

À préparer : Exercices 1.1-2+Partie III, 2 Partie II et III

Compétences	Capacités
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type compos
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.

Exercice 1 : Incertitudes de type B



1. Un étudiant écrit sur son compte-rendu de TP : « le rayon du cercle vaut $R = (5,2 \pm 0,1) \text{ cm}$ » :
 - (a) Quel est le mesurande ?
Le rayon du cercle R .
 - (b) Quel a pu être le mesurage ?
À l'aide d'une règle, on mesure R .
 - (c) Combien vaut l'incertitude type absolue ? L'incertitude type relative ?
L'incertitude-type absolue vaut $\Delta R = 0,1 \text{ cm}$. L'incertitude-type relative $\frac{\Delta R}{R} \stackrel{AN}{=} 0,02 = 2\%$.
 - (d) Exprimer l'intervalle auquel appartient R .
 $R \in [R - \Delta R; R + \Delta R] = [5,1; 5,2]$.
 - (e) Quelle est l'incertitude relative sur l'aire du cercle ? On considère que π est une valeur exacte.
 $S = \pi R^2$: il s'agit d'un produit donc l'incertitude-type relative s'exprime comme

$$\frac{\Delta S}{S} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2} = \sqrt{2} \frac{\Delta R}{R} \stackrel{AN}{=} 0,03 = 3\%.$$

- (f) Quelle est l'incertitude absolue sur l'aire ?

On a

$$S = \pi R^2 \stackrel{AN}{=} 84,9 \text{ cm}^2.$$

On déduit de la question précédente

$$\Delta S = S \times \sqrt{2} \frac{\Delta R}{R} = \pi \sqrt{2} R \Delta R \stackrel{AN}{=} 3 \text{ cm}^2.$$

- (g) Exprimer le résultat du calcul de l'aire accompagné de son incertitude absolue avec le bon nombre de chiffres significatifs.

$$S = (85 \pm 3) \text{ cm}^2.$$

2. On souhaite mesurer la résistance R d'un résistor dans un circuit électrique. Pour cela, on mesure dans un premier temps le courant électrique I qui traverse le résistor avec un **ampèremètre branché en série** puis la tension U aux bornes du résistor avec un **voltmètre branché en parallèle**. La résistance est alors donnée par $R = \frac{U}{I}$.

La précision de l'ampèremètre est donnée par $(\pm 3\% \pm 1 \text{ digit})$ et celle du voltmètre est $(\pm 2\% \pm 2 \text{ digit})$. On mesure une tension de 6,03 V pour un courant de 13,2 mA.

Le digit d'un appareil est une unité du plus petit chiffre affiché. Par exemple, sur un voltmètre je lis $U = 12,45 \text{ V}$ sur le calibre 20 V. Le digit vaut 0,01 V. Sur un ohmmètre, je lis $R = 100,2 \Omega$. Le digit vaut 0,1 Ω .

- (a) Que vaut R et son incertitude ? Type A ou B ?

Comme on a mesuré une seule valeur pour R , il s'agit d'une incertitude de type B.

$$\Delta U \stackrel{AN}{=} \frac{0,02 \times 6,03 + 2 \times 0,01}{\sqrt{3}} = 0,08 \text{ V} \quad \text{et} \quad \Delta I \stackrel{AN}{=} \frac{0,03 \times 13,2 + 1 \times 0,01}{\sqrt{3}} = 0,2 \text{ mA}.$$

Comme $R = \frac{U}{I}$, l'incertitude-type sur R est donnée par la formule pour un quotient

$$\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2} \stackrel{AN}{=} \sqrt{\left(\frac{0,08}{6,03}\right)^2 + \left(\frac{0,2}{13,2}\right)^2} = 0,02.$$

Par ailleurs,

$$R = \frac{U}{I} \stackrel{AN}{=} \frac{6,03}{13,2 \times 10^{-3}} = 457 \Omega \quad \text{donc} \quad \Delta R \stackrel{AN}{=} 0,02 \times 457 = 9 \Omega.$$

- (b) Présenter le résultat.

$$R = (457 \pm 9) \Omega.$$

Partie I : Mesure de longueurs à la règle graduée (ou au banc d'optique)

Pour mesurer la longueur d'onde d'un signal ultrasonore sinusoïdal, on place un émetteur à ultrasons ($f = 40 \text{ kHz}$) en un point A fixe. Un récepteur se déplace le long de l'axe d'émission. La technique est de localiser une première position où les signaux émis et reçus sont en phase, puis en éloignant le récepteur, de retrouver successivement les deux signaux en phase.

3. Initialement les deux signaux sont en phase. On éloigne le récepteur et on repère 8 positions où les signaux sont successivement en phase. Combien a-t-on parcouru de longueurs d'onde ?

On a parcouru 8 longueurs d'onde.

4. La distance D parcourue par le récepteur est de 6,9 cm. Cette distance est lue sur un mètre gradué au millimètre. Quelle est l'incertitude ΔD sur la mesure de D ? Est-elle de type A ou de type B ? Présenter le résultat.

On a une seule mesure, donc l'incertitude associée est de type B et

$$\Delta D = \frac{1 \text{ mm}}{\sqrt{12}} = 0,3 \text{ mm} \quad \text{et} \quad D = (6,90 \pm 0,03) \text{ cm}$$

5. Exprimer λ en fonction de D . Calculer alors l'incertitude $\Delta \lambda$. Présenter le résultat. En déduire l'intérêt de cette mesure (pourquoi ne pas parcourir une seule longueur d'onde ?).

$$\lambda = \frac{D}{8} \quad \text{donc} \quad \Delta \lambda = \frac{\Delta D}{8}. \quad \text{Ainsi}$$

$$\lambda = (8,62 \pm 0,04) \text{ mm}.$$

L'intérêt de la mesure est de diminuer l'incertitude.

6. Donner la relation entre la célérité c de l'onde ultrasonore, sa fréquence f et sa longueur d'onde λ .

$$c = \lambda f \stackrel{AN}{=} 8,62 \times 10^{-3} \times 40 \times 10^3 = 344,80 \text{ m/s.}$$

7. Sachant que la notice constructeur indique « frequency accuracy : $\pm 50 \text{ ppm} + 10 \mu\text{Hz}$ », calculer Δf . Note : ppm signifie partie par million donc ici $50 \times 10^{-6} \times f$.

$$\Delta f = \frac{50 \times 10^{-6} \times 40 \times 10^3 + 10 \times 10^{-6}}{\sqrt{3}} = 2 \text{ Hz.}$$

8. En déduire Δc .

$$\Delta c = c \times \sqrt{\left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta c}{c} \stackrel{AN}{=} \sqrt{\left(\frac{0,04}{8,62}\right)^2 + \left(\frac{2}{40 \times 10^3}\right)^2} = 5 \times 10^{-3} \quad \text{donc} \quad \Delta c = 5 \times 10^{-3} \times 344,80 \simeq 2 \text{ m/s.}$$

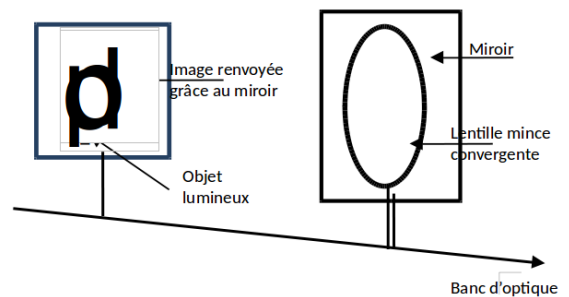
9. Présenter le résultat.

Ainsi

$$c = (345 \pm 2) \text{ m/s.}$$

Partie II : Mesure de la distance focale d'une lentille convergente

Les lentilles minces en optique sont caractérisées par leur distance focale notée f' . La mesure la plus simple consiste à utiliser la technique de l'auto-collimation (vue en TP d'optique géométrique). Un objet plan lumineux éclaire une lentille mince convergente. En plaçant un miroir derrière cette dernière, une image se forme sur le plan de l'objet initial. Si la distance objet-lentille est égale à f' , alors l'image observée est nette, sinon elle est floue. On utilise un banc d'optique pour mesurer la distance entre l'objet et la lentille. Il est gradué au millimètre. En réalisant cette mesure, un étudiant trouve une focale $f' = 10,4 \text{ cm}$. Toutefois, il se rend compte que s'il décale la lentille de 5 millimètres il a toujours l'impression de voir l'image finale nette.



10. Quelles sont les sources d'incertitudes ?

Les sources d'incertitudes sont :

- l'incertitude Δf_{banc} du banc d'optique ;
- l'incertitude $\Delta f_{\text{netteté}}$ liée à la plage de netteté évaluée par l'expérimentateur.

11. Les évaluer.

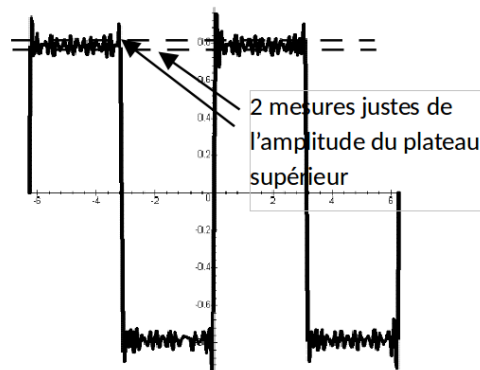
$$\Delta f_{\text{banc}} = \frac{1 \text{ mm}}{\sqrt{12}} \stackrel{AN}{=} 0,3 \text{ mm} \quad \text{et} \quad \Delta f_{\text{netteté}} = 5 \text{ mm.}$$

12. Calculer l'incertitude totale et présenter le résultat.

$$\Delta f = \sqrt{\Delta f_{\text{banc}}^2 + \Delta f_{\text{netteté}}^2} \stackrel{AN}{=} 5 \text{ mm.}$$

Le résultat s'exprime donc $f' = (10,4 \pm 0,5) \text{ cm}$.

Partie III : Mesure d'une amplitude crête à crête à l'oscilloscope



On désire mesurer l'amplitude crête à crête A_{CC} d'un signal carré à l'aide des curseurs de l'oscilloscope, on en place donc un sur le plateau supérieur et un autre sur le plateau inférieur. Il existe deux sources d'incertitudes :

- la valeur affichée par les curseurs sur l'écran de l'oscilloscope n'est pas une valeur vraie, c'est une valeur qui est soumise aux imperfections des composants électroniques de l'instrument de mesure. Le constructeur garantit donc la valeur affichée avec une précision donnée. On appelle Δm_{instr} l'incertitude sur la valeur affichée par l'instrument ;
- le signal mesuré à l'oscilloscope est légèrement bruité, ce qui se traduit par une épaisseur non négligeable des traits sur l'écran. On peut donc placer les curseurs sur une petite gamme verticale de tension tout en faisant une mesure juste (voir figure). Cela génère donc aussi de l'incertitude. On l'appelle Δm_{exp} .

13. La notice d'utilisation de l'oscilloscope indique la précision des mesures d'amplitudes « verticales » : « DC gain Accuracy : 2% full scale ». Le signal est représenté entre -1 V et 1 V . Les valeurs affichées en ordonnées sont $0,2\text{ V}$, $0,4\text{ V}$, $0,6\text{ V}$ et $0,8\text{ V}$. Calculer Δm_{instr}

L'amplitude pic à pic du signal étant de 2 V ,

$$\Delta m_{instr} = 2 \times 0.02 = 0,04\text{ V.}$$

14. Évaluer Δm_{exp} .

$$\Delta m_{exp} = 0,04\text{ V} \quad \text{d'après le graphe.}$$

15. Calculer l'incertitude type totale, ainsi que son incertitude élargie pour un niveau de confiance de 95% et présenter le résultat.

$$\Delta m = \sqrt{\Delta m_{instr}^2 + \Delta m_{exp}^2} \stackrel{AN}{=} 0,06\text{ V.}$$

L'amplitude du signal vaut donc

$$m = (1,60 \pm 0,06)\text{ V.}$$

Exercice 2 : Incertitudes de type A



Partie I : Mesure d'un indice de réfraction

Dans le tableau suivant sont rassemblés les résultats des mesures de l'indice de réfraction n du Plexiglas de 28 binômes de TP.

1.473	1.491	1.525	1.551	1.460	1.434	1.479	1.473	1.493	1.481
1.512	1.495	1.517	1.517	1.501	1.514	1.511	1.505	1.483	1.509
1.483	1.510	1.485	1.479	1.514	1.595	1.462	1.493		

Tab. 1 Mesure de l'indice de réfraction n .

1. Déterminer par la méthode LA PLUS EFFICACE (calculatrice/Python) la moyenne arithmétique.

Le plus rapide est soit le mode *Statistique* de la calculatrice soit Python avec un code du type

```

1  import numpy as np
2
3  a=np.array([1.473,1.491,1.525,1.551,1.460,1.434,1.479,1.473,1.493,1.481,1.509,1.483,1.505,1.493,1.511,1.512,1.495,1.517,1.517,1.501,1.514,1.511,1.505,1.483,1.509,1.483,1.510,1.485,1.479,1.514,1.595,1.462,1.493])
4  # Affichage de la moyenne
5  print(a.mean())
6  # Affichage de l'écart-type
7  print(a.std())
```

On obtient

$$\bar{n} = 1,498\,035\,7 \quad \text{et} \quad \sigma_n = 0,029\,696.$$

2. Déterminer l'incertitude type absolue sur l'indice de réfraction n puis l'incertitude élargie avec un intervalle de confiance de 95%.

$$\Delta n = \frac{\sigma_n}{\sqrt{28}} = 5,6 \times 10^{-3} \simeq 6 \times 10^{-3} \quad \text{et} \quad \Delta n^{\text{élargie}} = 2\Delta n = 12 \times 10^{-3}.$$

3. L'incertitude type A semble-t-elle bien adaptée à cette mesure ?

Le mesurage a été réalisé plus de dix fois donc l'incertitude de type A est parfaitement adaptée.

Partie II : Mesure d'une longueur d'onde

Dans le tableau suivant sont rassemblés les résultats des mesures de la longueur d'onde λ en nm du laser des binômes de TP.

680	665	647	666	689	670	665	666	637	669
687	618	660	650	618	621	635	654	601	620

Tab. 2 Mesure de la longueur d'onde λ en nm.

1. Calculer la moyenne arithmétique des mesures.

À l'aide du script python suivant, on calcule la moyenne et l'écart-type pour toutes les longueurs d'onde :

```

1      import numpy as np
2      l =
      np.array([680,665,647,666,689,670,665,666,637,669,620,601,654,635,621,618,650,660,618,687])
3      # Affichage de la moyenne
4      print(l.mean())
5      # Affichage de l'écart-type
6      print(l.std())

```

On obtient

$$\bar{\lambda} = 650,9 \text{ nm} \quad \text{et} \quad \sigma = 24,7 \text{ nm}.$$

2. Calculer l'incertitude-type absolue sur la longueur d'onde et donner le résultat pour un intervalle de confiance de 95%.

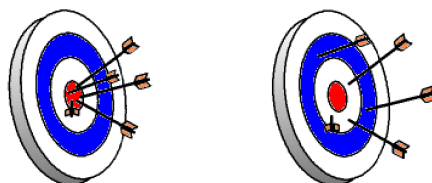
$$\Delta\lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{20}} = 6 \text{ nm} \quad \text{soit} \quad \lambda = (6,5 \pm 0,2) \times 10^1 \text{ nm}.$$

3. L'incertitude de type A semble-t-elle adaptée à cette mesure ?

Il y a plus de dix valeurs obtenues avec le même protocole : l'incertitude de type A est parfaitement adaptée.

Rappel :

Exemples de mesurages **fidèle et juste** à gauche, et **juste mais non fidèle** à droite.



Partie III : Sens critique

S'il faut veiller à ne pas sous-estimer les incertitudes, notamment en recensant toutes les sources d'incertitudes pour une évaluation de type B, il faut aussi veiller à ne pas les surestimer, en particulier par des calculs qui peuvent se révéler parfois trop artificiels et déconnectés de la réalité expérimentale. Il s'agit donc de trouver le bon compromis et il est donc nécessaire d'avoir une bonne connaissance générale, un bon sens critique et un recul suffisant sur l'expérience que l'on réalise.

On fait une mesure au capacimètre de la valeur C de la capacité d'un condensateur et on détermine l'incertitude-type B en utilisant la notice du multimètre. La grandeur mesurée est $C = 1,95 \mu\text{F}$ et la notice donne, sur le calibre utilisé pour la mesure, la précision : 1% Lecture + 2 digits.

1. Calculer l'incertitude-type absolue ΔC_B .

$$\Delta C_B = \frac{1,95 \times 0,01 + 0,02}{\sqrt{3}} = 2,28 \times 10^{-2} \mu\text{F}.$$

Mais la valeur mesurée de C fluctue. On réitère 10 fois l'opération et on note toutes les valeurs C_i mesurées.

1.91 1.93 1.96 1.95 1.95 1.93 1.94 1.95 1.89 1.97

2. Calculer l'incertitude de type A portant sur C : ΔC_A .

Le calcul de la moyenne et de l'écart-type des valeurs du tableau donne

$$\bar{C} = 1,938 \mu\text{F} \quad \text{et} \quad \sigma = 2,27 \times 10^{-2} \mu\text{F}.$$

L'incertitude de type A vaut alors

$$\Delta C_A = \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 7 \times 10^{-3} \mu\text{F}.$$

On en déduit alors $\Delta C = \sqrt{\Delta C_B^2 + \Delta C_A^2}$, et finalement

$$C = (\langle C \rangle \pm 2\Delta C) \mu\text{F}.$$

3. Exprimer C comme ci-dessus.

$$\Delta C = \sqrt{\Delta C_B^2 + \Delta C_A^2} \stackrel{AN}{=} \sqrt{2,28 \times 10^{-2^2} + 7 \times 10^{-3^2}} \simeq 3 \times 10^{-2} \mu\text{F}.$$

On a donc

$$C = (1,95 \pm 0,03) \mu\text{F}.$$

L'incertitude de type A est très faible devant celle liée à l'instrument de mesure. ΔC_A n'est pas pertinente ici car elle sous-estime largement l'incertitude.

Exercice 3 : Présenter un résultat numérique



1. Écrire les nombres suivants en notation scientifique et préciser le nombre de chiffres significatifs :

- (a) $72.5140 = 7,25140 \times 10^1$
 (b) $35.60 \times 10^{-7} = 3,560 \times 10^{-6}$
 (c) $0.00879 = 8,79 \times 10^{-3}$

Nombre	6.8	6.80	0.68	0.680	0.068	0.608	6800	π	3.14	$\sqrt{2}$	1.414	$\frac{1}{3}$	3.33
Chiffres significatifs	2	3	2	3	2	3	4	∞	3	∞	4	∞	3

2.
 3. Une bille parcourt la distance $d = 50$ cm en $\Delta t = 1,7$ s. Donner sa vitesse avec le bon nombre de chiffres significatifs.

$$v = \frac{d}{\Delta t} \stackrel{AN}{=} \frac{50}{1.7} = 29 \text{ cm/s}.$$

La vitesse et la durée sont données avec deux chiffres significatifs donc on exprime la vitesse avec deux chiffres significatifs également.

4. (a) $1648.73 \times 345.9 = 5,703 \times 10^5$
 (b) $1678.43 - 345.9 = 1,333 \times 10^3$
 (c) $2008 \times 84.523 = 1,697 \times 10^5$
 (d) $2008 - 84.523 = 1,923 \times 10^3$