

TD 0 : ANALYSE DIMENSIONNELLE ET PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

À préparer : Exercices 1.1-6, 3, 4 et 5.1**Exercice 1 : Analyse dimensionnelle**

1. Quelle est la dimension d'un angle ?

Un angle α n'a pas de dimension : $\dim(\alpha) = 1$.

2. Quelle est la dimension d'une énergie ? En déduire la dimension d'une puissance.

Comme $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et $\mathcal{P} = \frac{dE}{dt}$,

$$\dim(E) = ML^2T^{-2} \quad \text{et} \quad \dim(P) = \frac{ML^2T^{-2}}{T} = ML^2T^{-3}.$$

3. En déduire la dimension d'une résistance électrique (on pensera à la puissance dissipée par effet Joule).

La puissance dissipée par effet Joule s'exprime $\mathcal{P} = Ri^2$ soit $R = \mathcal{P}/i^2$ donc

$$\dim(R) = \frac{ML^2T^{-3}}{I} = ML^2T^{-3}I^{-2}$$

4. Finalement quelle est la dimension d'une tension électrique ?

D'après la loi d'Ohm, $U = Ri$ d'où

$$\dim(U) = ML^2T^{-3}I^{-2} \times I = ML^2T^{-3}I^{-1}.$$

5. Lors d'un calcul apparaît l'expression $x = \frac{\pi}{5} \times 25^3$: quelle est la dimension de x ?

x est un nombre, et n'a donc pas de dimension.

6. Déterminer la dimension de α et celle de β qui apparaissent dans la loi : $F = \alpha mv + \beta v^2$ avec m la masse, v la vitesse et F une force.

Pour que la formule soit homogène, il faut que

$$\dim(F) = \dim(\alpha mv) = \dim(\beta v^2) \quad \text{soit} \quad \dim(\alpha) = \frac{\dim(F)}{\dim(mv)} \quad \text{et} \quad \dim(\beta) = \frac{\dim(F)}{\dim(v^2)}.$$

Comme $\dim(F) = MLT^{-2}$ (en utilisant la deuxième loi de Newton, voir cours), on en déduit

$$\dim(\alpha) = \frac{MLT^{-2}}{MLT^{-1}} = T^{-1} \quad \text{et} \quad \dim(\beta) = \frac{MLT^{-2}}{L^2T^{-2}} = ML^{-1}.$$

7. Simplifier l'unité suivante : $\frac{J \cdot N}{W \cdot kg}$. Le résultat doit être exprimé en fonction des unités du système international.

$$\dim\left(\frac{J \cdot N}{W \cdot kg}\right) = \frac{ML^2T^{-2} \times MLT^{-2}}{MLT^{-3} \times M} = LT^{-1} \quad \text{soit} \quad \left[\frac{J \cdot N}{W \cdot kg}\right] = m \cdot s^{-1} \quad \text{c'est une vitesse.}$$

8. L'énergie cinétique d'un solide en rotation est donnée par : $E = \frac{1}{2}J\omega^2$ où ω désigne la pulsation ou fréquence angulaire.

- (a) Quelle est la dimension du moment d'inertie J ?

$$\dim(J) = \dim\left(\frac{E}{\omega^2}\right) = \frac{ML^2T^{-2}}{T^{-2}} = ML^2.$$

- (b) Un étudiant propose comme expression du moment d'inertie d'une sphère $J = \frac{2}{5}m^2R$ avec m la masse de la sphère et R son rayon. Est-ce correct ? Justifier.

La formule de l'étudiant n'est pas homogène car $\dim(m^2R) = M^2L \neq \dim(J)$.

- (c) Le même étudiant propose pour l'expression de l'accélération $a = \frac{(M \sin \theta - m)g}{M + m + \frac{J}{R^2}}$ où M et m désignent des masses, R un rayon, g l'accélération de la pesanteur. Est-ce raisonnable du point de vue de l'homogénéité ?

$$\dim((M \sin \theta - m)g) = MLT^{-2} \quad \text{et} \quad \dim\left(M + m + \frac{J}{R^2}\right) = M \quad \text{car} \quad \dim\left(\frac{J}{R^2}\right) = M.$$

Ainsi $\dim\left(\frac{(M \sin \theta - m)g}{M + m + \frac{J}{R^2}}\right) = \frac{MLT^{-2}}{M} = LT^{-2} = \dim(a)$. L'équation proposée est donc homogène.

Exercice 2 : Valeur d'une résistance



La résistance d'un fil en cuivre est donnée par la formule $R = \frac{\ell}{\gamma S}$ où $\gamma = 59 \text{ MS/m}$ est la conductivité du cuivre, où $\ell = 1,0 \times 10^3 \text{ cm}$ est la longueur du fil et où $S = 3,1 \text{ mm}^2$ est sa section. L'unité des résistances est l'ohm, notée « Ω ». L'unité notée « S » est le siemens; on a $1 \Omega = 1 \text{ S}^{-1}$.

1. Calculer R (en Ω).

Commençons par exprimer les grandeurs en unité SI : $\gamma = 59 \times 10^6 \text{ S/m}$, $\ell = 1,0 \times 10^1 \text{ m} = 10 \text{ m}$ et $S = 3,1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$. Ainsi

$$R \stackrel{AN}{=} \frac{10}{59 \times 10^6 \times 3,1 \times 10^{-6}} = 5,5 \times 10^{-2} \Omega.$$

Exercice 3 : Vitesse d'un électron



La vitesse d'un électron est donnée par $v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$, où $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ est la charge d'un électron, $U = 0,150 \text{ kV}$ est une différence de potentiel et $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ est la masse d'un électron.

1. Calculer la vitesse en m/s.

Exprimons les grandeurs en unités SI : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $U = 150 \text{ V}$ et $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ d'où

$$v \stackrel{AN}{=} \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 150}{9,1 \times 10^{-31}}} = 7,3 \times 10^6 \text{ m/s}.$$

2. Calculer la vitesse en km/h.

$$v = \frac{7,3 \times 10^6 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{7,3 \times 10^6 \times 1 \times 10^{-3} \text{ km}}{1 \times \frac{1}{3600} \text{ h}} = 7,3 \times 10^3 \times 3600 = 2,6 \times 10^7 \text{ km/h}.$$

Exercice 4 : Est-ce homogène ?



1. On note R la résistance électrique équivalente à deux résistances R_1 et R_2 en dérivation. La relation $R = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ peut-elle être juste ?

Pour que la relation soit homogène, il faut que les trois termes aient la même dimension, c'est à dire

$$\dim(R) = \dim\left(\frac{1}{R_1}\right) = \dim\left(\frac{1}{R_2}\right)$$

ce qui est impossible car $\dim(R) = \dim(R_1) = \dim(R_2) \neq 1$. Cette relation est donc inhomogène et donc nécessairement fausse.

2. En notant u_1 et u des tensions électriques et R_1 et R_2 des résistances électriques, la relation $u_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} u$ est-elle homogène ?

Pour que cette relation soit homogène, il faut que $\dim\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right) = 1$ ce qui n'est pas le cas. Cette relation est donc inhomogène.

3. On note E une tension électrique, R une résistance, i un courant électrique et t une durée. Quelle doit-être la dimension de la constante τ pour que la relation suivante soit homogène ?

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}).$$

Le facteur $\frac{E}{R}$ est bien homogène à une intensité d'après la loi d'Ohm. Pour que la relation soit homogène, l'argument de l'exponentielle doit être sans dimension c'est-à-dire

$$\dim(t/\tau) = 1 \quad \text{soit} \quad \dim(t) = \dim(\tau) = T.$$

Exercice 5 : Équations aux dimensions



1. La fréquence de vibration f d'une goutte d'eau dépend de plusieurs paramètres. Par conséquent, les facteurs intervenant dans l'expression de la fréquence de vibration f sont :

- R , le rayon de la goutte ;
- ρ , la masse volumique de l'eau ;
- A , la tension superficielle. La tension superficielle est la **force qu'il faut appliquer par unité de longueur** pour provoquer l'extension de la surface de la goutte.

On écrira donc : $f = R^\alpha \rho^\beta A^\gamma$.

Par analyse dimensionnelle, déterminer les exposants α , β et γ . En déduire f sous la forme d'une racine carrée.

On sait que

$$\begin{cases} \dim(f) = T^{-1} \\ \dim(\rho) = ML^{-3} \\ \dim(A) = \dim\left(\frac{\text{force}}{\text{longueur}}\right) = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{aligned} \dim(f) &= \dim(R^\alpha \rho^\beta A^\gamma) \\ T^{-1} &= L^\alpha (ML^{-3})^\beta (MT^{-2})^\gamma \end{aligned}$$

On en déduit alors l'équation

$$M^{\beta+\gamma} L^{-3\beta+\alpha} T^{-2\gamma+1} = 1 \quad \text{valable ssi} \quad \begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ -3\beta + \alpha = 0 \\ -2\gamma + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = -3/2 \\ \beta = -1/2 \\ \gamma = 1/2 \end{cases}$$

Ainsi,

$$f = R^{-3/2} \rho^{-1/2} A^{1/2} = \sqrt{\frac{A}{R^3 \rho}}.$$

2. L'élasticité d'un liquide est décrite par son coefficient de compressibilité $\chi = \frac{-1}{V} \frac{dV}{dP}$. Une variation de pression conduit à une certaine variation relative de volume. Par analyse dimensionnelle, déterminer la vitesse des ondes sonores dans un liquide de masse volumique ρ et de coefficient de compressibilité χ .

Posons $c = \rho^\alpha \chi^\beta$. De plus,

$$\dim(c) = LT^{-1}, \quad \dim(\rho) = ML^{-3} \quad \text{et} \quad \dim(\chi) = \dim\left(\frac{-1}{V} \frac{dV}{dP}\right) = L^{-3} \times \frac{L^3}{MLT^{-2}/L^2} = M^{-1}LT^2.$$

La dimension de c est donnée par

$$\begin{aligned} \dim(c) &= \dim(\rho^\alpha \chi^\beta) \\ LT^{-1} &= (ML^{-3})^\alpha (M^{-1}LT^2)^\beta \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad 1 = M^{\alpha-\beta} L^{-3\alpha+\beta-1} T^{2\beta+1} \quad \text{valable ssi} \quad \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ -3\alpha + \beta - 1 = 0 \\ 2\beta + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = \beta = -1/2 \\ \beta = -1/2 \end{cases}$$

On a donc

$$c = \rho^{-1/2} \chi^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\rho \chi}}.$$

3. La légende raconte que le physicien britannique Geoffrey Ingram Taylor aurait pu en 1950, à l'aide d'un film et en utilisant l'analyse dimensionnelle, estimer l'énergie E dégagée par une explosion nucléaire. Raisonnement : le film permet d'avoir accès à l'évolution du rayon $R(t)$ du nuage formé par l'explosion au cours du temps. Les quantités physiques influant sur le rayon sont le temps t , l'énergie E de l'explosion et la masse volumique ρ de l'air.

Déterminer l'équation aux dimensions de chacune de ces quantités, et en déduire l'expression de E en fonction de R , t et ρ .

Posons $E = R^\alpha t^\beta \rho^\gamma$. On sait que

$$\dim(R) = L, \quad \dim(t) = T, \quad \dim(\rho) = ML^{-3} \quad \text{et} \quad \dim(E) = ML^2T^{-2}.$$

Ainsi

$$\dim(E) = ML^2T^{-2} = L^\alpha T^\beta (ML^{-3})^\gamma \quad \text{soit} \quad 1 = M^{\gamma-1} L^{\alpha-2} T^{\beta+2} \quad \text{valable ssi} \quad \begin{cases} \gamma - 1 = 0 \\ \alpha - 2 = 0 \\ \beta + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Finalement, $E = R^5 t^{-2} \rho$.