

TD 1 : OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

À préparer : Exercices 1, 3, 5, 6 et 8

Compétences	Capacités
Sources lumineuses Modèle de la source ponctuelle monochromatique. Spectre.	Relier la longueur d'onde dans le vide et la couleur. Caractériser une source lumineuse par son spectre.
Modèle de l'optique géométrique Modèle de l'optique géométrique. Notion de rayon lumineux. Indice d'un milieu transparent. Réflexion, réfraction. Lois de Snell-Descartes.	Définir le modèle de l'optique géométrique. Indiquer les limites du modèle de l'optique géométrique Établir la condition de réflexion totale.
Modèles de quelques dispositifs optiques La fibre à saut d'indice.	Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice.

Exercice 1 : Vrai / Faux

- Le spectre du Soleil est continu. ☒ **Vrai** ☐ Faux
- Lorsque la lumière se propage vers un milieu plus réfringent, le rayon réfracté se rapproche de la normale. ☒ **Vrai** ☐ Faux
- Un objet se trouve au fond d'une piscine. Tous les rayons qu'il diffuse sont visibles d'un observateur situé au bord de la piscine. ☐ Vrai ☒ **Faux**
- La lumière se propage plus vite dans l'eau ($n_{\text{eau}} = 1,3$) que dans l'air ($n_{\text{air}} = 1,0$). ☐ Vrai ☒ **Faux**
- Une lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 5\text{mm}$ est visible par l'œil humain. ☐ Vrai ☒ **Faux**
- La lumière solaire peut être considérée comme monochromatique. ☐ Vrai ☒ **Faux**
- La lumière d'un LASER peut être considérée comme monochromatique. ☒ **Vrai** ☐ Faux
- On peut observer un phénomène de réflexion totale lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu peu réfringent à un milieu plus réfringent. ☐ Vrai ☒ **Faux**
- Lors du phénomène de réflexion, la direction du rayon réfléchi dépend de la longueur d'onde de la lumière. ☐ Vrai ☒ **Faux**
- Lors du phénomène de réfraction, la direction du rayon réfracté dépend de la longueur d'onde de la lumière. ☒ **Vrai** ☐ Faux

Exercice 2 : Indice et couleur

- La lumière visible a un spectre qui s'étend dans le vide de 0,40 à 0,80 μm .

(a) À quel intervalle de fréquences cela correspond-il ?

$$f = \frac{c}{\lambda} \text{ donc}$$

$$f_{\text{max}} = \frac{c}{\lambda_{\text{min}}} \stackrel{AN}{=} 7,5 \times 10^{14} \text{ Hz} = 750 \text{ THz} \quad (1)$$

$$f_{\text{min}} = \frac{c}{\lambda_{\text{max}}} \stackrel{AN}{=} 3,75 \times 10^{14} \text{ Hz} = 375 \text{ THz.} \quad (2)$$

- Que deviennent ces longueurs d'onde dans l'eau ? dans un verre d'indice $n' = 1,5$?

Dans l'eau $\lambda_{\text{eau}} = \frac{\lambda}{n_{\text{eau}}}$ **d'où**

	eau	verre
λ_{min}	$\frac{400 \text{ nm}}{1.33} \stackrel{AN}{=} 301 \text{ nm}$	$\frac{400 \text{ nm}}{1.5} \stackrel{AN}{=} 267 \text{ nm}$
λ_{max}	$\frac{800 \text{ nm}}{1.33} \stackrel{AN}{=} 602 \text{ nm}$	$\frac{800 \text{ nm}}{1.5} \stackrel{AN}{=} 534 \text{ nm}$

- Un laser émet une radiation lumineuse quasi monochromatique de fréquence $f = 4,7 \times 10^{14} \text{ Hz}$.

(a) Pourquoi qualifie-t-on cette radiation de «quasi» monochromatique ?

La lumière émise par un laser n'est pas rigoureusement monochromatique en raison de l'étalement thermique et doppler notamment.

- (b) Quelle est la longueur d'onde dans le vide de cette radiation ? Quelle est sa couleur ?

Dans le vide, on a $\lambda_0 = \frac{c}{f} \stackrel{AN}{=} \frac{3 \times 10^8}{4,7 \times 10^{14}} = 600 \text{ nm}$. Cette radiation est donc jaune-orange.

- (c) On considère maintenant que cette radiation se propage dans un milieu d'indice 1,66. Quelle est la vitesse de propagation de la lumière dans ce milieu ? Quelle est alors la longueur d'onde de la radiation laser ? Quelle est sa couleur ?

Dans ce milieu la vitesse de propagation de la lumière est $v = \frac{c}{n} \stackrel{AN}{=} \frac{3 \times 10^8}{1,66} = 2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ainsi, la longueur d'onde de la radiation laser est $\lambda = \frac{v}{f} \stackrel{AN}{=} \frac{2 \times 10^8}{4,7 \times 10^{14}} = 425 \text{ nm}$: la radiation est proche de l'indigo.

3. La formule de Cauchy, donnant l'indice d'un verre pour une radiation monochromatique de longueur d'onde λ_0 dans le vide est $n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$.

- (a) Donner les dimensions de A et de B, et leurs unités dans le système international.

Tous les termes de la somme doivent avoir la même dimension que l'indice optique n donc :

- $\dim A = \dim n = 1$ donc A est sans dimension. A n'a pas d'unité,
- $\dim n = \dim \frac{B}{\lambda_0^2}$ soit $\dim B = \dim n \times \dim \lambda_0^2 = L^2$. Ainsi $\dim B = L^2$ et B s'exprime en m^2 .

- (b) Des mesures effectuées avec un même verre ont donné :

- $n_r = 1,618$ pour une radiation rouge de $\lambda_{0,r} = 768 \text{ nm}$ dans le vide,
 - $n_v = 1,652$ pour une radiation violette de $\lambda_{0,v} = 434 \text{ nm}$ dans le vide.
- i. Calculer les valeurs de A et de B.

Les données procurent deux équations

$$\begin{cases} n_r = A + \frac{B}{\lambda_{0,r}^2} \\ n_v = A + \frac{B}{\lambda_{0,v}^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = n_r - \frac{B}{\lambda_{0,r}^2} \\ n_v = n_r - \frac{B}{\lambda_{0,r}^2} + \frac{B}{\lambda_{0,v}^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = n_r - \frac{(n_v - n_r)\lambda_{0,v}^2}{\lambda_{0,r}^2 - \lambda_{0,v}^2} \\ B = \frac{n_v - n_r}{\frac{1}{\lambda_{0,v}^2} - \frac{1}{\lambda_{0,r}^2}} = \frac{(n_v - n_r)\lambda_{0,v}^2 \lambda_{0,r}^2}{\lambda_{0,r}^2 - \lambda_{0,v}^2} \end{cases} \quad (3)$$

L'application numérique donne $A = 1,60$ et $B = 9,41 \times 10^{-15} \text{ m}^2$.

- ii. En déduire la valeur de l'indice pour une radiation jaune telle que $\lambda_{0,j} = 589 \text{ nm}$ dans le vide.

$$n_{\text{jaune}} = A + \frac{B}{\lambda_{0,j}^2} \stackrel{AN}{=} 1,60 + \frac{9,41 \times 10^{-15}}{(589 \times 10^{-9})^2} = 1,63.$$

Exercice 3 : Indice du sang



L'indice de réfraction du sang augmente avec sa concentration en glucose (pour une concentration usuelle l'indice est compris entre 1,34 et 1,38). Ainsi mesurer l'indice de réfraction du sang permet de déterminer sa concentration en glucose. On considère donc le dispositif de la figure ci-dessous où du sang est contenu dans un support hémisphérique. Déterminer l'indice de réfraction du sang.

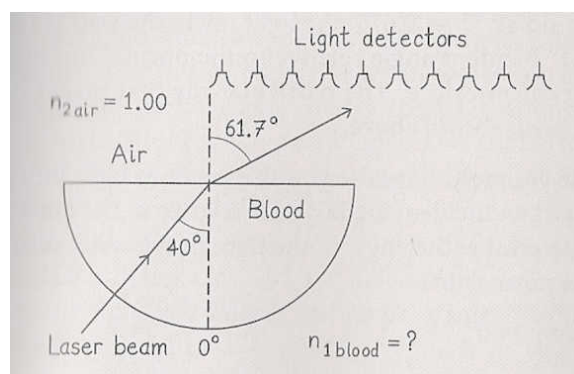


Fig. 1 Schéma du dispositif.

Appliquons la 3e loi de Snell-Descartes au dioptré sang-air :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad \text{soit} \quad n_1 = \frac{n_2 \sin i_2}{\sin i_1} \stackrel{AN}{=} 1,00 \times \frac{\sin 61,7}{\sin 40} \simeq 1,37.$$

Exercice 4 : Dioptré air-eau



On considère le dioptré air-eau (indice de l'air = 1 et indice de l'eau = 1,33)

1. La lumière vient d'une source placée dans l'air. Quelles sont les valeurs possibles de i_2 , angle du rayon réfracté dans l'eau avec la normale si i_1 prend toutes les valeurs entre 0° et 90° ?

Appliquons la 3e loi de Snell-Descartes au dioptré air-eau :

$$n_{\text{air}} \sin i_{\text{air}} = n_{\text{eau}} \sin i_{\text{eau}} \quad \text{avec} \quad n_{\text{air}} < n_{\text{eau}}.$$

Il y a donc toujours un rayon réfracté car le second milieu (l'eau) est plus réfringent que le premier (l'air). Ainsi, pour un angle i_{air} quelconque compris entre 0° et 90°

$$i_{\text{eau}} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}} \sin i_{\text{air}}\right).$$

Il y a deux valeurs particulières :

- pour $i_1 = 0^\circ$, $i_2 = 0$: le rayon perpendiculaire au dioptré n'est pas dévié ;
- pour $i_1 = 90^\circ$, $i_2 \stackrel{AN}{=} 0,85 \text{ rad} = 49^\circ$: c'est l'angle de réfraction limite.

2. Même question lorsque la source est placée dans l'eau.

- Méthode 1 : Appliquons la 3e loi de Snell-Descartes au dioptré eau-air :

$$n_{\text{eau}} \sin i_{\text{eau}} = n_{\text{air}} \sin i_{\text{air}} \quad \text{avec} \quad n_{\text{eau}} > n_{\text{air}}.$$

Comme l'indice du second milieu (l'air) est inférieur à celui de l'eau, il peut y avoir réflexion totale au delà d'un certain angle. Le rayon réfracté existe tant que

$$|\sin i_{\text{air}}| \leq 1 \quad \text{soit} \quad \left| \frac{n_{\text{eau}}}{n_{\text{air}}} \sin i_{\text{eau}} \right| \leq 1 \quad \text{donc} \quad i_{\text{eau}} \leq \arcsin \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}} \stackrel{AN}{=} 49^\circ.$$

Ainsi,

- pour $i_{\text{eau}} \leq 49^\circ$, il existe un rayon réfracté dans l'air ;
- pour $i_{\text{eau}} > 49^\circ$, il y a réflexion totale à l'interface eau-air.
- Méthode 2 : D'après la question précédente, par retour inverse de la lumière, on constate que
 - pour $i_{\text{eau}} \leq 49^\circ$, il existe un rayon réfracté dans l'air ;
 - pour $i_{\text{eau}} > 49^\circ$, il y a réflexion totale à l'interface eau-air.

Ici, $i_1 = i_{\text{eau}}$ et $i_2 = i_{\text{air}}$. On a

- pour $i_{\text{eau}} = 0^\circ < 49^\circ$, le rayon réfracté existe et $i_{\text{air}} = 0^\circ$: le rayon perpendiculaire au dioptré n'est pas dévié ;
- pour $i_{\text{eau}} = 90^\circ > 49^\circ$, le rayon réfracté n'existe pas, et le rayon progresse à l'interface eau-air donc $i_{\text{air}} = 90^\circ$.

3. Dans quel cas peut-on observer une réflexion totale ?

Exercice 5 : Comment un pêcheur voit-il un poisson ?



1. On considère $n_2 = 1$. On veut étudier l'influence de l'angle i_2 sur la vision que le pêcheur a du poisson. Établir la relation entre HA , HA' , n_1 et i_2 . Avec $HA = 1$ m, déterminer HA' pour $i_2 = 10^\circ$, et pour $i_2 = 30^\circ$.

Remarquons que $\widehat{HAI} = i_2$ et $\widehat{HAI} = i_1$. Par ailleurs dans les triangles HAI et HAI' , on a respectivement

$$A'H = \frac{HI}{\tan i_2} \quad \text{et} \quad AH = \frac{HI}{\tan i_1} \quad \text{soit} \quad \frac{A'H}{AH} = \frac{\tan i_1}{\tan i_2}. \quad (4)$$

Or d'après la troisième loi de Snell-Descartes appliquée en I, $n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1$. On en déduit

$$i_1 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1} \sin i_2\right).$$

En remplaçant dans l'équation précédente, il vient

$$A'H = HA \times \frac{\arctan\left(\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1} \sin i_2\right)\right)}{\tan i_2}. \quad (5)$$

L'application numérique donne

$$A'H(i_2 = 10^\circ) = 74 \text{ cm} \quad (6)$$

$$A'H(i_2 = 30^\circ) = 70 \text{ cm} \quad (7)$$

2. Si on se place dans les conditions de Gauss, quelle approximation peut-on faire ? Calculer alors HA' pour $HA = 1$ m. Quel est l'écart par rapport à la valeur déterminée en 1 ?

Dans les conditions de Gauss, $i_2 \ll 1$ donc $\tan i_2 \sim \sin i_2$ et $\arcsin i_2 \sim i_2$. Ainsi l'Éq 5 devient

$$A'H \stackrel{i_2 \ll 1}{\simeq} AH \times \frac{\frac{n_2}{n_1} i_2}{i_2} \simeq AH \frac{n_2}{n_1}. \quad (8)$$

L'application numérique donne $A'H \simeq 75$ cm soit un écart d'environ 7% par rapport à la valeur déterminée au 1.

Exercice 6 : Dispersion par un prisme



Animation

<https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/optiqueGeo/prisme/prisme.php>

On étudie la dispersion de la lumière blanche par un prisme pour lequel l'indice de réfraction est 1,590 pour une radiation bleue (notée par la suite en indice B) et 1,512 pour une radiation rouge (notée par la suite en indice R). On envoie sur une face du prisme d'angle $A = 60^\circ$ un mince faisceau de lumière blanche d'incidence $i_1 = 40^\circ$.

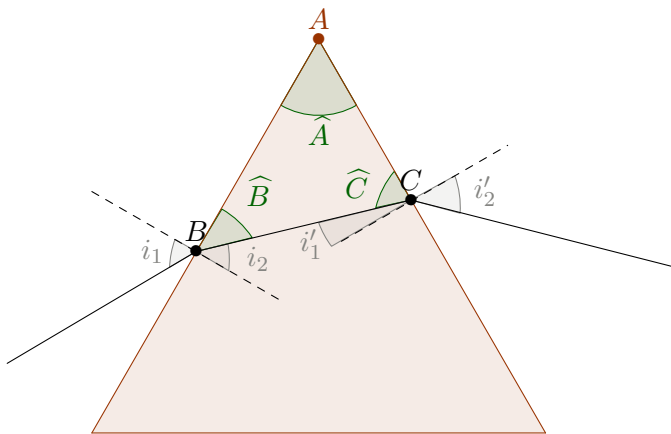


Fig. 2 Schéma de principe.



Fig. 3 Pochette de l'album des Pink Floyd.

On considère que l'indice de l'air vaut 1 pour toutes les radiations lumineuses.

1. Montrer géométriquement, à l'aide du schéma, que l'on a la relation $\hat{A} = i'_1 + i_2$.

Dans le triangle ABC, on a

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \quad \text{soit} \quad \hat{A} + \frac{\pi}{2} - i_2 + \frac{\pi}{2} - i'_1 = \pi \quad \text{donc} \quad \boxed{\hat{A} = i_2 + i'_1.}$$

2. En déduire si le phénomène de dispersion observé sur cette pochette d'album Dark Side of the Moon des Pink Floyd est conforme à la réalité? On calculera la valeur respective de $i'_2(B)$ et $i'_2(R)$ pour justifier.

Appliquons la troisième loi de Snell-Descartes :

$$\begin{aligned} \text{en } B \quad n_{\text{air}} \sin i_1 &= n_{\text{prisme}} \sin i_2 \\ \text{en } C \quad n_{\text{prisme}} \sin i'_1 &= n_{\text{air}} \sin i'_2 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} i'_2 &= \arcsin \left(\frac{n_{\text{prisme}}}{n_{\text{air}}} \arcsin i'_1 \right) \\ \text{or} \quad i'_1 &= \hat{A} - i_2 \\ &= \hat{A} - \arcsin \left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{prisme}}} \arcsin i_1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{DONC} \quad \boxed{i'_2 = \arcsin \left[\frac{n_{\text{prisme}}}{n_{\text{air}}} \sin \left(\hat{A} - \arcsin \left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{prisme}}} \sin i_1 \right) \right) \right].}$$

Les applications numériques donnent

$$\begin{aligned} i'_2(\text{rouge}) &\stackrel{AN}{=} \arcsin \left[\frac{1,512}{1} \sin \left(60^\circ - \arcsin \left(\frac{1}{1,512} \sin 40^\circ \right) \right) \right] = 60^\circ \\ i'_2(\text{bleu}) &\stackrel{AN}{=} \arcsin \left[\frac{1,590}{1} \sin \left(60^\circ - \arcsin \left(\frac{1}{1,590} \sin 40^\circ \right) \right) \right] = 70^\circ. \end{aligned}$$

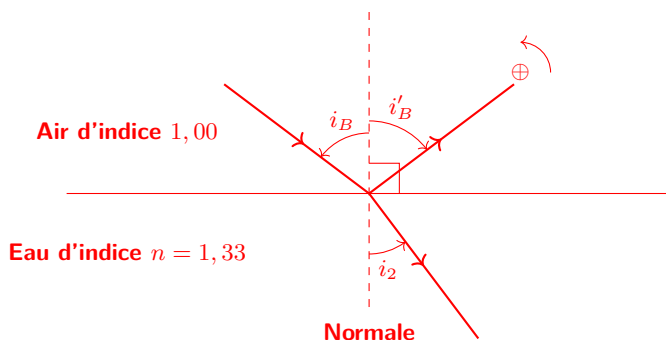
Le bleu est davantage dévié que le rouge, ce qui est conforme à la photo.

Exercice 7 : Angle de Brewster



Un rayon lumineux arrive à l'interface plane séparant l'air d'un milieu d'indice n . Il se scinde en un rayon réfléchi et un rayon réfracté.

1. Déterminer l'angle d'incidence i_B appelé angle de Brewster pour lequel rayon réfléchi et rayon réfracté sont perpendiculaires.



On écrit les trois relations nécessaires pour résoudre le problème à trois inconnues :

- Loi de la réflexion : $i'_B = -i_B$
- Loi de la réfraction : $\sin(i_B) = n \sin(i_2)$ (indice de l'air = 1)
- Somme des angles : $i_2 + \frac{\pi}{2} + (-i'_B) = \pi$, soit $i_2 = \frac{\pi}{2} + i'_B$

Ainsi $i_2 = \frac{\pi}{2} - i_B$, que l'on peut injecter dans la loi de la réfraction : $\sin(i_B) = n \sin \left(\frac{\pi}{2} - i_B \right)$, soit $\sin(i_B) = n \cos(i_B)$

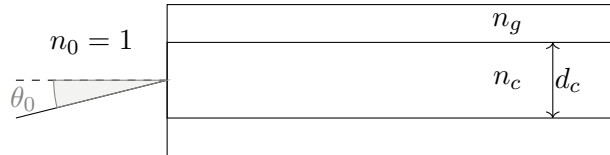
Enfin : $\boxed{\tan(i_B) = n \Leftrightarrow i_B = \arctan(n)}$

2. Faire l'application numérique dans le cas de l'eau d'indice $n = 1,33$.

A.N. $i_B = 53^\circ$ **Exercice 8 : Fibre optique à saut d'indice**

Une fibre optique est un objet qui permet de guider la lumière entre deux points avec très peu de perte, ce qui permet de transporter des informations sur des distances de plusieurs centaines de km. Elle est à l'origine par ces capacités de transports (plusieurs $\text{Gbit} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{km}$) de l'apparition des autoroutes de l'information et de l'avènement de l'Internet tel que nous le connaissons aujourd'hui. Intéressons-nous à la propagation de la lumière dans une fibre optique ainsi qu'à la capacité de transmission de cette dernière.

Soit la fibre suivante, de diamètre de cœur $d_c = 50 \mu\text{m}$ et d'indice de cœur $n_c = 1,45$:

**Fig. 4** Schéma fibre optique

1. Dessiner qualitativement le trajet du rayon dans la fibre optique. En particulier, que se passe-t-il s'il y a une première réflexion totale sur l'interface cœur-gaine ? En déduire le principe du guidage de la lumière dans la fibre.

Voir cours

2. Quelle condition impose le confinement optique sur l'indice de gaine n_g ? En déduire la valeur de n_g , sachant que la différence d'indice Δn assurant ce confinement est de l'ordre de $\frac{\Delta n}{n_c} = 2\%$.

Pour avoir réflexion totale à l'interface cœur/gaine, il faut que $n_g < n_c$. Ainsi

$$\Delta n = n_c - n_g = 0,02n_c \quad \text{soit} \quad n_g = 0,98n_c \stackrel{\text{AN}}{=} 1,42.$$

3. Donner l'angle $\theta_{0,max}$ maximum pour lequel la lumière est guidée dans la fibre optique. Est-ce que la lumière est guidée dans les cas suivant : $\theta_0 = 10^\circ$ et : $\theta_0 = 20^\circ$?

Nous avons démontré dans le cours que

$$\Theta_{0,max} = \arcsin \left(\frac{\sqrt{n_c^2 - n_g^2}}{n_0} \right) \stackrel{\text{AN}}{=} \arcsin \left(\frac{\sqrt{1,45^2 - 1,42^2}}{1,00} \right) = 17,1^\circ.$$

Si $\theta_0 = 10^\circ$, la lumière est guidée mais elle ne l'est pas si $\theta_0 = 20^\circ$.

4. On appelle ouverture numérique de la fibre la quantité $O.N \equiv n_0 \sin \theta_0$. Exprimer l'ON de la fibre en fonction de n_g et n_c .

$$O.N. = n_0 \sin \theta_{0,max} = n_0 \frac{\sqrt{n_c^2 - n_g^2}}{n_0} \quad \text{donc} \quad O.N. = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}.$$

5. En considérant que le faisceau lumineux comporte des rayons dont l'inclinaison θ varie de 0 à $\theta_{0,max}$, montrer qu'il y a déformation d'une impulsion lumineuse lors de la propagation dans cette fibre. Expliquez votre réponse.

Le rayon d'incidence nulle traverse la fibre en ligne droite. Au contraire, le rayon d'incidence $\theta_{0,max}$ subira un grand nombre de réflexions totales sur les parois : ce rayon parcourra ainsi une plus grande distance. Les deux rayons se déplaçant à la même vitesse, ils arriveront donc en décalage à l'extrémité de la fibre.

6. Déterminer la différence de chemin maximum que l'on peut avoir entre deux rayons lumineux d'inclinaison 0° et θ_0 . On parle alors de dispersion modale.

Considérons le rayon d'incidence nulle : il parcourt une distance $\ell_{min} = L$ où L est la longueur de la fibre. La durée nécessaire à ce rayon pour traverser la fibre est

$$t_{min} = \frac{\ell_{min}}{v} = \frac{n_1 L}{c}.$$

Considérons à présent le rayon d'incidence $\theta_0 = \theta_{0,max}$: ce rayon subit une réflexion totale à chaque interface cœur-gaine.

En s'appuyant sur le schéma, on voit que $OI_1 = \frac{OH_1}{\sin r_1}$. Puisque nous sommes dans le cas d'une réflexion totale

$$\sin r_1 = \frac{n_g}{n_c} < 1 \quad \text{donc} \quad OI_1 = \frac{n_c OH_1}{n_g}.$$

En répétant ce raisonnement pour chaque réflexion, on obtient

$$\ell_{max} = \frac{n_c L}{n_g}.$$

Comme les rayons se propagent à la vitesse $v = \frac{c}{n}$, on en déduit le temps nécessaire à ces rayons pour traverser la fibre

$$t_{max} = \frac{\ell_{max}}{v} = \frac{n_c^2 L}{n_g c} > t_{min} \quad \text{car} \quad n_c > n_g.$$

7. En déduire l'expression de la différence de temps de vol entre ces deux rayons lumineux, en fonction de l'indice de cœur, l'indice de gaine de la fibre et de la longueur de propagation. Quelle est cette différence pour une longueur de propagation de 1 km ?

Au final, on en déduit la différence de temps de vol entre les deux rayons appelée dispersion intermodale

$$\delta t = t_{max} - t_{min} = \frac{n_c^2 L}{n_g c} - \frac{n_c L}{c}$$

$$\delta t = \frac{n_c L}{n_g} \left(\frac{n_c}{n_g} - 1 \right) \stackrel{AN}{=} 102 \text{ ns} \quad \text{avec} \quad L = 1 \text{ km}.$$

Cette durée est à comparer à la période typique d'un rayon lumineux visible qui est de l'ordre de 1×10^{-14} s : cette dispersion intermodale brouille donc fortement les signaux se propageant dans la fibre optique.

8. L'information transportée dans une fibre optique est une modulation de l'amplitude lumineuse, et plus précisément une succession périodique de 0 et de 1 (bit). Déduire de la question précédente, la période minimum entre deux bits sans perte de l'information. Que vaut le débit en bit/s de cette fibre ? Le comparer au standard téléphone Numéris (64 kbit/s) et au standard télévision (100 Mb/s).

La succession de 0 et de 1 est généralement codée par un signal créneau. On peut récupérer l'information tant que la dispersion intermodale n'exède pas une demi-période soit $2\delta t < T$. La fréquence correspondante est

$$f_{max} = \frac{1}{2\delta t} \stackrel{AN}{=} 4,90 \text{ MHz ou Mbit/s}.$$

Cette fréquence est bien supérieure au standard téléphonique ou de la télévision, on peut donc l'utiliser pour ces applications.