

CHAPITRE 00

INCERTITUDES

Matériel

4 paillasses avec :

- banc d'optique ;
- lampe + objet + supports ;
- lentille 10 mm.

4 paillasses avec :

- pendule simple (potence + fil + masse) ;
- mètre ruban ;
- chronomètre.

À chaque TP cette année, vous serez amené à réaliser des mesures, à l'aide de divers instruments : mesure de longueur, de masse, de pH, de concentration, de vitesse... Or chaque mesure produit une valeur fiable sur un certain intervalle de confiance. On dit par exemple que votre masse est de (75 ± 2) kg. L'estimation de cet intervalle de confiance est crucial pour déterminer la fiabilité de votre mesure.

Vous avez à votre disposition le matériel pour réaliser un pendule simple dont on cherche à déterminer la période T des oscillations.

1. Choisir une longueur $L = 30$ cm de fil.
2. Mesurer à l'aide du chronomètre la période T des oscillations.
3. Recommencer cette dernière étape une dizaine de fois. Noter vos mesures dans le tableau suivant.

T (en s)										
------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Que constatez-vous ?

Vous avez à votre disposition un banc d'optique, une lampe éclairant un objet (une lettre f), des supports coulissant sur le banc, un écran et une lentille.

1. Fixer la lampe à une extrémité du banc.
2. Fixer l'objet juste après la lampe.
3. À l'autre extrémité du banc, fixer l'écran à plus de 1 m de l'objet.
4. Placer la lentille entre la lampe et l'écran sur son support.
5. Déplacer la lentille jusqu'à avoir une image nette sur l'écran, de sorte à ce que l'image soit plus grande que l'objet. Noter alors précisément sa position x .
6. Recommencer cette dernière étape plusieurs fois.



Que constatez-vous ?

Soit une feuille de papier de format A4. Cherchons à mesurer la longueur de son petit côté. Trois outils sont disponibles : une règle, un décimètre et un pied à coulisse. Quel outil utilisez-vous ? Comment comparer les différentes mesures ?

Décimètre Règle Pied à coulisse
 (21 ± 1) cm $(21,0 \pm 0,1)$ cm $(21,05 \pm 0,05)$ cm

Il faut connaître la précision de chaque instrument de mesure.



Vous venez d'observer la variabilité des résultats d'un mesurage. Dès lors, quelle fiabilité peut-on accorder à ces mesures ? Cette variabilité est caractérisée par l'incertitude-type associé à ces mesures. **Tout résultat expérimental doit être accompagné de son incertitude-type.** C'est l'objet de ce TP-Cours.

I. Incertitudes

Définition

La grandeur que l'on veut mesurer est appelée le **mesurande**.

On appelle **mesurage** l'ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement une valeur que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.

Exemple

Lorsqu'on mesure la valeur de la résistance R d'un résistor, le **mesurande** est la **résistance** R de ce dipôle et le **mesurage** est effectué, par exemple, avec un **ohmmètre**.

Par la suite, on notera m le résultat de mesure.

On considère que le résultat d'une mesure n'est pas une valeur unique mais un ensemble de valeurs numériques, raisonnablement attribuables à la grandeur d'intérêt.

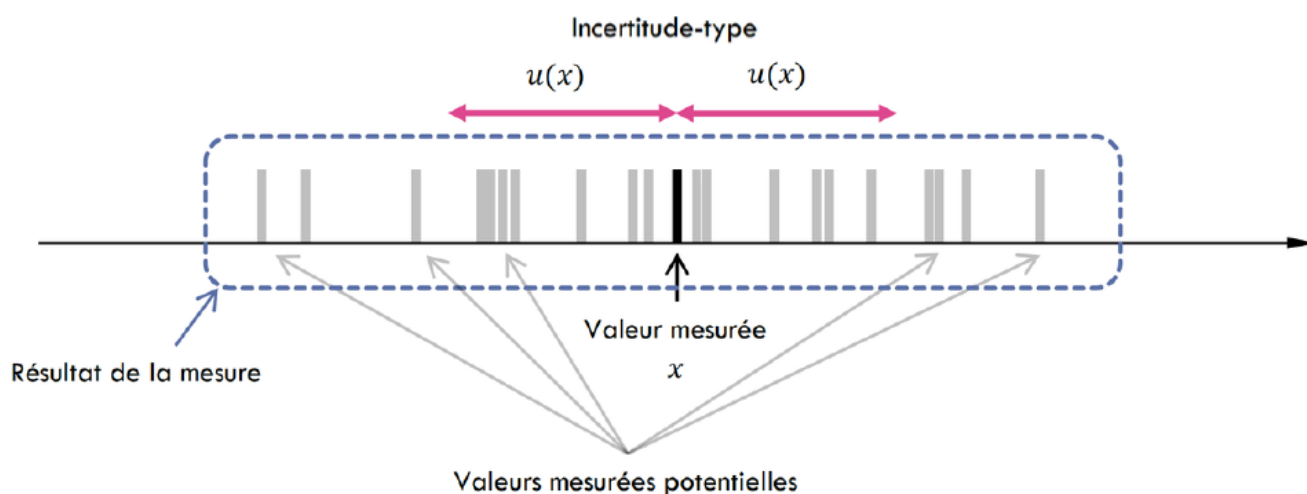


Fig. 1 Définition de l'incertitude-type.

L'**incertitude type** Δm est un paramètre **TOUJOURS** associé au résultat de mesurage m .

La valeur du mesurande M peut être présentée comme le résultat de mesurage m associé à son incertitude absolue Δm . Le résultat est alors :

$$M = m \pm \Delta m \quad \text{soit} \quad M \in [m - \Delta m ; m + \Delta m]. \quad (1)$$

Expression de la valeur du mesurande

- Δm est exprimée avec le même nombre de chiffres significatifs que la donnée qui en possède le moins,
- Les décimales de m plus petites que Δm ne sont pas prises en compte.

Incertitude absolue

Δm est appelée incertitude absolue.

Incertitude relative

$\frac{\Delta m}{|m|}$ est appelée incertitude relative.

En pratique, on ne connaît pas l'histogramme associé à la mesure. Il est trop coûteux de le déterminer pour chaque expérience. Voyons comment déterminer l'incertitude plus rapidement.

II. Détermination de l'incertitude

Compétences

Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude.

Incertitude-type.

Capacité : Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure.

Le but des mesures physiques est la détermination de cette **fonction de distribution** ou, au moins, de ses deux paramètres majeurs : **la moyenne et la largeur**. Pour déterminer une distribution on doit répéter plusieurs fois une mesure pour connaître la fréquence d'apparition des valeurs. Pour obtenir l'ensemble des valeurs possibles ainsi que leurs probabilités d'apparition, on devrait en fait effectuer un nombre infini de mesures. C'est très long, trop cher, et personne n'en a besoin.

L'hypothèse fondamentale est un traitement statistique. L'occurrence d'un résultat de mesure obéit à une loi de probabilité « bien définie ». Par exemple, pour une loi Gaussienne - aussi appelée loi normale - est définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \bar{m} = \langle m \rangle.$$

La Fig. 2 illustre une telle distribution.

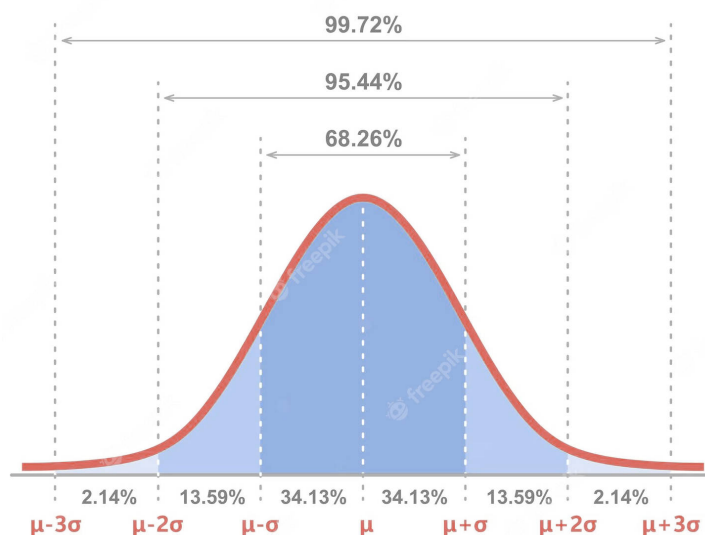


Fig. 2 Distribution gaussienne.

Définition

σ est appelé l'écart-type. Il quantifie la dispersion des résultats autour de la valeur moyenne.

II.1. Traitement statistique

Compétences

*** Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).

Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.

On dit que l'**incertitude est de type A** lorsque le mesurage est effectué plusieurs fois exactement dans les mêmes conditions ; l'incertitude est alors déterminée par des méthodes statistiques. On calcule d'abord l'écart-type expérimental σ_{exp} (σ_{n-1} ou s avec la calculatrice)

$$\sigma_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2}.$$

L'incertitude type est alors

$$\Delta m = \frac{\sigma_{\text{exp}}}{\sqrt{n}}$$

où m_i est la $i^{\text{ème}}$ expérience et $\bar{m}$ la moyenne des différents m_i .

II.2. Traitement probabiliste

II.2.a. L'incertitude instrumentale

Compétences

*** Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). ***

Lorsqu'on ne dispose que d'une seule mesure, l'**incertitude dite de type B** et son calcul se fait à partir des conditions de l'expérience. On fait l'hypothèse raisonnable que le résultat de mesure est bien décrit par une variable aléatoire à distribution de densité uniforme, entre deux bornes (distribution dite rectangulaire) : $[m - \Delta m ; m + \Delta m]$ avec m la valeur moyenne.

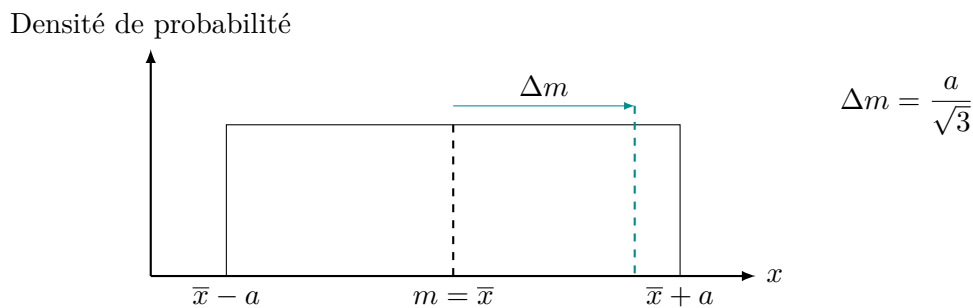


Fig. 3 Incertitude-type pour une distribution de densité uniforme.

On en déduit l'incertitude-type : **l'écart-type associé à une distribution rectangulaire est égal à la demi-étendue de la distribution, divisée par $\sqrt{3}$** (cf méthode Monté-Carlo).

- Instrument vérifié de classe α : le fabricant indique l'erreur maximale tolérée (EMT) $\Delta m = \frac{EMT}{\sqrt{3}}$,
- Pour une échelle graduée : en l'absence d'indication, on prendra $\Delta m = \frac{1/2 \text{ graduation}}{\sqrt{3}} = \frac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{12}}$,
- Pour un appareil numérique : le constructeur indique un pourcentage p (erreur de calibrage) de la valeur lue et un nombre N de digits (digit = une unité du dernier chiffre affiché).

$$\Delta m = \frac{p \times \text{valeur lue}}{\sqrt{3}} + \frac{N \text{ digits}}{\sqrt{3}}.$$

Exemple

Un ampèremètre affiche 5,23 mA avec une précision de $(3\% \pm 1 \text{ digit})$. Calculer l'incertitude absolue de la mesure.

$$\Delta m = \frac{0.03 * 5.23}{\sqrt{3}} + \frac{1 * 0.01}{\sqrt{3}} = \mathbf{0,10 \text{ mA}}.$$

Les incertitudes susmentionnées sont intrinsèques à **l'instrument de mesure** que vous utilisez. Elles sont relatives à la valeur affichée/indiquée par l'instrument qui n'est pas parfait. On peut les rassembler sous le nom Δm_{instr} .

II.2.b. Incertitude-type

Enfin, on obtient l'incertitude sur la mesure d'une grandeur en tenant compte de toutes les incertitudes composantes, provenant de différentes sources d'erreurs indépendantes, à un même niveau de confiance

$$\Delta m^2 = \Delta m_1^2 + \Delta m_2^2 + \Delta m_3^2 + \dots$$

💣💣💣 **Attention !** En tant qu'expérimentateurs (-trices), vous allez aussi introduire de l'incertitude dans vos mesures lors du protocole expérimental (critères de netteté d'une image en optique, lecture de la position des curseurs sur l'oscilloscope, visualisation d'un changement de couleur lors d'un titrage...) et elle sera souvent supérieure à celle introduite par les instruments ! On l'appellera Δm_{exp} . **Très souvent on négligera l'incertitude des instruments devant Δm_{exp} .** Il est difficile de donner une «recette» pour la quantifier. On l'évaluera au cas par cas en fonction du protocole.

Exemple

Par exemple, pour un titrage colorimétrique, l'équivalence est repérée à la goutte près. Le volume V d'une goutte étant évalué à 0,05 mL, l'incertitude de méthode sera $\Delta V_{\text{exp}} = 0,05 \text{ mL}$.

Si, sur une même mesure, il existe plusieurs sources d'incertitude indépendantes, l'incertitude type sera évaluée en composant les différentes incertitudes selon la formule suivante :

$$\Delta m = \sqrt{\sum_{\text{incertitudes } i} \Delta m_i^2}.$$

En particulier, on aura souvent $\Delta m = \sqrt{\Delta m_{\text{exp}}^2 + \Delta m_{\text{instr}}^2}$.

Exemple

On mesure la position d'une lentille x avec une règle graduée au millimètre. On obtient $x = 10,1 \text{ cm}$. L'opérateur évalue à 3 mm l'incertitude liée à la plage de netteté de l'image (voir seconde expérience).

1. Déterminer l'incertitude Δx_{instr} .

$$\Delta x_{\text{instr}} = \frac{0,5}{\sqrt{3}} \text{ mm}.$$

2. Déterminer l'incertitude Δx_{exp} .

$$\Delta x_{\text{exp}} = 3 \text{ mm}.$$

3. En déduire l'incertitude-type Δx sur la position x . Commenter.

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{instr}}^2 + \Delta x_{\text{exp}}^2} \stackrel{AN}{=} 3 \text{ mm. On remarque que } \Delta x_{\text{instr}} \ll \Delta x_{\text{exp}} \text{ donc } \Delta x \approx \Delta x_{\text{exp}}.$$

II.3. Composition des incertitudes-types

Compétences

Incertitudes-types composées.

*** Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient.

Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.

Soit une grandeur $f(x_i)$ avec x_i des paramètres dont l'incertitude-type est notée Δx_i . Alors l'incertitude-type de la grandeur f , notée Δf est donnée par (au premier ordre) :

$$\Delta f = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \times \Delta x_i \right)^2}.$$

Exemple

1. Somme (ou différence) La hauteur h d'une fenêtre est donnée par $h = h_{\text{verre}} + 2h_{\text{cadre}}$. En appliquant la formule ci-dessus, établir l'expression de l'incertitude-type Δh .

$$\Delta h = \sqrt{\Delta h_{\text{verre}}^2 + 2\Delta h_{\text{cadre}}^2}.$$

Si une grandeur f est donnée par la somme (ou la différence) de grandeurs x_i , alors l'incertitude-type composée est donnée par

$$\Delta f = \sqrt{\sum_i \Delta x_i^2}. \quad (2)$$

2. Produit (ou quotient) On mesure $R = (33 \pm 2) \Omega$ et $I = (0,5 \pm 0,1) \text{ A}$. Sachant que $U = RI$, en déduire l'expression de l'incertitude ΔU . Faire l'application numérique.

$$\begin{aligned} \Delta U &= \sqrt{(\Delta R \times I)^2 + (\Delta I \times R)^2} \\ \text{soit} \quad \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 &= \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 = 0.209 \\ \text{soit} \quad \Delta U &= 0.209 \times (33 \times 0.50) = \mathbf{3,45 \text{ V}}. \end{aligned}$$

Si une grandeur f est donnée par le produit (ou le quotient) de grandeurs x_i , alors l'incertitude-type composée est donnée par

$$\Delta f = f \times \sqrt{\sum_i \left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)^2}. \quad (3)$$

Lorsque le calcul de l'incertitude est fastidieux, nous aurons recours à la méthode de Monté-Carlo (voir TP 1 : Ultrasons).

Remarque

Dans le deuxième exemple, quelle est la source d'incertitude la plus importante ?

Il faut comparer $\frac{\Delta R}{R} = 0.06$ et $\frac{\Delta I}{I} = 0.2$. L'incertitude sur l'intensité domine.

II.4. Comparaison entre deux mesures

Compétences

Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.

***Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé.

Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.***

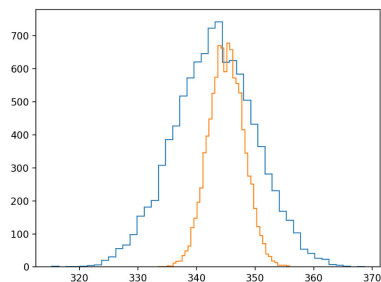
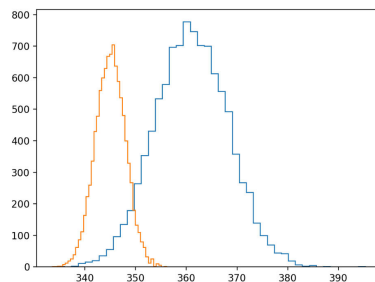
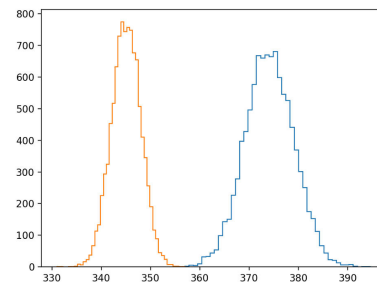
Écart normalisé

L'écart normalisé E_N entre deux processus de mesure donnant les valeurs m_1 et m_2 et d'incertitudes types Δm_1 et Δm_2 est défini par :

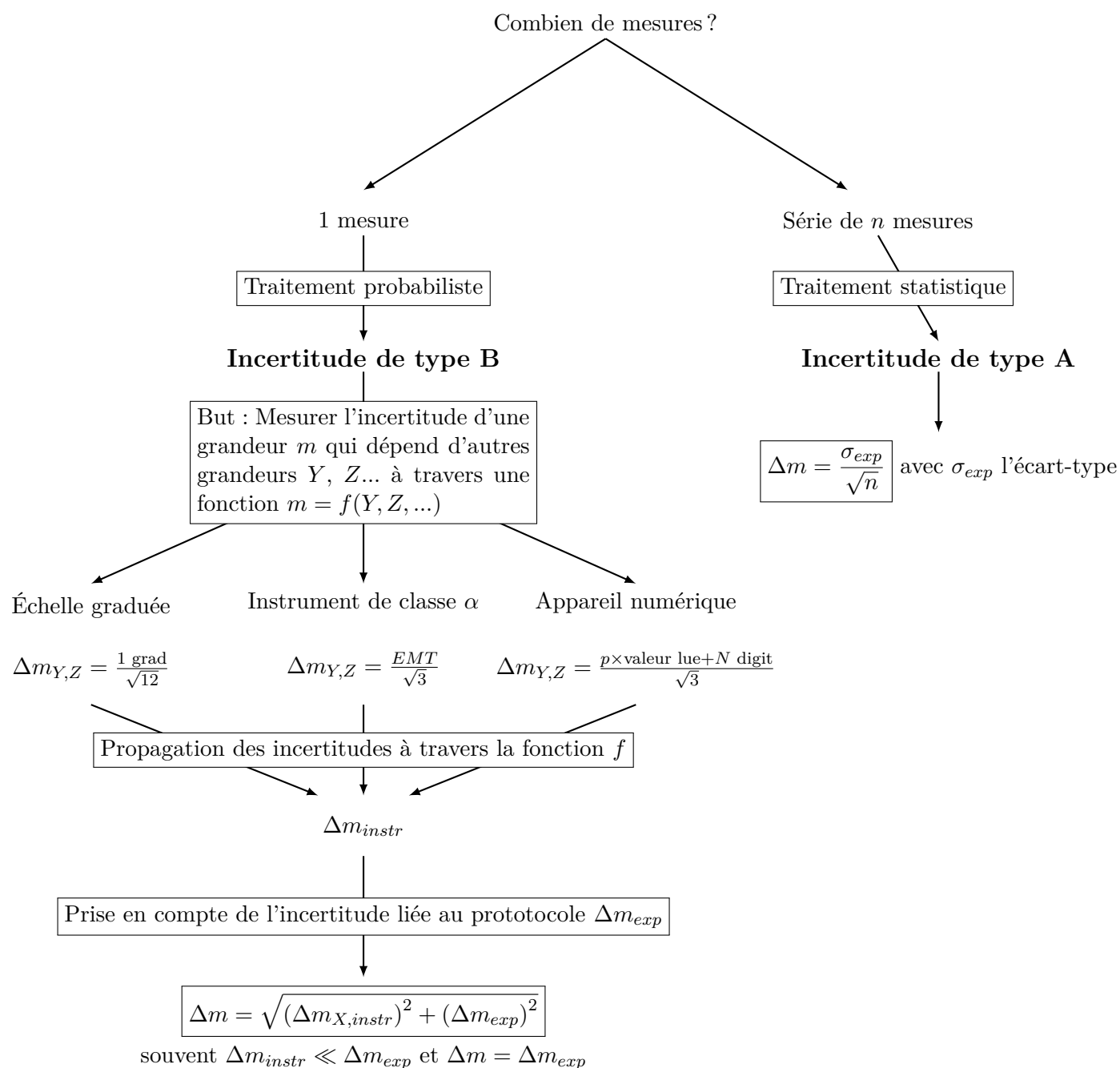
$$E_N = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{(\Delta m_1)^2 + (\Delta m_2)^2}}.$$

Par convention, on dit que deux résultats sont compatibles si

$$E_N \leq 2.$$

(a) Deux distributions avec $E_N \approx 0.3$.(b) Deux distributions avec $E_N \approx 2.1$.(c) Deux distributions avec $E_N \approx 5.0$.**Fig. 4** Tracé de deux distributions de résultats de mesure. (D'après Maxime Champion)

✕ Méthode Détermination des incertitudes ✕



III. Ajustement affine ou linéaire

Afin de vérifier un modèle ou une loi physique (par exemple la loi d'Ohm, $U = RI$), on peut être amené à faire un certain nombre de mesures que l'on rassemble sur un même graphique, obtenant alors un "nuage de points". Pour vérifier la validité du modèle attendu, il faut alors comparer le nuage de points avec la courbe attendue.

Considérons une résistance électrique R traversée par un courant I et dont la tension à ses bornes est notée U , comme schématisé ci-contre. On mesure I et U en faisant varier le courant I . On trace ensuite le graphe ci-dessous.

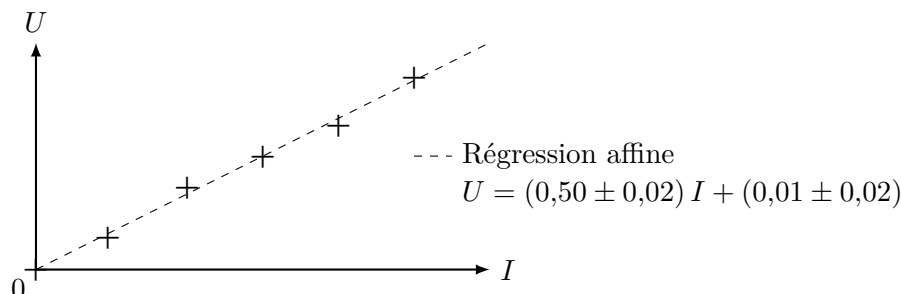
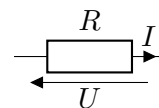


Fig. 5 Points expérimentaux et régression affine. On en déduit que la loi d'Ohm est valable et que la résistance vaut $R = (0,50 \pm 0,02) \Omega$.

Les points expérimentaux sont tracés avec leurs incertitudes ΔU et ΔI . On voit à l'œil nu qu'ils sont quasiment alignés, ce qui confirme la loi d'Ohm. Afin de déterminer la valeur de la résistance R correspondant à la pente de cette droite, on réalise un ajustement (ou régression) affine, c'est-à-dire que l'on cherche quelle est la droite passant le plus proche de tous les points expérimentaux en prenant en compte leurs incertitudes : c'est la **méthode des moindres carrés**. Un script python nous fournit la valeur de la pente et de l'ordonnée à l'origine avec les incertitudes associées, car plusieurs courbes peuvent satisfaire le critère des moindres carrés.

💣💣💣 **Attention !** Le coefficient r^2 n'est pas à lui seul un bon critère pour déterminer si la régression est correcte ou non. Il faut toujours vérifier la correspondance entre la droite et les points à l'œil nu.

IV. Comment présenter un résultat ?

Tout résultat d'une application numérique ou d'une expérience doit avoir un nombre de chiffres significatifs adapté ainsi qu'une unité. Lors d'une expérience, l'incertitude doit également être indiquée.

Chiffre significatif

- Les chiffres de 1 à 9 sont toujours significatifs ;
- Les 0 à gauche du nombre ne sont pas significatifs (ex : 0012,3 -> 3 chiffres significatifs) ;
- Les 0 à droite du nombre sont significatifs (ex : 18,50 -> 4 chiffres significatifs).

Application 1 : Chiffre significatif

Donner le nombre de chiffres significatifs pour chaque exemple et réécrire le nombre en écriture scientifique.

1. 48,2

3 CS et $4,82 \times 10^1$

2. 983

3 CS et $9,83 \times 10^2$

3. 0,028

2 CS et $2.8e-2$

4. 0,007 10

3 CS et $7,10 \times 10^{-3}$

5. 1089,070

7 CS et $1,089\,070 \times 10^3$

Lors d'une application numérique, le résultat est donné avec le plus petit nombre de chiffres significatifs des données.

Exemple

$$125,4 \times 0,25 = 31.$$

✕ Méthode Écriture d'un résultat ✕

- Privilégier l'écriture scientifique. Ex : $7,05 \times 10^{-4}$ et non 0,000 705.
- Faire attention au nombre de chiffres significatifs (CS) :
 - si le résultat provient d'un calcul de plusieurs grandeurs : autant de (CS) que le minimum de CS donnés pour les grandeurs. Ex : $4,68 \times 3,8 \times 10^{-8} \rightarrow 2\text{CS}$.
 - si le résultat provient d'une mesure : le dernier CS doit correspondre à l'incertitude. Ex : ~~$54,56 \pm 0,8$~~ mais $54,6 \pm 0,8$.
- Préciser l'incertitude s'il s'agit du résultat d'une mesure.
- Préciser l'unité. **Tout résultat sans unité sera ignoré.**
- Encadrer les principaux résultats.