de résolutions
# resol.y est le tableau des valeurs de y, chaque colonne correspondant à un
    instant de résolution.
y0=resol.y[0] # récupération de la 1ère ligne de resol.y
y1=resol.y[1] # récupération de la 1ère ligne de resol.y
```

Paramètres d'entrée :

- `f` : la fonction $f(t,y)$ telle que $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t,y)$;
- `(t0,tf)` : l'intervalle de temps de résolution (t_0,t_f), tuple de 2 flottants ;
- `y0` le vecteur de condition initiale y_0 (tableau `numpy`) ;
- `t_eval=t`, avec `t` le tableau des instants de résolution.

Sortie :

- `resol.t` : renvoie les instants de résolution (identique à `t`)
- `resol.y[k]` renvoie la k[e] ligne du tableau, c'est-à-dire les valeurs de la k[e] composante du vecteur `y` (tableau), à chaque instant de résolution.

iv- Réécriture du système d'équation différentielle

Pour résoudre le système des deux équations différentielles précédent, il faut commencer par **réécrire le système d'équations différentielles en une seule équation différentielle vectorielle** pour qu'on puisse la résoudre avec la fonction `solve_ivp`.

On pose $X(z) = \begin{pmatrix} T(z) \\ P(z) \end{pmatrix}$

Alors $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} \\ \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kISA(z) \\ -\dfrac{M_{\text{air}}}{R}\dfrac{P(z)}{T(z)} \end{pmatrix} = f(z, X)$

La fonction qui définit l'équation différentielle, sous la forme attendue par la fonction `solve_ivp` :

$\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z} = f(z, X)$, s'écrit $f(z, X) = \begin{pmatrix} kISA(z) \\ -\dfrac{M_{\text{air}}}{R}\dfrac{P(z)}{T(z)} \end{pmatrix}$

En `python`, la fonction $f(z, X)$ est définie par une fonction `systDiff(z,X)` qui prend deux arguments : `z` un flottant (c'est l'altitude) et `X` un tableau de deux éléments `X=np.array([...,...])`, avec `X[0]` la température à l'altitude `z` et `X[1]` la pression à l'altitude `z`.

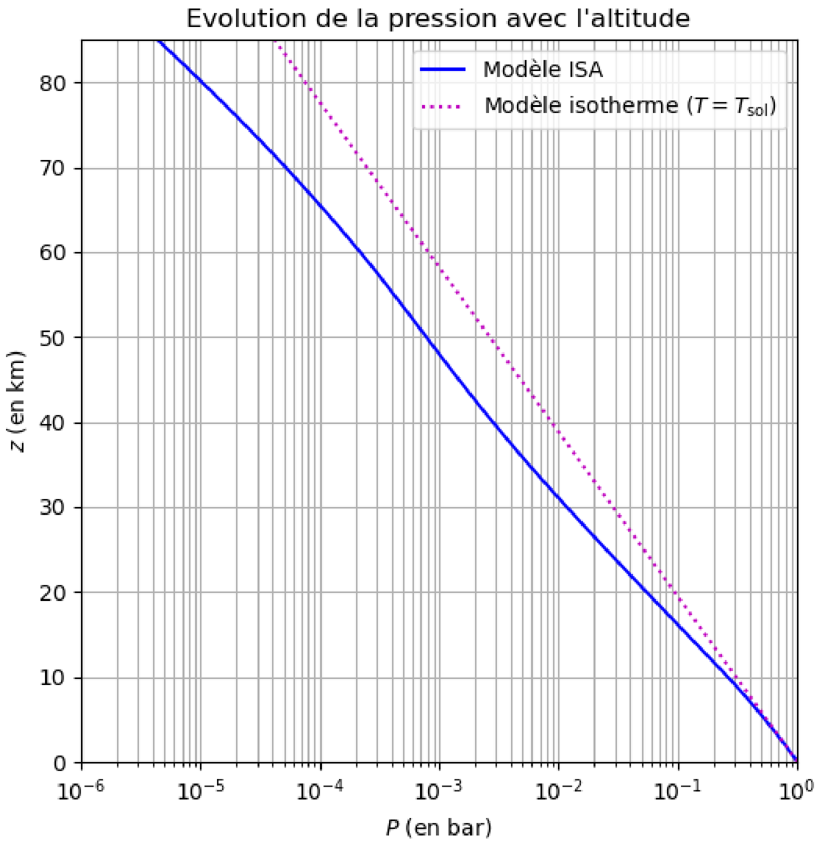
`systDiff(z,X)` renvoie un tableau de deux éléments : le premier élément est la dérivée de la température en z (donnée par `kISA`, et le deuxième élément est la dérivée de la pression en z (donnée par l'équation de la statique des fluides).

v- Code python complet .

```python
## Importation des bibliothèques utiles
import numpy as np                          # pour la manipulation des tableaux
import matplotlib.pyplot as plt             # pour les représentations graphiques
from scipy.integrate import solve_ivp       # pour la résolution des équations différentielles
## Définition des constantes du problème
g = 9.81                                    # accélération de la pesanteur (en m/s^2)
Mair = 29e-3                                # masse molaire de l'air (en kg/mol)
R = 8.314                                   # constante du gaz parfait (en J/K/mol)
Tsol = 288                                  # température de l'atmosphère au niveau du sol (en K)
Psol = 1.013e5                              # pression de l'atmosphère au niveau du sol (en Pa)
## Définition du gradient thermique vertical selon le modèle ISA
def kISA(z):
    """ z est l'altitude en mètres. La fonction renvoie la valeur du gradient thermique vertical à l'altitude z (en K/m). """
    if 0 <= z < 11e3:
        return -6.5e-3
    elif z < 20e3:
        return 0
    elif z < 32e3:
        return 1.0e-3
    elif z < 47e3:
        return 2.8e-3
    elif z < 51e3:
        return 0
    elif z < 71e3:
        return -2.8e-3
    elif z < 85e3:
        return -2.0e-3
    else:
        return None
```

```python
## Définition du système différentiel à résoudre
def systDiff(z,X):
    """X désigne le vecteur inconnu de dimension 2
    X[0] : température ; X[1] : pression) ; z désigne l'altitude.
    La fonction renvoie respectivement la dérivée de la température et la dérivée de la pression à l'altitude z."""
    dT = kISA(z)                     # dérivée verticale de la température
    dP = - Mair*g/R*X[1]/X[0]      # dérivée verticale de la pression (éq° de la statique des fluides)
    return np.array([dT, dP])

## Définition des conditions aux limites
CAL = [Tsol, Psol]
## Définition de l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles on cherche la solution numérique approchée du système différentiel précédent
z = np.linspace(0, 85e3, 10000)    # on choisit 10000 points régulièrement espacés entre 0 et 85 km d'altitude
## La résolution en elle-même
sol = solve_ivp(systDiff, (0,85*10**3), np.array(CAL),t_eval=z)
Z=sol.t #extraction des valeurs de l'altitude
T = sol.y[0]                        # extraction des valeurs de la température
P = sol.y[1]                        # extraction des valeurs de la pression
## Pression dans le modèle isotherme
def PisoT(z, T0):                  # pour comparaison
    """ Calcule la valeur de P à l'altitude z selon le modèle isotherme. Par défaut, T0 est fixée à 288 K. """
    return Psol*np.exp(-Mair*g*z/(R*T0))
## Représentation graphique des résultats
plt.figure(figsize=(13,6))
plt.subplot(1,2,1)                  # graphique de gauche
plt.title("Evolution de la température avec l'altitude")
plt.plot(T, Z*1e-3, 'b-')
plt.xlim(180,300), plt.xlabel(r"$T$ (en K)")
plt.ylim(0,85), plt.ylabel(r"$z$ (en km)")
plt.grid()
plt.subplot(1,2,2)                  # graphique de droite
plt.title("Evolution de la pression avec l'altitude")
plt.semilogx(P*1e-5, Z*1e-3, 'b-', label = "Modèle ISA")
plt.semilogx(PisoT(Z,288)*1e-5, Z*1e-3,'m:', label = r"Modèle isotherme ($T=T_{\rm sol}$)")
plt.xlim(1e-6,1)
plt.ylim(0,85)
plt.xlabel(r"$P$ (en bar)")
plt.ylabel(r"$z$ (en km)")
plt.legend(loc=0)
plt.grid(which = 'both')
plt.show()
```



I.5.d) Facteur de Boltzmann

<u>**Capacité exigible**</u> : **S'appuyer sur la loi d'évolution de la densité moléculaire de l'air dans le cas de l'atmosphère isotherme pour illustrer la signification du facteur de Boltzmann. Utiliser k_BT comme référence des énergies mises en jeu à l'échelle microscopique.**

La densité moléculaire, c'est-à-dire le nombre de molécules par unité de volume, s'exprime, à l'aide de la loi des gaz parfaits :

$$\begin{aligned} n^*(z) &= \frac{N}{V} \\ &= \frac{n \times \mathscr{N_A}}{V} \\ &= \frac{P(z)\mathscr{N_A}}{RT_0} \\ &= \frac{P(z)}{k_BT_0} \\ &= \frac{P(0)}{k_BT_0}\exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) \\ &= n^*(0)\exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) \end{aligned}$$

On peut relier la masse molaire à la masse m^* moyenne d'une molécule : $M = m^* \times \mathscr{N_A}$

$$\begin{aligned} n^*(z) &= n^*(0)\exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) \\ &= n^*(0)\exp\left(-\frac{m^* \times \mathscr{N_A} gz}{RT_0}\right) \\ &= n^*(0)\exp\left(-\frac{m^*gz}{\frac{R}{\mathscr{N_A}}T_0}\right) \\ &= n^*(0)\exp\left(-\frac{m^*gz}{k_BT_0}\right) \end{aligned}$$

On reconnait, à l'intérieur de l'exponentielle, deux énergies :

- m^*gz qui est l'**énergie potentielle de pesanteur d'une molécule située à l'altitude z** ;
- k_BT qui est l'**énergie d'agitation thermique d'une molécule à la température T**.

La densité moléculaire à l'altitude z dépend de la valeur du rapport des deux énergies mises en jeu ici, qui sont d'effets inverses. **La pesanteur tend à ramener toutes les molécules à l'altitude minimale pour minimiser l'énergie potentielle, tandis que l'agitation thermique tend à homogénéiser la densité moléculaire.**

On peut alors décrire **deux cas limites** selon la valeur de l'énergie potentielle de pesanteur (c'est-à-dire de l'altitude) et de l'énergie d'agitation thermique (c'est-à-dire de la température) :

- Si $k_BT_0 \gg m^*gz$, alors $\exp\left(-\dfrac{m^*gz}{k_BT_0}\right) \sim 1$, ainsi $\forall z$, $n^*(z) \approx n^*(0)$: **les molécules sont uniformément réparties dans l'atmosphère. L'agitation thermique arrive à vaincre la pesanteur.**
- Si $k_BT_0 \ll m^*gz$, alors, pour $z \neq 0$, $\exp\left(-\dfrac{m^*gz}{k_BT_0}\right) \sim 0$ et $n^*(z) \approx 0$ dès que $z \neq 0$: **les molécules sont toutes situées en $z = 0$, c'est-à-dire à l'altitude pour laquelle l'énergie potentielle est minimale. L'agitation thermique est trop faible et n'arrive pas à vaincre la pesanteur.**

À retenir : Facteur de Boltzmann

On considère un système thermodynamique à l'équilibre à la température T, dans lequel les énergies prises par les particules peuvent avoir des valeurs E_i différentes.
Le nombre moyen N_i de particules ayant l'énergie E_i est proportionnelle au **facteur de Boltzmann** :

$$N_i(E_i) \propto \exp\left(-\frac{E_i}{k_BT}\right)$$

II Résultante des forces de pression sur une surface

L'objectif de cette partie est de calculer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur une surface d'un solide plongé dans un fluide (ou plusieurs fluides).

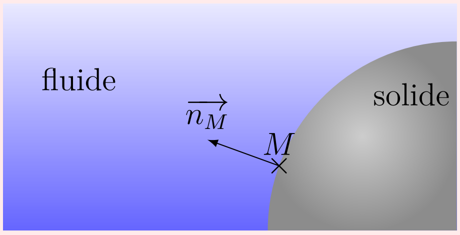
II.1 Expression

À retenir : Résultante des forces de pression

La résultante des forces de pression exercée par un fluide sur la surface totale $\mathscr{S}$ d'un solide en contact avec le fluide est égale à la somme des forces élémentaires de pression s'exerçant sur les éléments de surface $\mathrm{d}S_M$ à la surface du solide :

$$\overrightarrow{F_P} = \iint_{M\in\mathscr{S}} \delta\overrightarrow{F_P}(M) = \iint_{M\in\mathscr{S}} -P(M)\,\overrightarrow{n_M}\,\mathrm{d}S_M$$

avec $\overrightarrow{n_M}$ le vecteur unitaire dirigé du solide vers le fluide, et perpendiculaire à la surface solide.



Il s'agit d'une intégrale double car on intègre sur une surface, et donc sur deux variables d'espace.

Attention – Ne pas confondre

Il ne faut pas confondre :

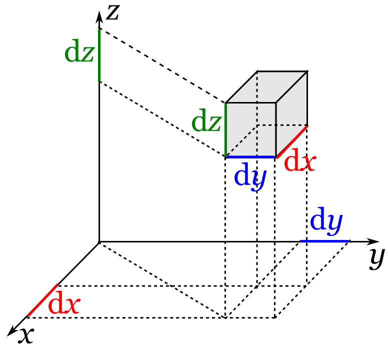
- l'**équivalent volumique des forces de pression**, qui permet d'exprimer la **résultante des forces de pression sur une particule de fluide**, pour déterminer l'expression de la pression localement.
- la **résultante des forces de pression s'exerçant sur une surface** à l'**échelle macroscopique**.

II.2 Éléments de surface

<u>**Capacité exigible**</u> : **Exprimer une surface élémentaire dans un système de coordonnées adaptées.**

II.2.a) Coordonnées cartésiennes

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_cartesiennes.php

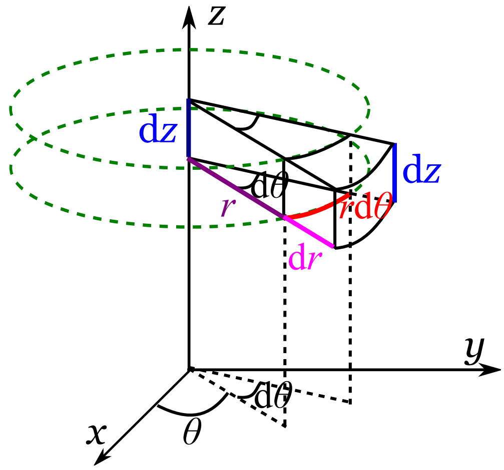


À retenir : Éléments de surface

- dans le plan (Oxy) : $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- dans le plan (Oxz) : $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}z$
- dans le plan (Oyz) : $\mathrm{d}S = \mathrm{d}y\mathrm{d}z$

II.2.b) Coordonnées cylindriques

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_cylindriques.php



À retenir : Éléments de surface

- pour une surface à $z = \text{cste}$ (coordonnées polaires) :

$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}r$$

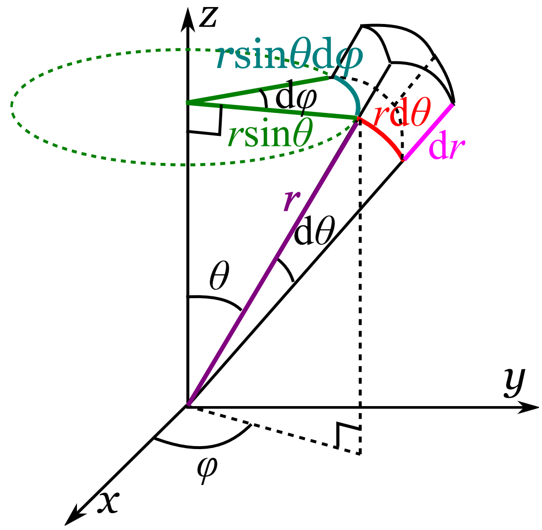
- pour une surface à $r = \text{cste}$ (sur la surface latérale d'un cylindre)

$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$$

- pour une surface à $\theta = \text{cste}$

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}r \times \mathrm{d}z$$

II.2.c) Coordonnées sphériques



http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_spheriques.php

À retenir : Élément de surface

L'élément de surface à la surface de la sphère de rayon r :

$$\boxed{\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\theta \times r\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi \;=\; r^2\ \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi}$$

II.3 Calculs de résultantes de forces de pression

<u>**Capacité exigible**</u> : **Utiliser les symétries pour déterminer la direction d'une résultante de forces de pression. Évaluer une résultante de forces de pression.**

Méthode : Calcul de la résultante des forces de pression

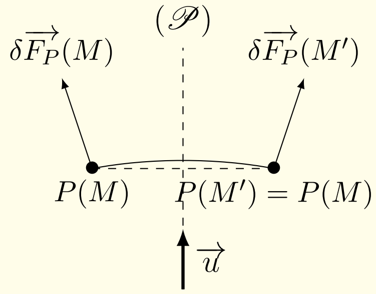
On souhaite calculer la résultante des forces de pression exercée par un fluide sur une surface $\mathcal{S}$ d'un solide.

1. Déterminer le champ de pression $P(M)$, dans le fluide, en tout point M de la surface.
2. Choisir le système de coordonnées adapté au problème pour se repérer sur la surface du solide et exprimer l'élément de surface $\mathrm{d}S_M$ sur la paroi.
3. En déduire la force de pression élémentaire $\delta\overrightarrow{F_P}(M) = -P(M)\mathrm{d}S_M\overrightarrow{n_M}$, avec $\overrightarrow{n_M}$ le vecteur unitaire dirigé du solide vers le fluide.
   ⚠ attention au sens de la force par rapport au sens du vecteur unitaire (vérifier le sens physique).
4. Dans le cas où la direction de la force de pression élémentaire dépend du point M considéré.
   Il faut étudier les symétries du problème pour déterminer, à l'aide d'un schéma, la direction de la résultante des forces de pression : $\overrightarrow{F_P} = F_P\,\overrightarrow{u}$.

Définition : plan de symétrie

On dit que le **problème admet un plan de symétrie** $(\mathscr{P})$ si :

- la surface solide est symétrique par rapport au plan $(\mathscr{P})$,
- et si la pression est la même en deux points M et M' symétriques par rapport au plan $(\mathscr{P})$.



5. Exprimer la projection de la résultante des forces de pression sur la direction déterminée par symétrie

$$\begin{aligned} F_P &= \overrightarrow{F_P}\cdot\overrightarrow{u} = \iint_{M\in\mathscr{S}} \delta\overrightarrow{F_P}(M)\cdot\overrightarrow{u} \\ &= \iint_{M\in\mathscr{S}} \Big(-P(M)\,\overrightarrow{n_M}\cdot\overrightarrow{u}\;\mathrm{d}S_M\Big) \end{aligned}$$

6. En déduire le vecteur $\overrightarrow{F_P} = F_P\,\overrightarrow{u}$.

À retenir : Théorème de Fubini

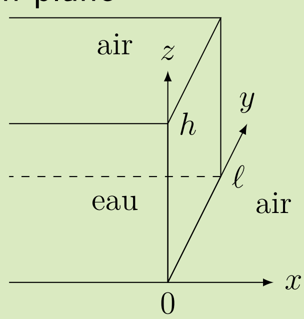
On admet le théorème de Fubini, pour une fonction $f : (x,y) \mapsto f_1(x)\times f_2(y)$, où f_1 et f_2 sont des fonctions continues, et les bornes d'intégration sont indépendantes de l'autre variable d'espace :

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \times \int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y$$

Si les bornes selon y dépendent de x :

$$\iint_{[a,b]\times[c(x),d(x)]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(f_1(x)\times\Big(\int_{c(x)}^{d(x)} f_2(y)\mathrm{d}y\Big)\Big)\mathrm{d}x$$

Exercice à maîtriser n°8 – Force de pression sur une vitre d'aquarium plane



On considère la vitre plane d'un aquarium de hauteur $h = 50$ cm et de largeur $\ell = 1{,}0$ m. L'eau affleure au sommet de la vitre.
On note ρ la masse volumique constante de l'eau liquide, g le champ de pesanteur et P_0 la pression atmosphérique à la surface de l'eau.

R1. Exprimer la pression au sein de l'eau et dans l'air.

Solution:
Au sein de l'eau, la pression est donnée par l'équation de la statique des fluides : $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$ (axe Oz ascendant).
Par intégration : $P(z) = -\rho g z + K$
Par continuité de la pression à la surface de l'eau (en $z = h$) : $P(h) = P_0 = -\rho g h + K$, donc $K = P_0 + \rho g z$
Ainsi $\boxed{P(z) = P_0 + \rho g(h - z)}$
Dans l'air, à l'échelle de 1,0 m, on peut considérer que la pression est homogène, donc on peut considérer que la pression P_0 règne en tous points de la surface de l'aquarium.

R2. Exprimer la surface élémentaire $\mathrm{d}S_M$ de la paroi dans le système de coordonnées adapté.

R3. En déduire l'expression de la force de pression élémentaire $\delta\overrightarrow{F_P}(M)$ exercée par l'eau et l'air sur la surface $\mathrm{d}S_M$.

Solution: Pour se repérer à la surface de la vitre, on utilise les coordonnées cartésiennes. La vitre étant dans le plan $x = 0$, la surface élémentaire s'exprime selon $\boxed{\mathrm{d}S_M = \mathrm{d}y\mathrm{d}z}$.

$$\begin{aligned}
\delta\overrightarrow{F_P} &= \delta\overrightarrow{F_{P,\text{eau}}} + \delta\overrightarrow{F_{P,\text{air}}} \\
&= P_{\text{eau}}\mathrm{d}S\overrightarrow{u_x} - P_{\text{air}}\mathrm{d}S\overrightarrow{u_x} \\
&= \Big(P_0 + \rho g(h - z) - P_0\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overrightarrow{u_x}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\delta\overrightarrow{F_P} = \rho g(h - z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overrightarrow{u_x}}$

R4. Exprimer la résultante des forces de pression exercées par l'air et l'eau sur la vitre à l'aide d'une intégrale double et la calculer.

R5. Faire l'application numérique.

Solution: La résultante des forces de pression exercées sur la vitre se calcule en intégrant la force élémentaire de pression exprimée précédemment :

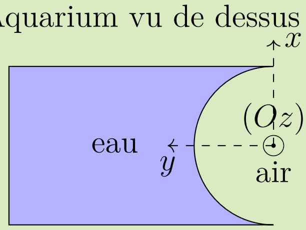
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_P} &= \iint_{\text{vitre}} \delta\overrightarrow{F_P} \\
&= \int_{y=0}^{\ell}\int_{z=0}^{h}\Big(\rho g(h - z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overrightarrow{u_x}\Big) \\
&= \rho g\Big(\int_{y=0}^{\ell}\int_{z=0}^{h}(h - z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Big)\overrightarrow{u_x} \\
&= \rho g\int_0^{\ell}\mathrm{d}y \times \int_0^{h}(h - z)\mathrm{d}z\overrightarrow{u_x} \\
&= \rho g\ell\left[-\frac{1}{2}(h - z)^2\right]_0^h\overrightarrow{u_x} \\
&= -\frac{1}{2}\rho g\ell\Big(0 - h^2\Big)\overrightarrow{u_x}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\overrightarrow{F_P} = \dfrac{1}{2}\rho g\ell h^2\overrightarrow{u_x}}$

$\underline{\|\overrightarrow{F_P}\| = 1,2.10^3\ \mathrm{N}}$

Exercice à maîtriser n°9 – Force de pression sur une vitre d'aquarium hémicylindrique

Aquarium vu de dessus

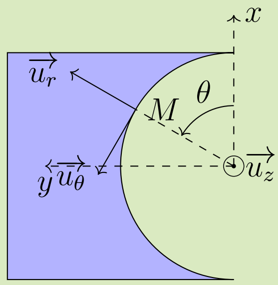


La vitre d'un aquarium a la forme d'un demi-cylindre d'axe vertical, de hauteur h et de rayon R. L'eau affleure au sommet de la vitre.
On note ρ la masse volumique constante de l'eau liquide, g le champ de pesanteur et P_0 la pression atmosphérique à la surface de l'eau.

R1. Quel est le système de coordonnées adapté pour se repérer sur la surface de la vitre ?

Solution:

La surface de la vitre est un hémicylindre, il est donc pertinent de se repérer à l'aide des coordonnées cylindriques $M(r, \theta, z)$.



R2. Exprimer la pression au sein de l'eau et la pression au sein de l'air en un point de la surface.

Solution: Au sein de l'eau, la pression s'exprime, comme précédemment : $\boxed{P_{\text{eau}}(z) = P_0 + \rho g(h - z)}$
De même dans l'air : $\boxed{P_{\text{air}} = P_0}$

R3. Écrire l'élément de surface $\mathrm{d}S_M$ dans le système de coordonnées choisi précédemment.

Solution:
La surface élémentaire est sur le cylindre de rayon R, c'est-à-dire à r constant et s'écrit donc $\mathrm{d}S_M = R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.

R4. En déduire la force élémentaire de pression exercée sur l'élément de surface $\mathrm{d}S_M$ par l'eau et l'air. On n'oubliera pas de préciser le vecteur unitaire.

Solution:

$$\begin{aligned}
\delta\overrightarrow{F_P} &= \delta\overrightarrow{F_{P,\text{eau}}} + \delta\overrightarrow{F_{P,\text{air}}} \\
&= -P_{\text{eau}}\mathrm{d}S\overrightarrow{u_r} + P_{\text{air}}\mathrm{d}S\overrightarrow{u_r} \\
&= \Big(-P_0 - \rho g(h - z) + P_0\Big)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\overrightarrow{u_r}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\delta\overrightarrow{F_P} = -\rho g(h - z)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\overrightarrow{u_r}}$

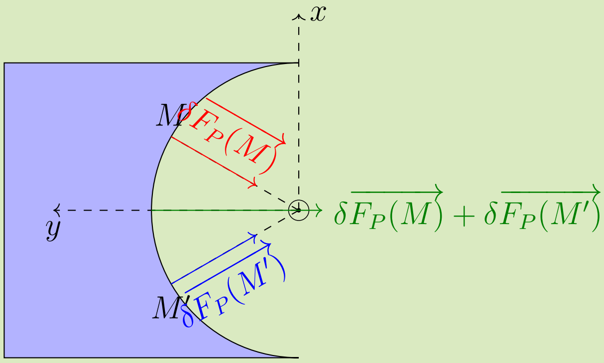
R5. En déduire l'expression de la résultante des forces de pression s'exerçant sur la paroi à l'aide d'une intégrale double.

Solution: Résultante des forces de pression : $\boxed{\overrightarrow{F_P} = \iint_{\text{vitre}} \Big(-\rho g(h - z)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\overrightarrow{u_r}\Big)}$

Attention ! Le calcul de l'intégrale précédente ne peut pas être fait directement à cause de la présence du vecteur unitaire $\overrightarrow{u_r}(\theta)$ qui dépend de la position à la surface de l'aquarium.

R6. Déterminer un plan de symétrie du problème.
Tracer sur un schéma les forces $\delta\overrightarrow{F_P}(M)$ et $\delta\overrightarrow{F_P}(M')$ qui s'exercent en deux points M et M' symétriques par rapport au plan de symétrique précédent. Quelle est la direction de la somme $\delta\overrightarrow{F_P}(M) + \delta\overrightarrow{F_P}(M')$?
En déduire la direction de la résultante des forces de pression.

Solution:
On choisit deux points M et M' symétriques par rapport au plan (Oyz).
M et M' étant à la même altitude, $P(M) = P(M')$.
La somme $\delta\overrightarrow{F_P(M)} + \delta\overrightarrow{F_P(M')}$ est portée par $\overrightarrow{u_y}$.
Cela est vrai pour tous les couples de points de la surface hémicylindrique.
Par conséquent, la résultante des forces de pression est portée par $\overrightarrow{u_y}$, on pourra vérifier que sa composante est négative.



R7. Projeter la résultante des forces de pression dans la direction déterminée précédemment, puis calculer l'intégrale.
Faire l'application numérique pour une vitre de même taille que dans le cas précédent.

Solution:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_P} &= \iint_{\text{vitre}} \Big(-\rho g(h-z)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\overrightarrow{u_r}\Big) \\
\overrightarrow{F_P}\cdot\overrightarrow{u_y} &= \iint_{\text{vitre}} \Big(-\rho g(h-z)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\overrightarrow{u_r}\Big)\cdot\overrightarrow{u_y} \\
\overrightarrow{F_P}\cdot\overrightarrow{u_y} &= \iint_{\text{vitre}} \Big(-\rho g(h-z)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_y}\Big) \\
\overrightarrow{F_P}\cdot\overrightarrow{u_y} &= -\rho g R\iint_{\text{vitre}} \Big((h-z)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_y}\Big) \\
\overrightarrow{F_P}\cdot\overrightarrow{u_y} &= -\rho g R\iint_{\text{vitre}} \Big((h-z)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\sin(\theta)\Big) \\
\overrightarrow{F_P}\cdot\overrightarrow{u_y} &= -\rho g R\times\int_{z=0}^{h}(h-z)\mathrm{d}z\times\int_{\theta=0}^{\pi}\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \\
\overrightarrow{F_P}\cdot\overrightarrow{u_y} &= -\rho g R\left[-\frac{1}{2}(h-z)^2\right]_0^h\times\Big[-\cos(\theta)\Big]_0^\pi \\
\overrightarrow{F_P}\cdot\overrightarrow{u_y} &= -\rho g R\times\frac{h^2}{2}\times 2 \\
\overrightarrow{F_P}\cdot\overrightarrow{u_y} &= -\rho g R h^2 < 0
\end{aligned}$$

La résultante des forces est bien portée par $-\overrightarrow{u_y}$: « l'eau pousse plus que l'air ».
Ainsi $\boxed{\overrightarrow{F_P} = -\rho g R h^2\overrightarrow{u_y}}$

A.N. : $\underline{\|\overrightarrow{F_P}\| = 1,2.10^3\ \text{N}}$, en prenant $R = \dfrac{\ell}{2}$.

III Poussée d'Archimède

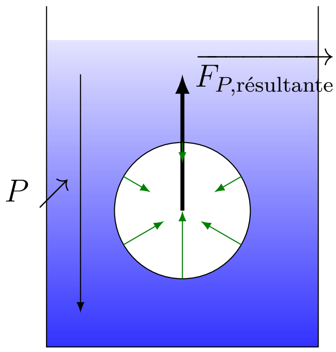
Les frères Montgolfier, Joseph (1740-1810) et Étienne (1745-1799), sont des industriels et inventeurs français, constructeurs des montgolfières, ballons à air chaud grâce auxquels a été réalisé en 1783 le premier vol d'un être humain.
À gauche : montgolfière de 1783 des frères Montgolfier (Prints and Photographs, Bibliothèque du Congrès des États-Unis).
À droite : Monument des Frères Montgolfier à Annonay.

III.1 Origine physique de la poussée d'Archimède

<u>Capacité exigible</u> : Expliquer l'origine de la poussée d'Archimède.

On considère un corps solide entièrement en contact avec un ou plusieurs fluides (liquide ou gaz). Tous les points du solide sont en contact avec un fluide.
Le corps est soumis aux forces de pression sur toute sa surface :

$$\overrightarrow{F_P} = \oiint_{\mathscr{S}_{\text{corps}}} -P(M)\overrightarrow{n_{M,\text{ext}}}\mathrm{d}S_M$$

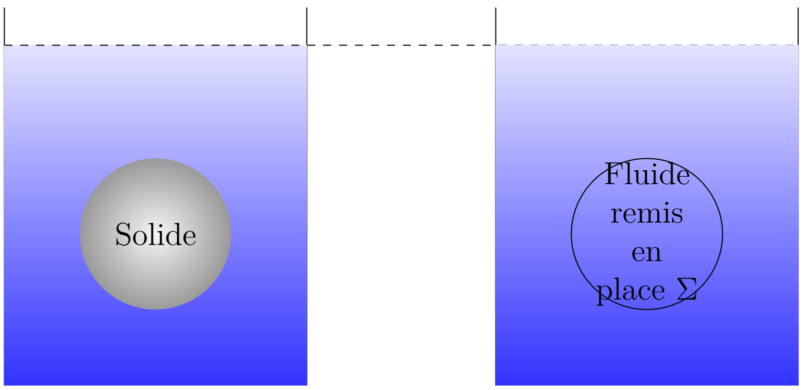


La pression n'est pas homogène au sein d'un fluide, elle est d'autant plus élevée que l'on est bas en altitude, ainsi la force de pression est plus importante sur la partie inférieure du corps que sur la partie supérieure.
La résultante des forces de pression s'exerçant sur le corps immergé est donc dirigée vers le haut.

> **À retenir : Poussée d'Archimède**
> Dans un référentiel $\mathscr{R}$, la **poussée d'Archimède** est la résultante des forces de pression s'exerçant sur un objet immobile dans $\mathscr{R}$, par l'ensemble des fluides au repos qui l'entoure.
> C'est la variation de pression avec l'altitude qui est à l'origine de la pression d'Archimède.

III.2 Loi d'Archimède

La loi de la statique des fluides établie au début du chapitre dépend du champ de pesanteur et de la masse volumique du fluide. À aucun moment nous avons pris en compte la présence d'un corps, **le champ de pression dans un fluide ne dépend pas de la présence ou non d'un corps.**
Par une expérience de pensée, retirons l'objet, de volume V, et remplaçons-le par le fluide, de même forme et de même volume, occupant la même position, comme le montre le schéma ci-dessous.
La force pressante s'exerçant sur la surface du corps est la même que celle s'exerçant sur la surface séparant le fluide remis en place Σ du reste du fluide.



Le système de fluide remis en place Σ est soumis à deux forces :

- son poids : $m_{\text{fluide }\Sigma}\overrightarrow{g}$, avec $m_{\text{fluide }\Sigma}$ la masse de fluide du volume occupé par le solide qui s'exerce au **centre de poussée** (=le centre de masse du volume de fluide remis en place) ;
- la résultante des forces de pression $\overrightarrow{F_P}$ exercée sur la surface $\mathscr{S}$ de Σ par le fluide extérieur à Σ : $\overrightarrow{F_P}$.

À l'équilibre :

- la somme des forces est égale au vecteur nul : $\overrightarrow{F_P} + m_{\text{fluide }\Sigma}\overrightarrow{g} = \overrightarrow{0}$.
  Donc la résultante des forces de pression est égale à l'opposée de la résultante du poids du fluide déplacé :
$$\overrightarrow{F_P} = -m_{\text{fluide }\Sigma}\overrightarrow{g}$$
- la somme des moments des forces est égal au vecteur nul : $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(m_{\text{fluide }\Sigma}\overrightarrow{g}) + \overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F_P}) = \overrightarrow{0}$,
  soit $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F_P}) = -\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(m_{\text{fluide }\Sigma}\overrightarrow{g})$, soit :
$$\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F_P}) = \overrightarrow{OC} \wedge \left(-m_{\text{fluide }\Sigma}\overrightarrow{g}\right)$$
  Donc $\overrightarrow{F_P}$ s'exerce au centre de poussée, c'est-à-dire au centre de masse du volume de fluide remis en place Σ.

Le champ de pression étant inchangé par la présence du solide, la poussée d'Archimède est égale à la résultante des forces de pression s'exerçant sur Σ : $\overrightarrow{\Pi_A} = -m_{\text{fluide }\Sigma}\overrightarrow{g}$ et s'exerce au centre de poussée.

À retenir : Loi (Théorème) d'Archimède

Tout corps entièrement immergé dans un fluide au repos est soumis à une force égale à l'opposée au poids du volume de fluide remis en place (à la place du solide) : c'est la **poussée d'Archimède**.
Elle s'exerce au centre de masse du volume de fluide remis en place, appelé le **centre de poussée**.

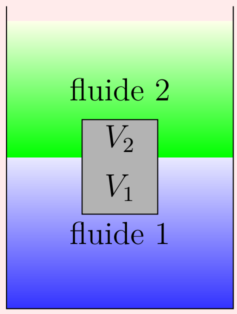
Attention – Erreur à ne pas commettre

Le théorème d'Archimède ne s'applique pas lorsqu'une partie du corps immergé n'est pas en contact avec le fluide, c'est par exemple le cas pour un objet posé au fond de l'eau (la surface inférieure de l'objet n'est pas en contact avec l'eau).
Dans ce cas, la résultante des forces de pression est donnée par le calcul de l'intégrale comme précédemment.

<u>Capacité exigible :</u> Exploiter la loi d'Archimède

À retenir : Utilisation pratique de la loi d'Archimède

- Si le corps est plongé dans un fluide homogène, alors
$$\overrightarrow{\Pi_A} = -m_{\text{fluide remis en place}}\overrightarrow{g} = -\rho_{\text{fluide}}V_{\text{corps}}\overrightarrow{g}$$
- Si le corps est à l'équilibre entre deux fluides homogènes, il faut ajouter les poussées d'Archimède dues aux deux fluides.



$$\overrightarrow{\Pi_A} = -m_{\text{fluide remis en place}}\overrightarrow{g} = -\left(m_{\text{fluide 1 remis en place}} + m_{\text{fluide 2 remis en place}}\right)\overrightarrow{g}$$

soit avec V_1 le volume du corps immergé dans le fluide 1 et V_2 le volume du corps immergé dans le fluide 2 :
$$\overrightarrow{\Pi_A} = -\left(\rho_{\text{fluide1}}V_1 + \rho_{\text{fluide2}}V_2\right)\overrightarrow{g}$$
Le centre de poussée est différent du centre d'inertie du solide.

III.3 Applications

- **Montgolfières et aérostats** : Un ballon évoluant dans l'atmosphère est soumis à son poids et à la poussée d'Archimède exercée par l'air. Il subit une force ascensionnelle si sa masse reste inférieure à la « masse de l'air déplacé ».
  - 1$^{\text{er}}$ cas : On introduit un gaz de masse molaire plus faible que l'air (hélium, dihydrogène) dans un ballon fermé, le gaz intérieur est alors moins dense que l'air extérieur. C'est le cas de l'aérostat.
  - 2$^{\text{ème}}$ cas : On chauffe l'air dans un ballon fermé. Cet air est alors moins dense que l'air environnant. C'est le principe des montgolfières.
- **Navire** : Un navire est un corps flottant, le fluide déplacé est alors constitué d'air et d'eau. La masse volumique de l'eau étant bien plus grande que celle de l'air ($1000 \gg 1,2$), la poussée d'Archimède est confondue avec celle de l'eau.
- **Sous-marins** : Pour plonger, un sous-marin remplit d'eau des réservoirs initialement plein d'air (ballast) et affine ensuite son poids grâce à des caisses de réglages. Pour remonter, on chasse l'eau des ballasts grâce à l'utilisation d'air comprimé contenu à l'intérieur du sous-marin.