

CHAPITRE 0

ANALYSE DIMENSIONNELLE

I. Dimension d'une grandeur physique

Il importe de faire la distinction entre la *dimension* d'une grandeur physique et son *unité*.

Dimension

La **dimension** d'une grandeur renseigne sur sa nature physique. Elle est plus générale que l'unité : une grandeur peut s'exprimer avec des unités différentes.

Par exemple, une **distance** a pour dimension une **longueur**, mais sa valeur pourra s'exprimer avec diverses unités : le **mètre**, le **mile** pour les anglo-saxons, l'**angström** à l'échelle atomique.

Une grandeur purement numérique, comme le rapport de deux longueurs, est dite sans dimension ou adimensionnée. Ainsi, l'**angle plan**, défini comme le rapport entre une longueur d'arc de cercle et le rayon du cercle, est **sans dimension**, bien qu'ayant une unité : le **radian** ou le **degré**.

Unité

L'**unité** renseigne sur la valeur de la grandeur physique.

Grandeur	Dimension	Unité
distance	longueur L	m, mile, Å
angle plan	sans dimension	rad, °

Tab. 1 Distinction entre grandeur, dimension et unité.

II. Dimension de base

La dimension de n'importe quelle grandeur physique peut être reliée à seulement sept autres dimensions bien choisies. Le choix de ces dimensions n'est pas unique et les physiciens ont adopté sept dimensions de base auxquelles sont associés des symboles dimensionnels :

À retenir



Dimension	Symbole
masse	M
temps	T
longueur	L
intensité électrique	I
température	Θ
quantité de matière	N
intensité lumineuse	J

Tab. 2 Symboles dimensionnels



Attention, encore une fois il convient de faire la distinction entre le *symbole dimensionnel* (très général) et le *symbole de l'unité* (qui dépend du choix du système d'unité).

Notations

Soit m une masse. On note $\dim(m) = M$ sa dimension et $[m] = \text{kg}$ son unité.

Exemple

- Soit une roue de diamètre d . Donner la dimension et l'unité la plus usuelle de d .
 $\dim(d) = L$ et $[d] = \text{m}$.
- On note m la masse de la roue. Donner la dimension et l'unité la plus usuelle de m .
 $\dim(m) = M$ et $[m] = \text{kg}$.

III. Équation aux dimensions

On appelle « équation aux dimensions » l'écriture de la dimension d'une grandeur physique en fonction des dimensions de base. Si G est cette grandeur, sa dimension est notée $\dim(G)$.

✕ Méthode Comment établir une équation aux dimensions ? ✕

1. Exprimer la grandeur dont on cherche la dimension à l'aide d'une formule simple, de la définition... ;
2. Exprimer les dimensions des grandeurs intervenants dans la formule précédente à l'aide des 7 dimensions de base ;
3. Conclure sur la dimension de la grandeur recherchée.

Application 1 : Équations aux dimensions

1. Soit r le rayon d'un cercle. Donner l'équation aux dimensions de sa surface S .

$$\dim(S) = L^2.$$

2. Rappeler la définition de la vitesse. En déduire son équation aux dimensions.

Par définition,

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{soit} \quad \dim(v) = LT^{-1}.$$

3. Soit a l'accélération, donner son équation aux dimensions.

$$\dim(a) = L \cdot T^{-2}.$$

4. Quelle est l'équation aux dimensions d'une force ?

D'après le principe fondamental de la dynamique, $m\vec{a} = \vec{F}$ donc $\dim(F) = MLT^{-2}$

5. Quelle est l'équation aux dimensions d'une énergie ?

Par définition,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{d'où} \quad \dim(E_c) = M \cdot (L.T^{-1})^2 = ML^2T^{-2}.$$

IV. Homogénéité d'une expression

À retenir

- Une expression est homogène si elle est valable du point de vue de l'analyse dimensionnelle. C'est le cas si :
 - les termes d'une somme ou d'une différence ont la même dimension ;
 - les deux membres d'une égalité ont la même dimension ;
 - l'argument x d'une fonction trigonométrique ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\exp x$, $\ln x$...) est sans dimension ;
 - les deux membres d'une égalité, d'une somme ou d'une différence sont de la même nature scalaire / vectorielle : $\boxed{\text{vecteur} = \text{vecteur}}$ ou $\boxed{\text{scalaire} = \text{scalaire}}$.
- Une expression non homogène est nécessairement fausse.

L'analyse de l'homogénéité constitue ainsi un puissant outil pour déceler une erreur. À la fin de tout calcul littéral, il est vivement recommandé de vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue. Bien sûr, il ne faut surtout pas avoir utilisé des valeurs numériques en cours de calcul.

V. Système international d'unités

V.1. Unité de base

À chacune des sept dimensions de base citées plus haut est associée une unité faisant l'objet d'une définition. Seul le kilogramme est encore défini par rapport à un objet matériel susceptible de s'altérer. Les définitions des six autres unités de base du système international se réfèrent à des phénomènes physiques reproductibles.

- **Le kilogramme (symbole : kg)** C'est la masse de l'étalon prototype en platine iridié à 10 % réalisé en 1889 sous la forme d'un cylindre dont le diamètre est égal à la hauteur – soit à peu près 39 mm – et conservé au Pavillon de Breteuil à Sèvres. Autrefois le gramme était défini comme la masse d'un centimètre cube d'eau pure.
- **La seconde (symbole : s)** Depuis 1967, elle est définie comme la durée de 9192631770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. Autrefois, la seconde était définie comme la fraction du jour solaire.
- **Le mètre (symbole : m)** Il est défini depuis 1983 comme la longueur du trajet parcouru par la lumière dans le vide pendant la durée de $\frac{1}{299\,792\,458}$ s
- **L'ampère (symbole : A)** C'est l'intensité du courant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles rectilignes de longueur infinie et placés à une distance de 1 m l'un de l'autre, produit entre ces conducteurs une force égale à 2×10^{-9} N par mètre de longueur de fil. Cette définition revient à choisir pour la perméabilité du vide la valeur exacte $4\pi \times 10^{-7} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$.
- **Le kelvin (symbole : K)** C'est la fraction de la température thermodynamique du point triple de l'eau (coexistence des phases gaz, liquide et solide).
- **La mole (symbole : mol)** C'est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires identiques (électrons, atomes, ions, molécules...) qu'il y a d'atomes dans 0,012 kg de carbone 12. Le nombre d'entités dans une mole est la constante d'Avogadro $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$.
- **La candela (symbole : cd)** C'est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est de $\frac{1}{683}$ W par stéradian (unité de mesure d'angle solide). La fréquence choisie correspond au maximum de sensibilité de l'oeil humain moyen (dans le jaune du spectre).

V.2. Unités secondaires

Elles se déduisent des unités de base par l'équation aux dimensions de la grandeur correspondante. Certaines ont reçu un nom et un symbole spécial :

Grandeur	Unité (symbole)	Grandeur	Unité (symbole)
angle plan	radian (rad)	tension électrique	volt (V)
vergence	dioptrie (δ)	résistance	ohm (Ω)
fréquence	hertz (Hz)	conductance	siemens (S)
force	newton (N)	capacité	farad (F)
énergie	joule (J)	champ magnétique	tesla (T)
puissance	watt (W)	flux magnétique	weber (Wb)
pression	pascal (Pa)	inductance	henry (H)
charge électrique	coulomb (C)		

Tab. 3 Unités secondaires et leurs symboles.



Nom	Symbole	Valeur
Nombre d'Avogadro	$\mathcal{N}_A$	$6,022\,14 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	R	$8,3145 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1,380\,66 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de Planck	h	$6,626\,08 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Vitesse de la lumière dans le vide	c	$2,997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante gravitationnelle	G	$6,6726 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
Charge élémentaire	e	$1,602\,18 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante de Faraday	F	$96\,486 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse de l'électron	m_e	$9,109\,39 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	m_p	$1,672\,62 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masse du neutron	m_n	$1,674\,93 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Permittivité du vide	ε_0	$8,854\,19 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité du vide	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Tab. 4 Constantes usuelles.



				Facteur	Symbole	Nom
				10^{15}	P	péta
				10^{12}	T	téra
alpha	α	nu	ν	10^9	G	giga
bêta	β	xi	ξ	10^6	M	mega
gamma	γ, Γ	pi	π, Π	10^3	k	kilo
delta	δ, Δ	rhô	ρ	10^2	h	hecto
epsilon	ε	sigma	σ, Σ	10	da	déca
zêta	ζ	tau	τ	10^{-1}	d	déci
éta	η	phi	ϕ, Φ	10^{-2}	c	centi
thêta	θ, Θ	chi	χ	10^{-3}	m	milli
lambda	λ, Λ	psi	ψ, Ψ	10^{-6}	μ	micro
mu	μ	oméga	ω, Ω	10^{-9}	n	nano
				10^{-12}	p	pico
				10^{-15}	f	femto

Tab. 5 Lettres grecques usuelles en physique.



Tab. 6 Préfixes multiplicateurs usuels.



VI. Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet de contrôler l'homogénéité d'une expression, mais aussi de déterminer ou retrouver l'expression littérale d'une grandeur.

Une grandeur X susceptible de dépendre d'un certain nombre de *grandeurs* A , B et C *caractéristiques du problème* et dimensionnellement indépendantes, peut très souvent se mettre sous la forme :

$$X = k \times A^\alpha B^\beta C^\gamma$$

où k est un nombre sans dimension, et où les exposants α , β , γ peuvent être déterminés par analyse dimensionnelle.

✕ Méthode Comment déterminer une relation par analyse dimensionnelle ? ✕

1. Identifier les grandeurs A , B , C caractéristiques du problème étudié dont peut dépendre la grandeur X recherchée.
2. Exprimer la grandeur recherchée sous la forme

$$X = k \times A^\alpha B^\beta C^\gamma$$

avec k est un nombre sans dimension.

3. Écrire l'équation aux dimensions

$$\dim(X) = \dim(A)^\alpha \times \dim(B)^\beta \times \dim(C)^\gamma$$

4. Exprimer les dimensions de A , B , C et X **en fonction des 7 dimensions de base du SI.**
5. En égalisant les exposants de chaque dimension de base du SI présents à gauche et à droite, établir le système d'équations vérifié par α , β , γ et le résoudre.
6. Conclure sur l'expression de X .

Application 2 :

Un pendule est constitué d'un fil de longueur ℓ auquel est attaché une masse m . Le fil est attaché au plafond et la masse oscille sans frottement dans le champ de pesanteur terrestre d'intensité g . On cherche à déterminer l'expression de la période T des oscillations.

1. Quels sont les paramètres pertinents du problème ?

La longueur ℓ , la masse m et g .

2. Exprimer la période T en fonction de ces paramètres et d'exposants.

$$T = \ell^\alpha m^\beta g^\gamma.$$

3. Déterminer les dimensions des différentes grandeurs, puis écrire l'équation aux dimensions.

$\dim(T) = T$, $\dim(\ell) = L$, $\dim(m) = M$ **et g étant une accélération**, $\dim(g) = L \cdot T^{-2}$. **On en déduit**

$$\dim(T) = \dim(\ell^\alpha) \dim(m^\beta) \dim(g^\gamma) \quad \text{soit} \quad T = L^\alpha \times M^\beta \times (L \cdot T^{-2})^\gamma$$

4. En déduire le système vérifié par les exposants puis le résoudre.

On a alors

$$T = L^{\alpha+\gamma} \cdot M^\beta \cdot T^{-2\gamma} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} 1 = -2\gamma \\ 0 = \alpha + \gamma \\ 0 = \beta \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \gamma = -1/2 \\ \alpha = 1/2 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

5. En déduire l'expression de la période T .

$$T = \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$